

Берклевский  
Курс  
Физики

том I

Ч.КИТТЕЛЬ  
У.НАЙТ  
М.РУДЕРМАН

# МЕХАНИКА

The background features a series of concentric circles and vertical lines, creating a grid-like pattern. The circles are centered around the bottom half of the page, and the vertical lines extend from the top to the bottom. The overall design is minimalist and geometric.



*Берклевский*  
*Курс*  
*Физики*

Т О М I

Ч. КИТТЕЛЬ  
У. НАЙТ  
М. РУДЕРМАН

# МЕХАНИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Перевод с английского  
под редакцией  
А. И. Шальникова и А. С. Ахматова



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1975

530

К 45

УДК 530.1

MECHANICS  
BERKELEY PHYSICS COURSE

volume 1

Charles KITTEL  
Walter D. KNIGHT  
Malvin A. RUDERMAN

McGraw-Hill book company

**Механика.** Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. Издание 2-е, стереотипное. Перевод с англ. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1975.

Книга представляет собой первый том курса общей физики, созданного преподавателями Калифорнийского университета в г. Беркли. Один из авторов этой книги, выдающийся физик-теоретик Ч. Киттель, известен советскому читателю по переводам ряда его работ. Книга содержит систематическое изложение физических основ механики с современной точки зрения. В ней имеется много примеров и задач различной степени трудности, она прекрасно иллюстрирована.

Таблиц 12. Иллюстраций 527.

К  $\frac{20402-039}{053(02)-75}$  97-75



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие общего редактора русского перевода . . . . .	7
Предисловие редактора перевода I тома . . . . .	8
Из предисловия к Берклеевскому курсу физики . . . . .	10
Предисловие к I тому . . . . .	13
Указания для преподавателей . . . . .	15
Указания для студентов . . . . .	19
Система обозначений . . . . .	20
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>23</b>
1.1. Окружающий нас мир (23). 1.2. Геометрия и физика (28). 1.3. Оценки кривизны мирового пространства (31). 1.4. Геометрия в меньшем масштабе (34). 1.5. Инвариантность (36). Задачи (37).  Дополнение. Простая астрономия Солнечной системы (37). Приборы для физических исследований (44).	
<b>Глава 2. Векторы . . . . .</b>	<b>45</b>
2.1. Термины и понятия. Векторная система обозначений (45). 2.2. Произведения векторов. Скалярное произведение двух векторов (55). 2.3. Векторное произведение (59). 2.4. Векторы в декартовой системе координат (63). 2.5. Часто применяемые векторные тождества (69). Задачи (69).  Дополнение 1. Векторы и сферические полярные координаты (72). Дополнение 2. Кристаллические решетки и обратная решетка (73). Математическое дополнение 1. Равенство векторов в сферическом про- странстве (75). Математическое дополнение 2. Обобщенная векторная система обозначений в декартовых координатах (76). Из истории физики. Дж. В. Гиббс (77).	
<b>Глава 3. Принцип относительности Галилея . . . . .</b>	<b>78</b>
3.1. Формулировка законов движения Ньютона (78). 3.2. Инерциаль- ные системы отсчета (81). 3.3. Абсолютное и относительное уско- рение (88). 3.4. Абсолютная и относительная скорость (89). 3.5. Преобразование Галилея (90). 3.6. Сохранение импульса (95). 3.7. Химические реакции (99). 3.8. Силы инерции (101). 3.9. Закон всемирного тяготения Ньютона (107). Задачи (109).	

Дополнение. Скорость и ускорение во вращающихся системах координат (111). Математическое дополнение 1. Дифференцирование произведений векторов (117). Математическое дополнение 2. Угловая скорость как векторная величина (117). Из истории физики. Опыт с жидкостью во вращающемся сосуде и представления Ньютона об абсолютном и относительном движении (118).

#### Глава 4. Простые задачи нерелятивистской динамики . . . . . 120

4.1. Сила, действующая на заряженную частицу. Гауссова система единиц (120). 4.2. Заряженная частица в однородном постоянном электрическом поле (126). 4.3. Заряженная частица в однородном переменном электрическом поле (130). 4.4. Заряженная частица в постоянном магнитном поле (132). 4.5. Размерности (135). 4.6. Магнитная фокусировка при повороте на угол  $180^\circ$  (137). 4.7. Принцип ускорения заряженных частиц в циклотроне (138). Задачи (139).

Дополнение 1. Движение протона во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях (142). Дополнение 2. Преобразования систем отсчета (144). Математическое дополнение. Комплексные числа (147). Из истории физики. Изобретение циклотрона (153).

#### Глава 5. Сохранение энергии . . . . . 159

5.1. Законы сохранения в природе (159). 5.2. Определение понятий (160). 5.3. Сохранение энергии (164). 5.4. Кинетическая энергия (167). 5.5. Потенциальная энергия (174). Задачи (187).

Из истории физики. Открытие Цереры и Нептуна (190).

#### Глава 6. Сохранение импульса и момента импульса . . . . . 192

6.1. Сохранение импульса (192). 6.2. Сохранение момента импульса (203). 6.3. Инвариантность по отношению к вращению (209). 6.4. Момент импульса Солнечной системы (213). 6.5. Внутренний момент импульса элементарных частиц (214). Задачи (215).

Дополнение. Столкновение метеоритов с атмосферой (217).

#### Глава 7. Гармонический осциллятор . . . . . 219

7.1. Математический маятник (220). 7.2. Масса на пружине (227). 7.3. Контур, состоящий из емкости  $C$  и самоиндукции  $L$  (231). 7.4. Трение (232). 7.5. Затухающий гармонический осциллятор (234). 7.6. Добротность  $Q$  (238). 7.7. Гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания (239). 7.8. Принцип суперпозиции (246). Задачи (246).

Дополнение 1. Точное решение задачи о колебании математического маятника (251). Дополнение 2. Ангармонический осциллятор (252). Дополнение 3. Модулирование параметров осциллятора (параметрическое усиление) (254). Математическое дополнение. Комплексные числа и гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания (256).

#### Глава 8. Элементарная динамика твердых тел . . . . . 258

8.1. Уравнения движения вращающегося тела (258). 8.2. Кинетическая энергия вращательного движения (270). 8.3. Уравнения Эйлера (274). 8.4. Прецессия спина в постоянном магнитном поле (277). 8.5. Простой гироскоп (279). Задачи (281).

<b>Глава 9. Силы, действующие по закону обратных квадратов . . . . .</b>	<b>284</b>
<p>9.1. Сила взаимодействия между материальной точкой и тонким шаровым слоем (286). 9.2. Сила взаимодействия между материальной точкой и сплошным шаром (289). 9.3. Собственная гравитационная и электростатическая энергия (290). 9.4. Характеристические длины и характеристические числа (293). 9.5. Силы, действующие по закону обратных квадратов, и статическое равновесие (296). 9.6. Орбиты планет (296). 9.7. Задача двух тел. Приведенная масса (298). 9.8. Задача о движении одного тела (303). 9.9. Законы Кеплера (311). Задачи (314).</p> <p>Дополнение 1. Теорема о вращале (318). Дополнение 2. Числовой расчет орбиты (327).</p>	
<b>Глава 10. Скорость света . . . . .</b>	<b>331</b>
<p>10.1. Скорость света <math>c</math> как одна из основных физических постоянных (331). 10.2. Измерение <math>c</math> (332). 10.3. Эффект Доплера (344). 10.4. Скорость света в инерциальных системах отсчета при относительном движении (350). 10.5. Опыты Майкельсона и Морли (353). 10.6. Инвариантность величины <math>c</math> (358). 10.7. Предельная скорость (358). Задачи (361).</p> <p>Дополнение. Излучение гамма-лучей при отсутствии отдачи (363).</p>	
<b>Глава 11. Преобразование Лоренца для длины и времени . . . . .</b>	<b>365</b>
<p>11.1. Преобразование Лоренца (366). 11.2. Сокращение длины (373). 11.3. Замедление времени, измеряемого движущимися часами (376). 11.4. Часы, движущиеся с ускорением (383). Задачи (384).</p> <p>Математическое дополнение. Пространство — время (386). Из истории физики. Одновременность в специальной теории относительности (394).</p>	
<b>Глава 12. Релятивистская динамика. Импульс и энергия . . . . .</b>	<b>399</b>
<p>12.1. Сохранение импульса (количества движения) (400). 12.2. Релятивистское выражение энергии (404). 12.3. Преобразование импульса и энергии (405). 12.4. Взаимосвязь массы и энергии (408). 12.5. Работа и энергия (412). 12.6. Частицы с массой покоя, равной нулю (414). 12.7. Преобразование скорости изменения импульса (417). 12.8. Постоянство заряда (418). Задачи (418).</p> <p>Из истории физики. Закон взаимосвязи массы и энергии (420).</p>	
<b>Глава 13. Простые задачи релятивистской динамики . . . . .</b>	<b>422</b>
<p>13.1. Ускорение заряженной частицы постоянным продольным электрическим полем (422). 13.2. Заряженная частица в магнитном поле (426). 13.3. Система центра масс и пороговая энергия (428). 13.4. Антипротонный порог (431). 13.5. Релятивистское уравнение ракеты (432). Задачи (443).</p> <p>Из истории физики. Синхротрон (435).</p>	

<b>Глава 14. Принцип эквивалентности . . . . .</b>	<b>439</b>
14.1. Инертная и гравитационная массы (439). 14.2. Гравитационная масса фотона (442). 14.3 Принцип эквивалентности (446). Задачи (446).	
Из истории физики. Маятники Ньютона (447).	
<b>Глава 15. Частицы современной физики . . . . .</b>	<b>448</b>
15.1. Стабильные и нестабильные частицы (448). 15.2. Массы (457). 15.3. Заряд (459). 15.4. Время жизни (460). 15.5. Прочие характеристики (464). 15.6. Четыре основных вида сил в природе (465). Задачи (466).	
Из истории физики. 1. Резерфордское рассеяние и ядерная модель атома (466). 2. Пузырьковые камеры (472).	
<b>Приложение. Таблица физических постоянных . . . . .</b>	<b>475</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>477</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

### ОБЩЕГО РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Мы являемся свидетелями возникновения новых отраслей физики и все более глубокого проникновения ее во все области современной науки и техники. Возникает вопрос: как при этом правильно поставить преподавание общей физики, являющейся основой мировоззрения и специальных знаний будущего ученого и инженера? Что действительно важно понять и знать и чем можно пренебречь?

Вопросы об улучшении преподавания общего курса физики часто обсуждаются, однако принимаемые решения обычно не идут дальше очередного изменения программ.

Попытка радикального решения этой проблемы была предпринята в университете г. Беркли (США, Калифорния), где в 1961 г. был создан специальный комитет из ученых, поставивших своей целью создание учебника нового типа. Первые два тома этого учебника (механика, электричество и магнетизм) вышли в 1965 г., сейчас закончено издание трех остальных томов (волны, квантовая и статистическая физика). Три небольшие книги содержат описание тридцати шести работ Берклевской физической лаборатории, идейно связанной с новым общим курсом. Создатели Берклевского курса стремились изложить в учебнике классическую физику, органически связав ее с основными идеями специальной теории относительности, квантовой физики и статистики, — и именно в этом-то и заключены основные достоинства учебника.

Курс предназначен не только для физиков, но и для будущих инженеров, химиков и биологов. Объем его значительно превосходит претензии даже физиков и оставляет поэтому как преподавателю, так и студенту большую свободу в выборе материала.

Следует отметить прекрасную организацию курса. Превосходные рисунки, большое количество задач различной трудности (часто из смежных с физикой областей), описание классических опытов и выдержки из оригинальных работ увеличивают ценность и привлекательность курса.

Инициатива перевода на русский язык Берклевского курса физики в значительной степени принадлежит проф. С. П. Капице.

Мы уверены, что Берклевский курс физики окажется интересным и полезным широкому кругу учащихся и преподавателей.

*А. И. Шальников*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА I ТОМА

Бурное развитие физики, наблюдаемое за ряд последних десятилетий, ее универсальное и руководящее проникновение в смежные с ней и даже далекие области знания (радио-, гео-, агро-, био-, астрофизика, космология, химия, медицина, техника, производство и т. д.) поставило среднюю и особенно высшую школу во всем мире перед сложнейшей проблемой новой организации преподавания этой науки.

Два обстоятельства в первую очередь затрудняют ее решение. С одной стороны, наличие огромного информационного материала и необходимость такого его отбора для преподавания и изыскания таких форм преподавания, которые обеспечили бы в заданное и относительно короткое время достаточную по широте и глубине и гармоническую в целом подготовку по общему курсу физики. С другой стороны, дополнительную трудность представляет тот глубокий разрыв, который существует во многих случаях, как в области общего, так и специального образования, между значением современной физики и уровнем подготовки по ней.

Проблема сложна и в том отношении, что разделяется на ряд задач, касающихся различных видов общей и специальной профессиональной, в том числе инженерной, подготовки.

В связи с вышеннеложенным вполне понятно то, что во всех развитых государствах, в том числе и у нас в СССР, ведутся поиски новых путей преподавания физики. Эти поиски касаются разработки новых учебных планов, программ и особенно учебников и учебных пособий.

Курс физики университета в Беркли представляет собой одну из попыток решить задачу разработки университетского курса общей физики, удовлетворяющего современным требованиям.

Университет в Беркли занимает в США одно из ведущих мест как высшее учебное заведение и научно-исследовательский центр страны. Это в первую очередь относится к такой науке, как современная физика. Общеизвестно, что именно в Беркли за последний период развития физики был сделан ряд фундаментальных открытий и именно в Беркли работает целая плеяда выдающихся физиков.

Коллектив физиков во главе с Чарльзом Киттелем, создавший пятитомный «Курс физики», не нуждается в рекомендациях. Первый том, содержащий физические основы механики, вышел в 1965 г. и сразу же нашел признание как в США, так и в Европе.

Книга отчетливо разделяется на две части: классическую и релятивистскую. Изложение, однако, ведется так, что читатель еще в первой части вплотную подводится к изучению специальной теории относительности (релятивистское изменение длины, времени, закон  $E=mc^2$ ).

Привлеченный авторами иллюстрационный материал весьма широк по своей тематике. Пожалуй, одной из характерных черт I тома является то, что в качестве иллюстраций, примеров и задач

широко используются материалы астрофизики, астрономии, космологии, атомной и ядерной физики и в значительно меньшей мере обычный классический инвентарь «теоретической механики». Авторы не боятся затрагивать самые деликатные и сложные проблемы современной физики и нигде не уходят от прямых ответов на них. Во многих случаях делается это с большим педагогическим мастерством и тактом. Читатель, несомненно, найдет много интересного, нового и оригинального как в манере изложения материала, так и в нем самом.

Чтение книги требует, однако, некоторой предварительной подготовки по физике в объеме обстоятельного среднешкольного курса физики. По замыслу авторов, такой базой ими принят (как ясно видно по ряду ссылок) курс физики для средней школы, широко используемый ныне в Америке и Европе, созданный большой группой физиков Массачусетского технологического института \*).

Перевод книги, за редкими исключениями, не доставил переводчикам (физикам по специальности) особых трудностей.

Работа по переводу была распределена следующим образом: вводные разделы — А. С. Ахматов, гл. 1—4 и 9—11 — А. Ю. Кошевник, гл. 5—8 — М. М. Кусаков, гл. 12—15 — Д. М. Толстой.

Книга в первую очередь адресована студентам университетов, аспирантам и преподавателям вузов. Авторы считают, что и подготовку инженеров по общему курсу физики следует вести по разработанному ими учебнику (в сокращенном его варианте).

Думается, что «Курс физики», т. I привлечет читателей и других категорий, стремящихся ознакомиться с физическими основаниями механики в их современном весьма квалифицированном и строгом изложении и все же доступном для мало-мальски подготовленного читателя.

*А. С. Ахматов*

---

\*) «Физика», пер. с англ. под ред. А. С. Ахматова, «Наука», 1965.

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К БЕРКЛЕЕВСКОМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Одной из актуальнейших проблем, возникших в настоящее время перед университетами, является проблема обучения студентов младших курсов. Наряду с тем, что преподавательский коллектив все больше увлекается исследовательской работой, начинает все чаще проявляться (как говорил философ Сидней Хук) «смутная неудовлетворенность учебным процессом». Возникающее благодаря исследовательской работе изменение содержания и структуры знаний создает во многих областях науки настоятельную необходимость в пересмотре учебного материала. Разумеется, это особенно верно в отношении физических наук.

Поэтому мы испытываем чувство удовлетворения, снабжая предисловием курс физики и лабораторный практикум, составленный университетом в Беркли. Как нам кажется, этот курс представляет собой удачный пересмотр учебного материала, предназначенного для студентов младших курсов, пересмотр, отражающий те грандиозные перемены, которые произошли в физике за последние сто лет. В составлении курса принимали участие многие физики, работающие в самых передовых областях исследования. Составителям курса была оказана поддержка Национального фонда науки в виде субсидии, предоставленной Корпорации служб образования. Курс был успешно испытан в течение нескольких семестров на младших курсах физического факультета Калифорнийского университета в Беркли. Курс представляет собой заметное достижение в области образования, и, как я надеюсь, он будет широко использован на практике.

Калифорнийский университет был рад служить местом работы межвузовской группы, разрабатывавшей данный курс и лабораторный практикум; университет доволен и тем, что большое число студентов Беркли добровольно участвовало в практической проверке курса. Большую помощь оказала нам финансовая поддержка Национального фонда науки, согласованная с Корпорацией служб образования. Наиболее приятным является, естественно, живой интерес к проблемам преподавания, проявленный подавляющим числом работников университета, участвовавших в реализации данной программы. Традиция «ученый — учитель» является давней и почетной; работа над новым физическим курсом и лабораторным



практикумом показывает, что традиция эта по-прежнему уважается в Калифорнийском университете.

Данный учебник представляет собой двухгодичный курс общей физики, предназначенный для студентов, специализирующихся в области исследовательской работы, а также и для будущих инженеров. Авторы желали представить классическую физику — насколько это возможно — в том виде, в каком она используется физиками-профессионалами, работающими на «переднем крае» исследований. Мы пытались создать курс, который бы акцентировал основные положения физики. Нашей особой задачей было естественное введение в курс классической физики идей специальной теории относительности, квантовой физики и статистической физики.

Курс предназначается для любого студента, изучавшего физику в средней школе. Математика, включающая математический анализ, должна проходиться одновременно с данным курсом.

В настоящее время в США создается несколько новых курсов физики. Мысль написать новый курс физики овладевает многими учеными-физиками, с одной стороны, благодаря успехам развития естественных и прикладных наук, с другой стороны, под влиянием того возросшего интереса к науке, который теперь существует в средней и высшей школе.

Основные идеи данного курса были сформулированы Ф. Моррисоном из Корнелльского университета и Ч. Киттелем во время обсуждения, имевшего место в конце 1961 г. Мы пользовались поддержкой Дж. Мэйса и его коллег из Национального фонда науки и У. Мишеля, тогдашнего председателя комиссии по преподаванию физики в колледжах.

Для ведения работы на первых стадиях был создан неофициальный комитет, в который вначале входили: Л. Альварец, У. Фреттер, Ч. Киттель, У. Найт, Ф. Моррисон, Э. Парселл, М. Рудерман и Дж. Захариас. Комитет впервые собрался в мае 1962 г. в Беркли; в это время им и была намечена предварительная принципиально новая схема построения курса физики. Ввиду занятости некоторых членов комитета его состав был изменен в январе 1964 г., и ныне комитет состоит из авторов настоящего учебника. Вклад других участников отмечен в предисловии к отдельным томам.

Предварительный план и его концепции оказали большое влияние на окончательную разработку материала курса. План раскрывал в деталях темы и их соотношения, которые, как мы полагаем, должны и могут быть преподнесены студентам начальных курсов, специализирующихся по исследовательскому либо инженерному профилю. В наши намерения никак не входило создавать курс, предназначенный лишь для одаренных студентов или студентов, прошедших предварительную подготовку. Мы намеревались представить принципы физики с единой и необычной точки зрения, и потому отдельные части курса могут показаться новыми не только студентам, но и преподавателям.

Пять томов курса включают следующие разделы:

- I. Механика (Киттель, Найт, Рудерман).
- II. Электричество и магнетизм (Парселл).
- III. Волны (Крауфорд).
- IV. Квантовая физика (Вихман).
- V. Статистическая физика (Рейф).

Авторы каждого тома были свободны выбирать стиль и метод изложения, которые казались наиболее подходящими для их предмета. Первоначальная разработка данного курса привела А. Портиса к мысли о создании нового практикума по классической физике, ныне известного как Берклеевская физическая лаборатория.

Может показаться, что в нашем курсе, излагающем основы физики, эксперименту уделено недостаточное внимание. Дело, однако, в том, что важнейшие эксперименты выполняются в лаборатории, которая создана специально для того, чтобы дополнить курс лекций.

<i>Ю. Комминс,</i>	<i>Э. Парселл,</i>
<i>Ф. Крауфорд-младший,</i>	<i>Ф. Рейф,</i>
<i>У. Найт,</i>	<i>М. Рудерман,</i>
<i>Ф. Моррисон,</i>	<i>Э. Вихман,</i>
<i>А. Портис,</i>	<i>Ч. Киттель, председатель</i>

Беркли, Калифорния

## ПРЕДИСЛОВИЕ К I ТОМУ

Темой этого тома Берклеевского курса физики является классическая механика. Наш метод, не будучи радикальным, отличается, однако, от метода многих учебников в нескольких аспектах:

1. Выводы специальной теории относительности изложены детально. Основные результаты этой теории имеют существенное значение для разработки темы «Электричество и магнетизм» в т. II.

2. Мы особое внимание уделили движению заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Этот раздел богат несложными и в то же время очень важными приложениями и непосредственно связан с теми экспериментами, которые в свое время были осуществлены в Берклеевской физической лаборатории.

3. Мы старались изложить курс классической механики таким образом, чтоб стали ясны пути, ведущие к другим разделам физики, к астрономии, геофизике и (насколько мы смогли) к химии и биофизике.

В этот раздел включено также большое число астрономических проблем и примеров.

4. Мы пытались рассматривать вопросы так, как их рассматривало бы большинство физиков, надеясь тем самым пробудить у студентов как можно раньше способности к самостоятельным методам научного исследования и мышления. Мы уделяли большое внимание оценке порядка величины и анализу размерностей.

5. Мы предусмотрели (в виде более сложных тем в конце глав) важный дополнительный материал для наиболее одаренных студентов.

Первый вариант этого тома, написанный М. Рудерманом, был использован экспериментальной студенческой группой в Беркли весной 1963 г. Затем он был отредактирован Ч. Киттелем при помощи У. Найта. Мы извлекли пользу из критических замечаний Ф. Моррисона, Э. Парселла, А. Гельмгольца, А. Фридмана, А. Кауфмана, У. Ниренберга и других. Множество рисунков, которые составляют неотъемлемую часть тома, были созданы Ю. Комминсом и окончательно оформлены Ф. Купером. Второй вариант этого тома был использован экспериментальными студенческими группами в Беркли и Мэриленде осенью 1963 г., а после переработки — стандартными

группами, состоящими из 230 студентов в Беркли и 45 студентов в Техасском университете, весной 1964 г. Хорошие отзывы студентов, разумеется, были ощутимой поддержкой для порядком уставших авторов. Переработанный второй вариант был вновь значительно пересмотрен летом 1964 г.

Том в целом рецензировал С. Пастернак; эта рецензия явилась причиной значительного улучшения текста. Р. Мак-Феррон, Х. Оганьян, А. Фельцер, Р. Киришман и другие оказали нам помощь в составлении задач; М. Россман подготовил вспомогательные материалы. За литературную редакцию мы выражаем благодарность Т. Паркинсону. По вопросам геофизики мы с благодарностью выслушали советы Дж. Верхугена, Б. Болта и Дж. Рейнольдса; по астрономии — П. Ходжа; по биофизике — Р. Виллиамса, Д. Стента, В. Филлипса и Х. Чечмена. Мы благодарим также своих помощников за подбор учебных фильмов, фотографий, сносков, ответов к задачам, а также за организацию «обратной связи» со студентами и ассистентами во время третьего испытания материала учебника.

*Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман*

## УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

Мы умышленно включили в т. I больше материала по сравнению с обычным объемом обязательных лекций по общей физике для студентов первого курса. В Калифорнийском университете в Беркли содержание этого тома излагалось в 1963—1964 гг. в течение одного семестра, состоявшего из 15 недель, при трех лекциях и одном теоретическом семинаре в неделю, причем лекции и семинары имели продолжительность по 50 минут. Нашими студентами были первокурсники второго семестра, проходившие в течение предыдущего семестра математику, курс которой не был специально рассчитан на изложение всех математических вопросов, нужных для преподавания физики. Нижеследующие советы были сформулированы в результате нашего первого опыта преподавания по этой программе, сопровождавшегося широким общением преподавателей со студентами.

Важное условие, определяющее план изложения первой части нашего курса, посвященной механике, состоит в том, что *в этой части курса должны быть подробно изучены лоренцевы преобразования пространства и времени (гл. 11) и импульса и энергии (гл. 12) как необходимая предпосылка для изложения теории электричества и магнетизма в т. II*. По нашему мнению, прохождение курса должно достигнуть гл. 10 до того, как истекнут две трети всего учебного времени, даже если для этого придется пропустить кое-что из материала, находящегося в предыдущих главах.

Некоторые темы (например, волны и теплота), обычно излагаемые в первой части курса общей физики, были перенесены в тт. III и V. Дополнения к главам, а также математические дополнения не обязательны, за исключением тех случаев, где оговорено обратное. Большинство студентов прочтет заметки «Из истории физики», не дожидаясь специального указания преподавателя.

По нашим наблюдениям за восприятием материала студентами, особенно важным элементом успешного преподавания этого курса являются теоретические семинары. Возможно, что еженедельное проведение двух лекций с двумя семинарами для опроса студентов окажется более эффективным, чем система «три и один», которой мы придерживались. Лекции должны сопровождаться демонстрациями. Студенты высказывают мнение, что лекции должны не

повторять рассуждения учебника слово в слово, а излагать предмет другими словами, разъяснять и резюмировать материал.

**Примеры, задачи и дополнения.** В тексте разбирается много *примеров*; большинство из них необходимо для изложения курса, и их следует читать как часть текста. В конце каждой главы содержатся *задачи*, назначение которых состоит в том, чтобы дать студенту возможность практически применить те основные положения, которые рассматривались в этой главе. Обычно в начале каждой группы задач даются более легкие задачи. К значительной части задач даны ответы. *Дополнения* к главам подобраны так, чтобы вести более успевающего студента в новые области физической науки или как-то иначе использовать методы, изложенные в главе.

**Математические дополнения.** Некоторые главы сопровождаются дополнительными данными по математике, назначение которых — помочь студенту разобраться в математических вопросах, возникающих в ходе изучения им физики, но еще не разобранных в курсах математики. Мы без колебаний рекомендуем студентам пользоваться математическими справочниками, стремясь таким образом уменьшить объем сведений по математике, даваемых в тексте.

**Сведения из истории физики.** Ко многим главам т. I даются небольшие заметки под заголовками «Из истории физики». Некоторые из них представляют собой отрывки из одной или двух оригинальных научных работ, содержащих первые открытия в данной области физики. Приводя эти отрывки, мы намеревались, прежде всего, показать, насколько ясность, энергия и смелость мысли характерны для великих открытий и исследований. Наиболее ясной работой в данной области обычно является первоисточник, и может оказаться, что он остается единственным материалом, позволяющим читателю уяснить себе мотивы нового подхода к изучаемому предмету. Смелость мышления, проявляющаяся как отсутствие боязни введения новых идей, играет исключительно важную роль в исследовательской работе. Другая наша цель состояла в том, чтобы побудить студента к ознакомлению с оригинальной литературой по физике.

**Глава 1 (Введение).** Эта глава является совсем легкой для чтения. Дополнение «Простая астрономия Солнечной системы» особенно интересно для студентов; его можно использовать вместо задач. Лектор может с пользой провести обсуждение вопросов порядка величин, начиная с атома и кончая Вселенной.

**Глава 2 (Векторы).** Эта глава также нетрудна для преподавания. В нее введены формулы для производных синуса и косинуса, так как они применяются в гл. 3. Преподавателю следует или договориться с кафедрой математики, чтобы эти формулы своевременно были объяснены студентам, или же дать это объяснение самому. Очень полезные лекционные демонстрации, иллюстрирующие, что силы и скорости складываются векторно, а также показывающие, что такое момент силы.

Глава 3 (Принцип относительности Галилея). В минимальном варианте программы не обязательно излагать теорию ускорения Кориолиса, рассматриваемую в дополнении к этой главе. При анализе частного случая — сил, действующих на материальную точку, покоящуюся относительно вращающейся системы отсчета, — надо вывести формулу центростремительного ускорения, которая используется ниже в нескольких местах этого тома. Хороший демонстрационный опыт состоит в том, что металлический шарик погружается в краску и затем проецируется через вращающийся диск с отверстиями.

Глава 4 (Простые задачи нерелятивистской динамики). Хотя рассматриваемые здесь вопросы элементарны, нельзя торопиться, излагая эту главу. Ее материал вызывает у части студентов значительные затруднения временного характера, потому что им почти впервые приходится применять математику к физике. Убедительным доводом в пользу раннего изложения этого материала является его значение для лабораторных работ по физике, проводимых в Калифорнийском университете. Поскольку в средней школе уже изучалось движение тел в поле сил тяготения, *следует обратить внимание студентов на аналогии между этим движением и движением заряженных частиц под действием электрических и магнитных сил.* Термин «поле» наводит на студентов панику, подобно термину «проза» при изучении родного языка. В минимальном варианте программы по механике нет надобности оперировать с комплексными числами. В лекционные демонстрации можно включить прямолинейное ускоренное движение, равномерное круговое движение, виды волн (пользуясь проекционным осциллографом) и качение колеса.

Глава 5 (Сохранение энергии). Материал этой главы совершенно стандартный. Различие между внешними силами и силами взаимодействия, т. е. внутренними силами, вначале может вызвать некоторое замешательство, которое устраняется путем решения нескольких задач на доске. В демонстрации входят пружины и маятники. Понятие об интеграле по контуру можно не давать.

Глава 6 (Сохранение импульса \*) и момента импульса). Задачи на удар и на движение спутника заслуживают подробного обсуждения. Можно вывести уравнения Резерфорда для рассеяния частиц (их решение дано в гл. 15). Примеры из астрономии заинтересуют более любознательных студентов, однако в минимальной программе их можно не давать. В демонстрации входят игрушечные ракеты, баллистический маятник, скамья Жуковского.

Глава 7 (Гармонический осциллятор). Очень важны линейные задачи и, в частности, задача о вынужденных колебаниях гармони-

---

\*) Английский термин «momentum» (angular momentum) по своему смыслу может обозначать или «количество движения», или «импульс». Поскольку, однако, в английском языке нет эквивалента термину «количество движения» (все реже применяемому и у нас), то было принято решение при переводе настоящей книги всюду пользоваться термином «импульс». (Прим. ред.)

ческого осциллятора. Даже в объеме минимальной программы необходимо разобрать первый из трех примеров нелинейных задач, потому что он дает студентам понятие о том, как они могут оценить ошибки, обусловленные линеаризацией задачи о колебаниях маятника. Понятие о сдвиге фаз при вынужденных колебаниях гармонического осциллятора не сразу воспринимается большинством студентов. Здесь помогает хорошая лекционная демонстрация. Электрические аналогии плохо воспринимаются на этой стадии преподавания, и их, может быть, следовало бы оставить для лабораторных работ. В демонстрации входят гармонические колебания камертонов (следует усилить их, чтобы звук был хорошо слышен, а также показать форму волны на экране); вынужденные колебания груза на пружине; задаваемые генератором сигналов вынужденные электрические колебания контура, состоящего из сопротивления, индуктивности и емкости; прибор Прингсхейма; колебания связанных осцилляторов.

Глава 8 (Элементарная динамика твердых тел). В курс, преподаваемый по минимальной программе, эту главу можно не включать. В демонстрации входят: гироскоп, ядерный магнитный резонанс или электронный парамагнитный резонанс и опыты с колесом и осью.

Глава 9 (Силы, действующие по закону обратных квадратов). Задачу о планетных орбитах легко можно изложить в том виде, как она дана в тексте. Это классическая задача классической механики. Ее следует пропустить, если уже использованы две трети всего учебного времени. В демонстрации входят: опыт Кэвендиша; движение массы на пружине по горизонтальной траектории с уменьшающимся радиусом; иллюстрация динамического метода определения положения центра масс с помощью вращения гантели, представляющей собой модель системы Земля — Луна.

Глава 10 (Скорость света). Эта глава предназначена главным образом для самостоятельного чтения. Не надо уделять чрезмерное внимание обсуждению эффекта Доплера. В задачах делается упоминание на астрономические явления. Целесообразно продемонстрировать опыт по определению скорости света; если возможно, то эффект Доплера по Мёссбауэру; показать интерферометр.

Глава 11 (Преобразование Лоренца для длины и времени). Эта глава особенно важна. Преподавать ее оказалось неожиданно легко. Следует уделить время решению ряда задач. Кратко напомните сказанное в гл. 3 (и гл. 4) о преобразованиях координат. Постоянно подчеркивайте инвариантность величины  $c$ . Разберите опыт Айвса и Стилуэлла.

Глава 12 (Релятивистская динамика. Импульс и энергия). В гл. 12 и 13 даются наиболее важные результаты специальной теории относительности. Заметка «Из истории физики» о соотношении между массой и энергией независима от содержания главы и легко воспринимается. Обсудите на семинаре устройство отклоняющих систем для пучков заряженных частиц и эксперименталь-



ные детали опытов Бухерера по поперечному импульсу; покажите диапозитивы со снимками пузырьковой камеры.

Глава 13 (Простые задачи релятивистской динамики). Рассматриваемые задачи несложны, и их решение поможет студенту освоиться со специальной теорией относительности.

Глава 14 (Принцип эквивалентности). Особых трудностей здесь нет. Обсудите на семинаре детали опыта Паунда и Ребки.

Глава 15 (Частицы современной физики). Краткое обсуждение основных фактов о наиболее важных частицах.

**Об экзаменах.** Необходимо дать студентам точные указания о том, какой материал требуется знать на экзаменах; иначе они могут растеряться из-за обилия вспомогательных данных, приведенных в тексте. Некоторые разделы этого курса менее знакомы студентам и могут показаться им более трудными, чем вопросы, проходимые также во многих элементарных курсах. Это надо учесть на экзаменах, делая больше упор на простые, чем на сложные и запутанные вопросы, потому что даже экзамен имеет целью обучение физике, а не испытание сообразительности студента \*).

## УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Первый год изучения физики в высшей школе является, пожалуй, наиболее трудным. В течение этого года излагается гораздо больше новых идей, представлений и методов, чем на последующих курсах. Студент, четко усвоивший основы физики, изложенные в этом первом томе, даже если он еще не в состоянии свободно применять их в сложных случаях, может считать, что оставил позади себя большинство трудностей, возникающих при изучении этого предмета.

А что делать тому студенту, которому трудно дается решение задач и понимание различных разделов этого курса даже после того, как он прочитал текст дважды? Во-первых, ему надо вернуться к ранее пройденному и вновь прочитать соответствующие места в своем школьном учебнике физики, а также углубленно проработать учебник, выпущенный комитетом содействия изучению физики \*\*). Затем, ему полезно почитать какую-либо из многих книг на уровне курса физики для высшей школы, которые проще и элементарнее, чем наш курс; особое внимание он должен обратить на упражнения, даваемые в этих учебниках.

---

\*) Последний тезис, по-видимому, является спорным, так как многие считают, что обучение физике складывается из всестороннего содействия накоплению знаний и, что не менее важно, развитию у студентов физического образа мышления, который можно назвать специфическим видом «сообразительности». (Прим. ред.)

\*\*\*) «Физика», пер. с англ. под ред. А. С. Ахматова, «Наука», 1965. (Прим. ред.)

## СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ

Е д и н и ц ы. Каждая оформившаяся отрасль науки и техники имеет свои специальные единицы для величин, которые часто в ней встречаются. На западе США привычной единицей объема для инженера-ирригатора, фермера или адвоката является акро-фут\*). Для специалиста по ядерной физике привычной единицей энергии служит *Мэв*, или *миллион электрон-вольт*; для химика единицей энергии служит *килокалория*, а для инженера-энергетика — *киловатт-час*. Физик-теоретик зачастую скажет просто так: «Выберем систему единиц таким образом, чтобы величина скорости света равнялась в ней единице». В ходе работы ученый не тратит много времени на перерасчет из одной системы единиц в другую; в своих расчетах он уделяет гораздо больше внимания уточнению числовых значений коэффициентов и определению знаков слагаемых. Точно так же он не будет тратить время на споры относительно выбора системы единиц, потому что такие споры никогда не способствовали развитию настоящей науки.

Физики используют для работы и публикаций главным образом три системы единиц: гауссову систему СГС, систему МКС и практическую систему. Любой ученый и инженер, который хочет получить доступ к научной литературе по физике, должен освоиться со всеми тремя системами \*\*).

В настоящем курсе применяется гауссова система единиц СГС. В лабораторных работах используются все три системы. Это реше-

---

\*) 1 акро-фут равен 1233,5 м<sup>3</sup>. (Прим. ред.)

\*\*\*) На основе систем единиц МКС и практической разработана международная система единиц СИ, утвержденная в 1960 г. XI Генеральной конференцией по мерам и весам и рекомендованная, согласно ГОСТ 9867-61, для предпочтительного применения в СССР во всех областях науки, техники, народного хозяйства, а также при преподавании.

Комиссией ЮНЕСКО по символам, единицам и номенклатуре опубликована («Symbols, units and nomenclature in Physics», Ed. by UNESCO, Paris) брошюра, в которой тщательно собраны и рекомендованы для использования в международном порядке все основные данные по символам и обозначениям величин, физической терминологии на английском и французском языках, системам единиц и числовым значениям фундаментальных физических констант. (Прим. ред.)

ние было единогласно принято авторами, и оно соответствует нашей цели представить физику в таком виде, как она применяется большинством физиков. Любому, кто имеет дело с современными физическими журналами, ясно, что гауссова система СГС используется в физических статьях значительно чаще, чем любая другая система единиц.

В нашем курсе физики мы хотим, насколько возможно, облегчить как научным работникам, так и инженерам труд чтения физических журналов.

**Физические постоянные.** В приложении к этому тому дана таблица приближенных значений физических постоянных и других нужных числовых величин. Более точные значения физических постоянных приведены в журнале «Physics Today» («Современная физика»), 1964, февраль, стр. 48—49.

**Знаки и обозначения.** Вообще говоря, мы стремились придерживаться тех обозначений и сокращений названий единиц, которые приняты в литературе по физике. Относительно большинства из них имеется международное соглашение. В некоторых случаях по методическим соображениям оказалось целесообразным нарушить это условие.

Мы указываем здесь смысл нескольких знаков, которые применяются во всем курсе без объяснений:

- = равно,
- $\cong$  почти равно,
- $\equiv$  тождественно равно,
- $\propto$  пропорционально,
- $\approx$  приблизительно равно,
- $\sim$  имеет такой же порядок величины.

Применение знаков  $\approx$ ,  $\cong$  и  $\sim$  не является общепринятым, но данные здесь определения довольно широко используются физиками. Американский институт физики рекомендует применять знак  $\approx$ , где другие могли бы написать  $\approx$  или  $\cong$ .

Знак  $\sum_{j=1}^N$  или  $\sum$  означает суммирование величины, стоящей справа от  $\sum$ , по всем индексам от  $j=1$  до  $j=N$  включительно.

Обозначение  $\sum_{i, j}$  означает двойное суммирование по двум индексам  $i$  и  $j$ .

Обозначение  $\sum'_{i, j}$  или  $\sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}}$  означает суммирование по всем значениям  $i$  и  $j$ , за исключением  $i=j$ .

**Порядок величины.** Под этим выражением мы обычно подразумеваем «в пределах от данного значения до значения, в 10 раз большего». Свободная и четкая оценка порядка величины характерна для стиля работы и языка ученого-физика. Это исключи-

тельно важная профессиональная привычка, хотя она часто подвергается в растерянность начинающих студентов. Мы говорим, например, что  $10^4$  — это порядок величины чисел 5500 и 25 000. Порядок величины массы электрона в системе единиц СГС составляет  $10^{-27}$  г; ее точное значение равно  $(0,91072 \pm 0,00002) \cdot 10^{-27}$  г.

Иногда мы говорим, что в решение задачи входят слагаемые (или решение получено с точностью до слагаемых этого порядка величины) порядка  $x^2$  или  $E$ , каким бы ни было это количество. Это записывается так же, как  $O(x^2)$  или  $O(E)$ . При таком способе выражения подразумевается, что для определенных целей можно пренебречь в точном решении слагаемыми, содержащими более высокие степени (например,  $x^3$  или  $E^2$ ) этого количества, по сравнению с теми слагаемыми, которые сохраняются в приближенном решении.

## ГЛАВА I

### ВВЕДЕНИЕ

#### 1.1. Окружающий нас мир

Окружающий мир представляется людям огромным и сложным. Это своего рода гигантская арена, на которой разыгрываются события самого различного масштаба. Интересно познакомиться с числовыми значениями некоторых величин, характеризующих Вселенную. Мы не будем сейчас подробно останавливаться на доказательствах и измерениях, которые позволили определить называемые здесь числа. Самое замечательное в этих числах — это то, что мы их вообще знаем; не имеет решающего значения, что некоторые из них мы знаем только приближенно.

*Огромные размеры Вселенной.* Из астрономических наблюдений мы заключаем, что величина порядка  $10^{28}$  см, или  $10^{10}$  световых лет, — это характеристическая длина, которую нестрого называют иногда радиусом Вселенной. Для сравнения укажем, что расстояние Земли от Солнца равно  $1,5 \cdot 10^{13}$  см, а радиус Земли равен  $6,4 \cdot 10^8$  см.

*Число атомов в известной нам части Вселенной.* Ядра атомов всех элементов состоят из протонов и нейтронов. Ученые предполагают, что общее число протонов и нейтронов в известной нам части Вселенной, определенное с неточностью, может быть, раз в 100, имеет порядок  $10^{80}$ . В состав Солнца входит около  $1 \cdot 10^{57}$  протонов и нейтронов, а в состав Земли — около  $4 \cdot 10^{51}$ . Общее число протонов и нейтронов в известной нам Вселенной достаточно для того, чтобы образовать около  $10^{80}/10^{57}$ , т. е. около  $10^{23}$ , звезд с массой, равной массе нашего Солнца (это составляет одну шестую «моля звезд»). Ученые считают, что большая часть массы Вселенной — это масса звезд и что все известные звезды имеют массы, находящиеся между 0,01 — 100-кратной массой нашего Солнца.

*Жизнь — наиболее сложное явление во Вселенной.* Человек, одно из наиболее сложно устроенных живых существ, состоит примерно из  $10^{16}$  клеток. Клетка представляет собой элементарную физиологическую ячейку, содержащую  $10^{12}$  —  $10^{14}$  атомов. В любую клетку любого живого организма входит хотя бы одна длинная молекуляр-

ная нить ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты). Нити ДНК в клетке являются носителями всех химических данных, составляющих генетическую информацию, необходимую для формирования целого организма человека или птицы, бактерии или дерева. В молекуле ДНК, которая состоит из  $10^8$ — $10^{10}$  атомов, точное взаимное расположение атомов может изменяться от индивидуума к индивидууму; тем более, оно всегда изменяется при переходе от вида к виду \*).

Неживая материя также существует во многих формах. Сочетания протонов, нейтронов и электронов образуют около ста различных химических элементов и около тысячи известных изотопов. Индивидуальные элементы соединяются в различных соотношениях, образуя, может быть,  $10^6$  или больше разных идентифицированных химических соединений, и к этому числу можно добавить огромное количество жидких и твердых растворов и сплавов различного состава, имеющих самые разнообразные физические свойства.

Экспериментальные науки предоставили нам возможность познать все эти данные о природе: классифицировать звезды и определить их массы, состав, расстояния до нас и скорости; классифицировать виды живых существ и расшифровать их генетические соотношения; синтезировать неорганические кристаллы, биохимические вещества и новые химические элементы; измерить частоты линий спектров испускания атомов и молекул, находящиеся в интервале от 100 до  $10^{20}$  *гц*; наконец, создать в лабораторных условиях новые элементарные частицы.

Эти огромные успехи экспериментальных наук были достигнуты учеными с самыми различными чертами характера: среди них были люди терпеливые и настойчивые, догадливые и изобретательные, энергичные и удачливые; встречались также люди с ограниченными способностями, но имеющие искусные руки. Некоторые из них предпочитали пользоваться только простыми приборами; другие разработали или изготовили приборы, обладающие большой точностью или огромными размерами, или приборы, отличающиеся своей сложностью. Только немногие общие черты объединяют большинство этих людей: они были честны перед наукой и действительно выполнили описанные ими наблюдения, а результаты своей работы опубликовали в такой форме, которая дала другим исследователям возможность повторить их опыты или наблюдения.

Итак, хотя окружающий нас мир действительно огромен и сложен, но по мере того, как развивались научные теории, многие его особенности стали выглядеть для нас значительно проще и понятнее. Мы уже достигли понимания большого числа принципиальных и важных законов природы. В частности, о ряде областей физической

---

\*) Термин *вид* можно приблизительно определить так: два множества особей относятся к различным видам, если между ними можно найти какие-либо поддающиеся описанию различия (или различие) и если они не скрещиваются в природных условиях. На нашей планете описаны и получили наименования более  $10^8$  биологических видов.

науки можно сказать, что мы понимаем рассматриваемые в них явления. Некоторые из этих разделов физики перечисляются ниже. Вместе с теорией относительности и статистической механикой их можно отнести к числу величайших достижений человеческого ума.

1. Законы классической механики, излагаемые в т. I, дают нам возможность рассчитывать с исключительной точностью движение различных тел Солнечной системы (включая кометы и астероиды); знание этих законов позволило предсказать существование новых планет и открыть их. Эти законы подсказывают нам, как могли образоваться звезды и галактики, вместе с законами излучения они дают хорошее объяснение наблюдаемой связи между массой и яркостью звезд. Астрономические применения законов классической механики — это наиболее красивые, но не единственные примеры их успешного применения. Мы постоянно используем эти законы в повседневной жизни и в технических науках.

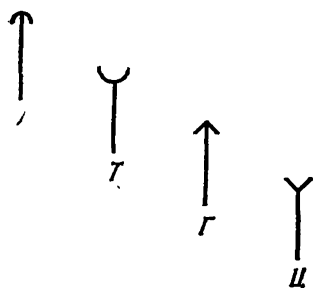
2. Законы квантовой механики (т. IV) дают очень хорошее представление о характере явлений атомного масштаба. Для простых атомов предсказания, сделанные на основании этих законов, согласуются с опытными данными с точностью до одной стотысячной, а иногда и лучше. Если применять законы квантовой механики к крупномасштабным земным или космическим явлениям, то они окажутся с отличной точностью тождественными законам классической механики. В принципе квантовая механика представляет собой надежную теоретическую основу для всей химии, металлургии и значительной части физики; но зачастую мы не в состоянии довести до конца решение ее уравнений с помощью уже имеющихся (или даже более совершенных) вычислительных машин.

В некоторых областях физики почти все задачи представляются в настоящее время настолько сложными, что даже их теоретический анализ, основанный на общих принципах квантовой механики, оказывается чересчур трудным.

3. Законы классической электродинамики отлично описывают все особенности электрических и магнитных явлений, за исключением явлений атомного масштаба. Классическая электродинамика является теоретической основой электротехники и техники средств связи. Закономерности электрических и магнитных явлений атомного масштаба точно описываются квантовой электродинамикой. Классическая электродинамика излагается в тт. II и III; некоторые вопросы квантовой электродинамики затрагиваются в т. IV, а более полное обсуждение ее отложим до изучения специального курса.

4. В качестве более частного примера из другой области науки укажем, что в настоящее время, по-видимому, становится понятным действие генетического кода, и мы обнаружили, что запас информации в клетке простого организма превосходит запас информации в лучших современных серийных вычислительных машинах. Этими вопросами занимается молекулярная биология; ею установлено, что в течение почти всей жизни нашей планеты кодирование генетической информации в молекуле ДНК целиком выполняется линей-

ной последовательностью четырех различных молекулярных групп, являющихся производными органических оснований аденина, тимина, гуанина и цитозина (рис. 1.1). Вся генетическая информация в клетке содержится в том порядке, в котором чередуются эти нуклеотидные основания. Нам здесь не интересуют их химические формулы, и мы можем обозначить их соответственно *A*, *T*, *G* и *C*. Важно то, что при биологическом воспроизведении молекулы ДНК элемент *A* в старой, т. е. родительской, нити может удобно поместиться только против элемента *T* в новой, дочерней нити; подобно этому элемент *G* может комбинироваться только с элементом *C*. Если мы напишем в строчку произвольные комбинации четырех букв *A*, *T*, *G*, *C*, то принцип комбинирования пар *A* — *T* и *G* — *C* дает нам определенные однозначные указания о том, как должна быть написана вторая строчка:



*T A C G A A C T T A T C G C A A*  
*A T G C T T G A A T A G C G T T*

Рис. 1.1. Схематическое изображение четырех нуклеотидных оснований, из которых строится молекула ДНК. *A* — аденин; *T* — тимин; *G* — гуанин; *C* — цитозин.

Такие «строчки» в молекулах ДНК содержат до  $10^8$  элементов, а для клетки столь сложного организма, как человеческий, — может быть, до  $10^9$  элементов.

По своему характеру физические законы и теоретические соображения, приведенные в этих примерах (рис. 1.2—1.6), отличаются от непосредственных результатов экспериментальных наблюдений. Законы, обобщающие наиболее существенные черты большого числа наблюдений, дают нам возможность успешно делать некоторые прогнозы, ограниченные на практике сложностью изучаемых систем. Часто физические законы наводят на мысль о постановке новых, и притом необычных, опытов. Хотя эти законы можно сформулировать в компактном виде\*), их применение иногда требует длительного математического анализа и кропотливых вычислений.

У основных физических законов есть такая особенность: те законы, смысл которых мы уже вполне понимаем, отличаются замечательным изяществом и простотой\*\*). Это утверждение вовсе не

\*) Первая фраза в аннотации на обороте суперобложки книги Р. Фейнмана «Теория фундаментальных процессов» (R. Feynman, Theory of Fundamental Processes, New York, 1961) гласит: «Эти лекции охватят всю физику».

\*\*) Выдающийся физик-теоретик Дирак писал: «По-видимому, если ученый исходит из стремления достигнуть изящества своих уравнений и если он действительно обладает ясной интуицией, то этот человек находится на верном пути к успеху» (P. A. M. Dirac, Sci. American 208, 45 (1963)).

Однако, за исключением таких величайших умов нашего времени, как Эйнштейн или Дирак и дюжина других, большинство физиков считает, что материальный мир устроен слишком сложно, чтобы оправдывались такие дерзкие обобщения. Для тысяч простых смертных этот метод не всегда применим, так как «ясная интуиция» неравномерно распределена между людьми.



означает, что все физики должны перестать исследовать сложные явления. Напротив, физические законы, как правило, были открыты в итоге кропотливой и искусной экспериментальной работы. Сказанное

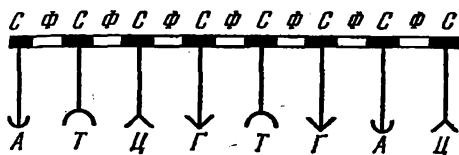


Рис. 1.2. Нуклеотиды соединяются с группами сахара С, которые в свою очередь связываются между собой фосфатными группами Ф, образуя цепь.

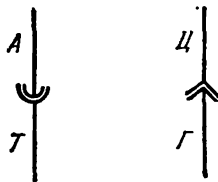


Рис. 1.3. Целая молекула ДНК состоит из двойной цепи в форме спирали. Две одиночные цепи соединяются водородными связями между группами аденина и тимина или между группами гуаннина и цитозина.

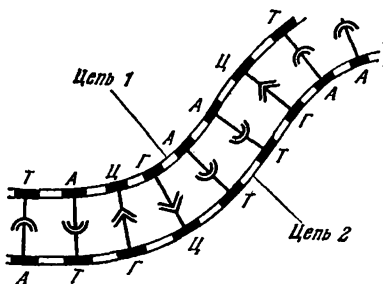


Рис. 1.4. Вся генетическая информация в клетке заключена в том порядке, в котором чередуются нуклеотидные основания.

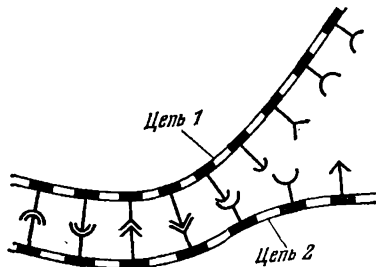


Рис. 1.5. Когда происходит деление клетки, каждая молекула ДНК расщепляется на две отдельные цепи.

выше означает только, что эстетические достоинства уже известных физических законов определяют наши ожидания в отношении формы еще неоткрытых законов. Мы были бы весьма удивлены, если бы в будущем были открыты новые принципиальные положения физической теории, которые были бы неуклюжими и нескладными высказываниями по тому или иному признаку. Мы имеем обыкновение называть гипотезу привлекательной, если она выделяется по простоте и изяществу из бесчисленного множества кажущихся разумными, но неверных теорий.

В этом курсе мы постараемся сформулировать ряд физических законов таким образом, чтобы подчеркнуть их простоту и изящество.

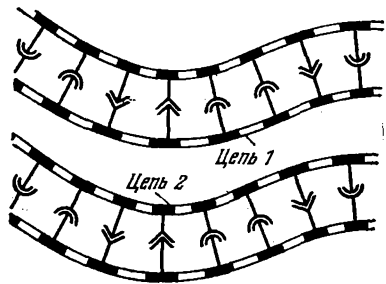


Рис. 1.6. Каждая отдельная цепь формирует свое дополнение из имеющегося в клетке вещества, так что образуются две совершенно новые молекулы ДНК.

В ходе изложения мы попытаемся также дать почувствовать «вкус» хорошей экспериментальной физики, хотя это очень трудно сделать в учебнике. Естественным местом для занятий экспериментальной физикой является не читальный зал, а исследовательская лаборатория.

## 1.2. Геометрия и физика

Язык физики — это математический язык, обеспечивающий замечательную простоту и компактность описания, необходимую для правильного изложения физических законов и их следствий. Этот язык имеет особые правила. Если следовать им, то можно будет делать только правильные утверждения, например: квадратный корень из 2 равен 1,414... или  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

Мы должны следить за тем, чтобы не смешивать такие истины с точными утверждениями относительно самого физического мира.

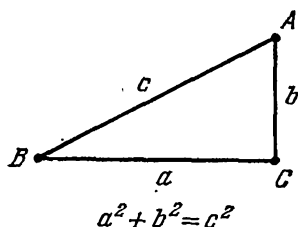


Рис. 1.7. Точно ли описывают физический мир аксиомы евклидовой геометрии, из которых логически выводится теорема Пифагора? Это может решить только опыт.

Вопрос, как можно убедиться в том, что измеренное отношение длины окружности к диаметру физического круга действительно равняется 3,14159..., является скорее вопросом эксперимента, а не умозаключения. Геометрические измерения имеют для физики принципиальное значение, и мы должны решать такие вопросы до того, как применять евклидову или какую-либо другую геометрию для описания окружающего нас мира. Это безусловно является вопросом о физических свойствах Вселенной: можем ли мы в физических измерениях

предполагать, что справедливы аксиомы и теоремы Евклида?

Не вдаваясь в сложные математические вычисления, мы можем высказать только несколько простых истин об экспериментально определяемых свойствах пространства.

Одной из наиболее известных теорем математики является теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов прилежащих к ней сторон (катетов) (рис. 1.7). Выполняется ли эта математическая истина также в реальном мире, изучаемом физикой? Может ли быть иначе? Умозаключений тут недостаточно, и для ответа мы должны обратиться к опыту. Мы приведем соображения, которые носят несколько неполный характер, так как мы пока не можем пользоваться математикой трехмерного пространства, обладающего кривизной.

Вначале вообразим, в каком положении находились бы двумерные разумные существа, живущие в такой Вселенной, которая представляет собой поверхность шара. Их математики могли бы дать им описание свойств пространств с тремя и даже большим числом измерений, но им так же трудно представить в своем вооб-

ражений такие вещи, как нам — нарисовать себе четырехмерное пространство. Как они могут установить, что живут на поверхности, обладающей кривизной? Чтобы убедиться в этом, нужно проверить, что для данной поверхности теряют силу хотя бы некоторые аксиомы геометрии на плоскости, а для этого надо экспериментально установить, выполняются ли определенные теоремы евклидовой геометрии.

Эти двумерные разумные существа будут проводить «прямые» линии как линии кратчайших расстояний между любыми двумя точками  $B$  и  $C$  на поверхности шара (рис. 1.8). Мы считали бы такую линию дугой большого круга. Они могут строить прямоугольные треугольники и проверять на них, выполняется ли теорема Пифагора. Для очень маленького треугольника, каждая из сторон которого мала по сравнению с радиусом шара, теорема будет выполняться с большой, но не с абсолютной точностью; для большого треугольника обнаружится значительное отклонение от этой теоремы.

Если  $B$  и  $C$  — точки на экваторе шара, то «прямая» линия, соединяющая их, является дугой  $BC$  экватора (рис. 1.9). Кратчайшим путем из точки  $C$  на экваторе к северному полюсу  $A$  является

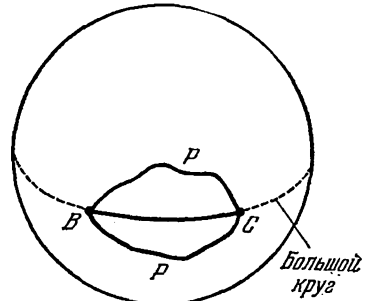


Рис. 1.8. Кратчайшее «прямолинейное» расстояние между точками  $B$  и  $C$  на шаровой поверхности проходит по дуге большого круга, соединяющей эти точки, а не по какому-либо другому пути  $P$ .

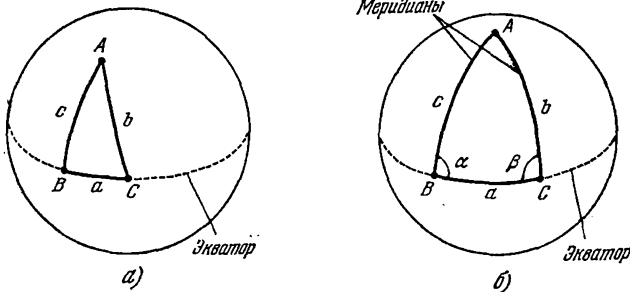


Рис. 1.9. Двумерные существа могли бы строить треугольники с заданными вершинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и отрезками «прямых» линий в качестве сторон. Они нашли бы, что для маленьких прямоугольных треугольников  $a^2 + b^2 \cong c^2$  и сумма углов треугольника немного больше  $180^\circ$  (а). Если бы они рассматривали большие треугольники, то сумма углов все более превышала бы  $180^\circ$  (б). Здесь точки  $B$  и  $C$  находятся на экваторе, а точка  $A$  — полюс шара, причем оба угла  $\alpha$  и  $\beta$  прямые. Очевидно, что  $a^2 + b^2 \neq c^2$ , потому что  $b=c$ .

линия постоянной долготы (меридиан), пересекающая экватор  $BC$  под прямым углом. Кратчайшим путем из  $A$  в  $B$  является отрезок другого меридиана, который также пересекает экватор  $BC$  под прямым углом. Получается прямоугольный треугольник, в котором  $b=c$ . Очевидно, что на поверхности шара теорема Пифагора не

выполняется, потому что  $c^2$  не может быть здесь равно  $a^2 + b^2$ ; далее, сумма внутренних углов треугольника  $ABC$  всегда больше  $180^\circ$ . Измерения, сделанные на искривленной поверхности ее двумерными обитателями, дают им возможность убедиться, что эта поверхность действительно обладает кривизной.

Однако эти обитатели всегда могут сказать, что законы геометрии на плоскости точно описывают их двумерный мир, а причина

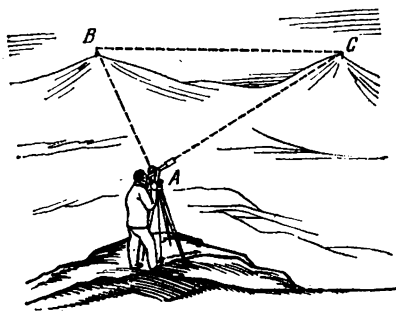


Рис. 1.10. Гаусс измерял углы треугольника, вершины которого находились на вершинах трех гор, и в пределах точности своих измерений не обнаружил отклонения суммы углов от  $180^\circ$ .

указанного несоответствия связана со свойствами линеек, применяемых для измерения кратчайшего расстояния и определения «прямой» линии. Они могут сказать, что метровые линейки не имеют постоянной длины, а растягиваются и сжимаются, когда их переносят в различные места поверхности. Только в результате непрерывных измерений, выполненных различными способами и давших одинаковый результат, становится очевидно, что наиболее простое объяснение нарушения евклидовой

геометрии заключается в том, что поверхность имеет кривизну.

Аксиомы геометрии на плоскости не являются в этом искривленном двумерном мире самоочевидными истинами; они вообще уже не являются истинами. Мы видим, что вопрос о том, какова истинная геометрия Вселенной, представляет собой физическую проблему, подлежащую экспериментальному исследованию. Описывая измерения, выполненные в нашем собственном трехмерном мире, мы обычно не задаем себе вопроса о том, справедлива ли евклидова геометрия, потому что евклидова геометрия является настолько хорошим приближением к геометрии Вселенной, что при практических измерениях не обнаруживаются какие-либо отклонения от нее. Это не означает, что применимость евклидовой геометрии самоочевидна или что эта геометрия совершенно точно выполняется в мировом пространстве. Великий математик XIX в. Карл Фридрих Гаусс высказал предположение, что необходимо проверить отсутствие кривизны трехмерного пространства, следующее из геометрии Евклида, измеряя сумму внутренних углов большого треугольника (рис. 1.10); он понимал, что если трехмерное пространство обладает кривизной, то сумма углов достаточно большого треугольника должна заметно отличаться от  $180^\circ$ .

Гаусс \*) использовал (1821—1823) геодезические приборы для точного измерения треугольника, образованного вершинами гор

\*) C. F. Gauss, Werke, vol. 9. См., в частности, стр. 299, 300, 314 и 319. Собрание сочинений Гаусса является замечательным примером того, как много может сделать для науки одаренный человек.

Брокен, Хохехаген и Инзельберг в Германии. Наибольшая сторона треугольника имела длину около 100 км. Измеренные внутренние углы были равны:

$$\begin{array}{r}
 86^{\circ} 13' 58,366'' \\
 53^{\circ} 6' 45,642'' \\
 40^{\circ} 39' 30,165'' \\
 \hline
 \text{Сумма } 180^{\circ} 00' 14,173'' \cdot
 \end{array}$$

Мы не нашли в работах Гаусса указаний по поводу оценки точности этих значений; вероятно, последние два десятичных знака не являются достоверными. Поскольку на каждой из трех вершин геодезические приборы устанавливались по местной плоскости горизонта, эти три горизонтальные плоскости не были параллельными. Вычисленную поправку, названную сферическим избытком и равную 14,853 дуговой секунды, надо вычесть из полученной суммы углов. Исправленная сумма, равная  $179^{\circ} 59' 59,320''$ , отличается от  $180^{\circ}$  на 0,680 дуговой секунды. Гаусс считал, что эта величина находится в пределах ошибок измерений, и сделал вывод, что в пределах точности этих измерений пространство является евклидовым.

Из приведенного выше примера очевидно, что евклидова геометрия дает правильное описание свойств маленького треугольника на обыкновенной двумерной сферической поверхности, а отклонения от евклидовой геометрии становятся все более значительными по мере увеличения размеров. Для того чтобы убедиться, что наше трехмерное физическое пространство действительно является плоским, нам надо произвести измерения с очень большими треугольниками, вершины которых образованы Землей и удаленными звездами или даже галактиками. Однако мы сталкиваемся с такой трудностью: наше положение определяется положением Земли, и мы еще не имеем возможности передвигаться в космическом пространстве с масштабными линейками, чтобы измерять стороны и углы астрономических треугольников. Как же мы можем проверить справедливость евклидовой геометрии в отношении описания измерений в мировом пространстве?

### 1.3. Оценки кривизны мирового пространства

*Данные о движении планет.* Первая оценка нижнего предела возможной величины радиуса кривизны для нашей Вселенной как  $5 \cdot 10^{17}$  см следует из взаимной согласованности данных астрономических наблюдений внутри Солнечной системы. Например, положения планет Нептуна и Плутона были определены расчетом до того, как эти планеты были визуально обнаружены при наблюдении в телескоп. Небольшие возмущения орбит уже известных планет привели к открытию Нептуна и Плутона, причем фактически найденные положения этих двух планет были очень близки к рассчитанным.

Мы легко можем представить, что даже маленькое отклонение от законов геометрии нарушило бы это совпадение. Крайняя планета Солнечной системы — это Плутон. Средний радиус орбиты Плутона равен  $6 \cdot 10^{14}$  см; близкое совпадение между рассчитанным и наблюдаемым положениями его означает, что радиус кривизны мирового пространства должен быть не меньше  $5 \cdot 10^{17}$  см. С этими данными не расходится и допущение, что радиус кривизны равен бесконечности, т. е. что мировое пространство является плоским. Обсуждение деталей числового расчета, давшего значение  $5 \cdot 10^{17}$  см, или точное

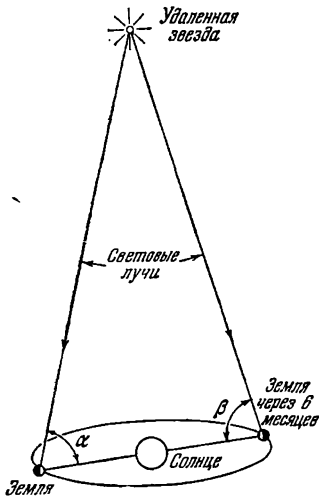


Рис. 1.11. Схема Шварцшильда, показывающая, что на плоской поверхности  $\alpha + \beta < 180^\circ$ . Параллакс звезды по определению равен  $(180^\circ - \alpha - \beta)/2$

удаленной. Половина отклонения суммы  $\alpha + \beta$  от  $180^\circ$  называется параллаксом. Однако для пространства, обладающего кривизной, не обязательно, чтобы сумма углов  $\alpha + \beta$  всегда была меньше  $180^\circ$ .

Вернемся к нашим двумерным астрономам, живущим на поверхности шара, чтобы увидеть, как они могут определить по измерениям суммы  $\alpha + \beta$ , что их пространство имеет кривизну (рис. 1.12).

Из указанного рассуждения относительно треугольника  $ABC$  мы видим, что  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , когда звезда отстоит от  $BC$  на четверть длины окружности большого круга. Если звезда ближе к  $BC$ , то  $\alpha + \beta < 180^\circ$ ; если она находится дальше, то  $\alpha + \beta > 180^\circ$ . Астрономам надо только смотреть на все более и более удаленные звезды, чтобы убедиться, что сумма углов становится больше  $180^\circ$ . Те же

определение того, что понимается под радиусом кривизны трехмерного пространства, увело бы нас слишком далеко в сторону от цели. В этом трудном случае в качестве полезной модели опять можно использовать двумерную аналогию — поверхность шара.

*Тригонометрический параллакс.* Другой метод проверки был предложен Шварцшильдом\*). Между двумя наблюдениями, произведенными с интервалом в 6 месяцев, положение Земли относительно Солнца изменяется на  $3 \cdot 10^{13}$  см, т. е. на длину диаметра ее орбиты. Предположим, что в эти два момента мы наблюдали за какой-то звездой и измерили углы  $\alpha$  и  $\beta$ , как показано на рис. 1.11. Если пространство является плоским, то сумма углов  $\alpha + \beta$  всегда меньше  $180^\circ$ , но эта сумма приближается к значению  $180^\circ$ , если звезду можно считать бесконечно

\*) K. Schwarzschild, Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft 35, 337 (1900).

соображения справедливы и внутри нашего трехмерного пространства.

Мы не имеем данных наблюдения, согласно которым сумма  $\alpha + \beta$ , измеренная астрономами, где-либо становилась бы больше  $180^\circ$  после того, как была введена соответствующая поправка на движение звезды относительно центра нашей Галактики. Значения  $\alpha + \beta$ , меньшие  $180^\circ$ , используются для определения расстояний до ближайших звезд методом триангуляции. Значения, меньшие  $180^\circ$ , можно наблюдать для звезд, расстояния которых от Земли достигают величины  $3 \cdot 10^{20}$  см \*), предельной для измерения углов с помощью современных телескопов. Из этого рассуждения можно непосредственно сделать вывод, что радиус кривизны мирового пространства должен быть больше  $3 \cdot 10^{20}$  см; для некоторых типов кривизны пространства необходим иной ход рассуждений \*\*). Окончательный ответ гласит, что радиус кривизны, определенный триангуляцией, в любом случае должен быть больше чем  $6 \cdot 10^{19}$  см.

В начале этой главы мы говорили, что из наблюдений была определена характеристическая длина, связанная со Вселенной, которая имеет величину порядка  $10^{28}$  см, или  $10^{10}$  световых лет. Наиболее бесхитростная интерпретация этой длины заключается в том, чтобы назвать ее радиусом Вселенной \*\*\*). Другая возможная интерпретация — считать ее радиусом кривизны мирового пространства. Каково же строение мирового пространства? Это вопрос космологии; прекрасное введение в эту теоретическую науку о космосе дается в книге Бонди (H. Bondi, Cosmology, 2nd ed., New York, 1960, Cambridge Univ. Press). Мы можем резюмировать наши познания в отношении радиуса кривизны мирового пространства, констатируя, что он не может быть меньше чем  $10^{28}$  см и что мы не знаем, обладает ли мировое пространство кривизной в масштабе длин, превышающих эту величину.

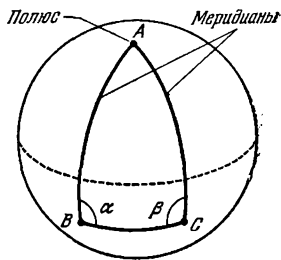


Рис. 1.12. Для этого треугольника, у которого  $B$  и  $C$  находятся ниже экватора,  $\alpha + \beta > 180^\circ$ , что может иметь место только потому, что двумерное «пространство» шаровой поверхности обладает кривизной. Подобное же рассуждение можно применить и к трехмерному пространству. Радиус кривизны изображенного здесь двумерного пространства — это как раз радиус шара.

\*) Можно возразить, что сам этот метод измерения расстояний основан на предположении, что применима евклидова геометрия. Однако имеются другие методы определения расстояний, которые излагаются в современных книгах по астрономии.

\*\*\*) Имеется в виду трехмерное пространство с такой кривизной (например, всюду отрицательной или же изменяющейся по знаку), для которого поверхность шара уже не является двумерной аналогией. (Прим. ред.)

\*\*\*) Термин «кривизна мирового пространства» вполне ясен по смыслу, и его можно считать достаточно строгим. Что же касается выражения «радиус кривизны Вселенной», то оно хотя и связано с представлением о кривизне пространства, этими качествами не обладает ввиду сложности понятия «Вселенная». (Прим. ред.)

## 1.4. Геометрия в меньшем масштабе

Изложенные выше наблюдения относятся к среднему радиусу кривизны мирового пространства, и на них не влияют искажения, которые, по-видимому, можно обнаружить в непосредственной близости к отдельным звездам. Эти искажения создают местные неоднородности геометрии мирового пространства, в среднем плоского или обладающего очень малой кривизной. Даже для части пространства, близкой к нашему Солнцу, очень трудно экспериментально обнаружить подобные неоднородности. В результате точных и сложных наблюдений положения звезд, видимых вблизи края

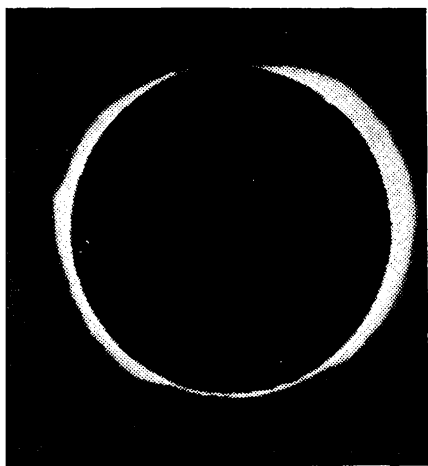


Рис. 1.13. Солнечное затмение 20 июля 1963 г. (Фотоснимок Клименшюу, Обсерватория Гриффит)

Солнца во время солнечного затмения (рис. 1.13), было установлено, что световые лучи слегка искривляются, когда они проходят вблизи края Солнца, и по аналогии следует предполагать, что они всегда должны искривляться вблизи любой другой столь же массивной звезды. Для луча, касающегося края Солнца, угол изгиба очень мал и составляет только  $1,75''$  (рис. 1.14). Таким образом, если бы мы могли видеть звезды при дневном свете, то те из них, которые были бы видны близко к краю Солнца, казались бы нам лишь очень мало отклонившимися от своих нормальных положений. Это означает только, что вблизи Солнца свет движется по кривой; само по себе это еще не означает, что пространство вокруг Солнца обязательно обладает кривизной. Только произведя вблизи поверхности Солнца точные измерения с помощью масштабов из разных материалов, мы могли бы непосредственно установить, что наиболее правильное и естественное описание этого явления должно быть основано на представлении о пространстве, обладающем кривизной.

С представлением о возможности кривизны пространства согласуется еще одна серия наблюдений: орбита Меркурия, ближайшей к Солнцу планеты, немного отличается от рассчитанной теоретически на основании ньютоновских законов всемирного тяготения и движения, даже если в расчеты орбиты введены соответствующие небольшие поправки, следующие из специальной теории относительности (рис. 1.15). Могло бы это быть следствием кривизны мирового пространства вблизи Солнца? Для ответа на этот вопрос нам надо знать, как повлияла бы возможная кривизна пространства на



уравнения движения Меркурия, а это требует большего, чем только решение геометрической задачи.

В ряде замечательных, изящных статей Эйнштейн (1917) изложил теорию тяготения и геометрии мирового пространства, названную общей теорией относительности. Эта теория дает двум описанным явлениям объяснение, количественно согласующееся с результатами наблюдений. Эти явления представляют собой пока единственные прямые подтверждения геометрических выводов общей теории относительности. Несмотря на такое малое количество подтверждений, общая теория относительности широко признана из-за своей принципиальной простоты.

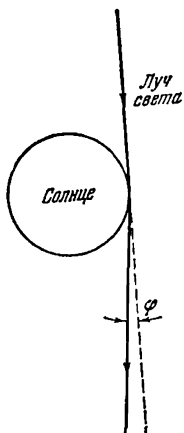


Рис. 1.14. Причиной изгиба линии, по которой распространяется свет, является действие притяжения Солнца, как было предсказано Эйнштейном в 1917 г. и вскоре после этого подтверждено наблюдениями.  $\varphi = 8 \cdot 10^{-6}$  рад  $= 1,75''$ .

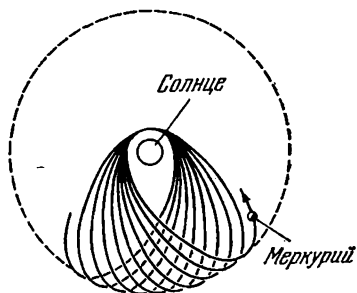


Рис. 1.15. Схема вращения орбиты Меркурия, объясняемого общей теорией относительности. Плоскость орбиты — это плоскость рисунка; с целью наглядности сильно преувеличен эксцентриситет орбиты. Если бы этого вращения не было, то орбита Меркурия представляла бы собой неподвижный эллипс.

На основании результатов астрономических измерений мы сделали вывод, что евклидова геометрия дает нам исключительно хорошее описание измерений длин, площадей и углов по меньшей мере до тех пор, пока мы не достигнем огромных длин, порядка  $10^{28}$  см и выше.

До сих пор ничего не говорилось о применимости евклидовой геометрии для описания очень маленьких конфигураций, сравнимых по величине с размерами атома ( $10^{-8}$  см) или атомного ядра ( $10^{-12}$  см). Вопрос о том, справедлива ли здесь евклидова геометрия, надо сформулировать следующим образом: можем ли мы получить правильное представление о внутриатомном мире и создать эффективную теорию, описывающую этот мир, сохраняя предположение о выполнении аксиом евклидовой геометрии? Если можем, то нет оснований подвергать сомнению применимости евклидовой геометрии в качестве достаточно хорошего приближения. Мы увидим в т. IV, что теория атомных и внутриатомных явлений, по-видимому, не приводит к парадоксам, препятствующим нашему пониманию этих явлений. Многие факты еще остаются непонятными, но среди

них нет таких, которые приводили бы к противоречиям из-за геометрических причин. В этом смысле евклидова геометрия выдерживает экспериментальную проверку по меньшей мере вплоть до размеров порядка  $10^{-13}$  см.

### 1.5. Инвариантность

Мы можем сформулировать некоторые следствия экспериментально доказанного утверждения о том, что евклидова геометрия применима к физическим явлениям.

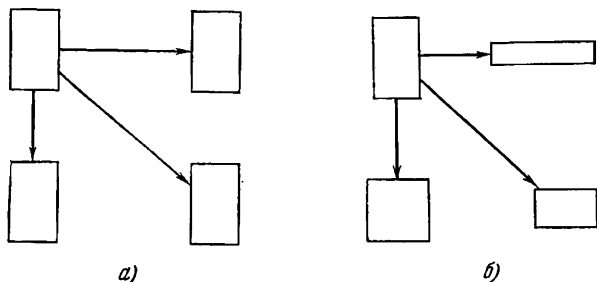


Рис. 1.16. а) Инвариантность по отношению к параллельному переносу. Перенос предмета в любое другое место не изменяет ни его размеров, ни формы. б) Неинвариантность по отношению к параллельному переносу в гипотетическом мире. Перенос предмета в другое место мог бы вызвать изменение его размеров или формы.

*Инвариантность по отношению к параллельному переносу.* Под этим мы подразумеваем, что пространство однородно и что оно не изменяется от точки к точке. Если тела перемещаются без поворота, т. е. остаются параллельными своему первоначальному положению, то их свойства не изменяются (рис. 1.16).

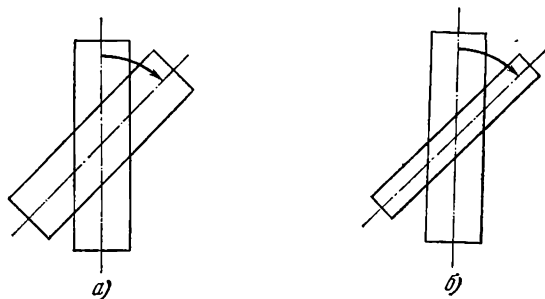


Рис. 1.17. а) Инвариантность по отношению к повороту. Поворот предмета не изменяет ни его размеров, ни формы. б) Неинвариантность по отношению к повороту в гипотетическом мире. Поворот предмета мог бы вызвать изменение его размеров или формы.

*Инвариантность по отношению к повороту.* Из опыта известно, что с большой степенью точности пространство является изотропным, так что все направления эквивалентны и физические тела не изменяются при повороте (рис. 1.17). Можно представить себе плоское пространство, не являющееся изотропным, например такое

пространство, в котором скорость света в одном направлении была бы вдвое больше, чем в другом направлении, перпендикулярном к первому. Нет никаких данных, что подобные явления возможны в свободном пространстве. Однако свойства многих кристаллов зависят от направления, т. е. эти кристаллы являются анизотропными.

Инвариантность по отношению к параллельному переносу приводит к сохранению импульса; инвариантность по отношению к повороту приводит к сохранению момента импульса. Эти физические законы подробно рассматриваются в гл. 3 и 6. Представление об инвариантности рассматривается также в гл. 2 и в конце гл. 3.

### Задачи

1. Известная нам часть Вселенной. Используя данные из текста главы, вычислить следующие величины:

а) Общую массу известной нам части Вселенной.

О т в е т.  $\sim 10^{68}$  г.

б) Среднюю плотность вещества во Вселенной.

О т в е т.  $\sim 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>, что соответствует 100 водородным атомам на 1 м<sup>3</sup>.

в) Отношение радиуса известной нам части Вселенной к радиусу протона. Принять радиус протона равным  $10^{-13}$  см, массу протона — равной  $1,7 \cdot 10^{-24}$  г.

2. Прохождение сигналом малых расстояний. Определить время, необходимое для того, чтобы сигнал, распространяющийся со скоростью света, прошел расстояние, равное диаметру протона. Диаметр протона принять равным  $2 \cdot 10^{-13}$  см.

3. Расстояние до Сириуса. Параллакс звезды — это половина угла, вершиной которого является звезда, а стороны соединяют эту вершину с крайними точками орбиты Земли вокруг Солнца. Параллакс Сириуса равен  $0,371''$ . Найти расстояние до Сириуса в сантиметрах, световых годах и парсеках. (См. таблицу физических постоянных.)

О т в е т.  $8,3 \cdot 10^{18}$  см; 8,8 св. лет; 2,7 парсека.

4. Размеры атомов. Пользуясь значением числа Авогадро, приведенным в таблице, и приближенной величиной средней плотности обычных твердых тел, найти приближенно средний диаметр атома.

5. Угол, под которым видна Луна. В ясную погоду возьмите линейку с миллиметровыми делениями и проделайте следующий опыт: держа линейку на расстоянии вытянутой руки, измерьте отрезок, закрывающий диаметр Луны, а затем измерьте расстояние от линейки до вашего глаза. Зная, что радиус лунной орбиты равен  $3,8 \cdot 10^{10}$  см, определите диаметр Луны.

а) Если вы смогли проделать этот опыт, то каков был результат?

б) Если почему-либо нельзя было произвести измерение, то по радиусу лунной орбиты и радиусу самой Луны ( $1,7 \cdot 10^8$  см) рассчитайте угол, под которым Луна видна с поверхности Земли.

О т в е т.  $9 \cdot 10^{-3}$  рад.

в) Под каким углом видна Земля с поверхности Луны?

О т в е т.  $3,4 \cdot 10^{-2}$  рад.

г) Комптоновская длина волны. Составить выражение для величины, имеющей размерность длины, используя скорость света  $c$ , массу электрона  $m$  и постоянную Планка  $h$ . Размерность постоянной Планка: [энергия·время] или [масса·длина<sup>2</sup>/время]. Определить числовое значение этой величины по значениям  $c$ ,  $m$  и  $h$ , данным в таблице. Эта длина играет важную роль в атомной физике (ее обычно обозначают через  $\lambda_c$ ).

### Дополнение. Простая астрономия Солнечной системы

Два астронома-любителя поставили перед собой цель определить диаметр и массу Солнца. Надлежащим образом обдумав задачу, они поняли, что сначала надо определить некоторые вспомогательные величины.

Их первый шаг — это определение радиуса Земли, которое они производят, удалившись друг от друга на 500 миль ( $8,05 \cdot 10^7$  см) по географическому меридиану (т. е. по линии постоянной долготы), причем для определения этого расстояния используются точные географические карты. Наблюдатели поддерживают между собой связь с помощью коротких радиоволн. Южный наблюдатель  $S$  выбирает звезду, которая в определенный момент проходит через его зенит.

В тот момент, когда выбранная звезда проходит через зенит южного наблюдателя, она пересекает также меридиан северного наблюдателя  $N$ , но вследствие кривизны земной поверхности пересекает его ниже зенита этого наблюдателя (рис. 1.18).

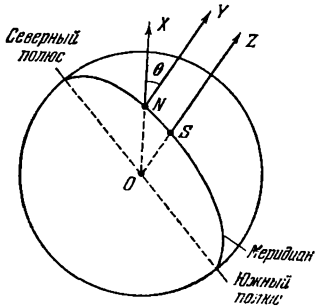


Рис. 1.18. Свет от удаленной звезды, находящейся в зените, поступает к наблюдателю  $S$  по линии  $ZSO$  (линия от зенита для  $S$ ). Свет от той же звезды поступает к наблюдателю  $N$  по линии  $YN \parallel ZSO$ . Линия  $XNO$  проведена от зенита для  $N$ .  $YN$  и  $XNO$  пересекаются под углом  $\theta$ .  $N$  — северный наблюдатель,  $S$  — южный наблюдатель,  $O$  — центр Земли.

а) Показать, что если северный наблюдатель получает значение угла между звездой и зенитом  $\theta = 7,2^\circ$ , то при расчете получается величина радиуса Земли  $6,4 \cdot 10^8$  см.

Оба наблюдателя считают, что следующим необходимым шагом является измерение скорости обращения Луны по ее орбите вокруг центра Земли. Они выполняют это косвенным путем, отмечая моменты времени, в которые закрывается Луной какая-то определенная звезда, видимая с двух различных точек земной поверхности. Чтобы уменьшить трудности геометрического и вообще математического расчета, они делают ряд упрощающих предположений: считают, что Луна и звезда находятся в плоскости эклиптики (т. е. в плоскости, в которой находятся Солнце и орбита Земли); что звезда проходит прямо позади Луны, т. е. по ее диаметру; что наблюдения производятся в полночь при полнолунии. В этом расчете не учитываются также кривизна Земли, влияние преломления света в атмосфере и другие поправки. Взаимное геометрическое расположение Луны, Земли и Солнца изображено на рис. 1.19.

Параллельные лучи света от весьма далекой звезды принимаются двумя наблюдателями  $O_3$  и  $O_B$ . Западный наблюдатель  $O_3$  отмечает момент  $t_3$  (1), в который звезда закрывается Луной и затем момент  $t_3$  (2), в который она снова появляется из-за Луны. Подобные же отсчеты  $t_B$  (1) и  $t_B$  (2) производятся восточным наблюдателем (рис. 1.20).

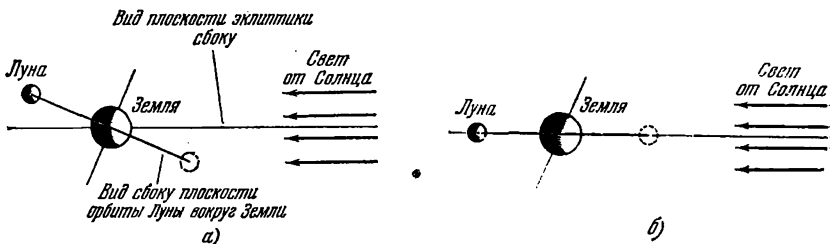


Рис. 1.19. а) Фактическое относительное расположение Земли, Луны и Солнца. б) Идеализированное для удобства рассуждения относительное расположение Земли, Луны и Солнца.

б) Показать, что скорость Луны относительно центра Земли определяется из следующего соотношения:

$$v_L = v_0 + \frac{s}{t_B(1) - t_3(1)},$$

где  $s$  — расстояние между наблюдателями,  $v_0$  — линейная скорость наблюдателей, а  $t_B(1)$  и  $t_3(1)$  были определены выше.

Зная скорость Луны, каждый наблюдатель сможет определить диаметр Луны по величине промежутка времени, в течение которого Луна закрывает звезду.

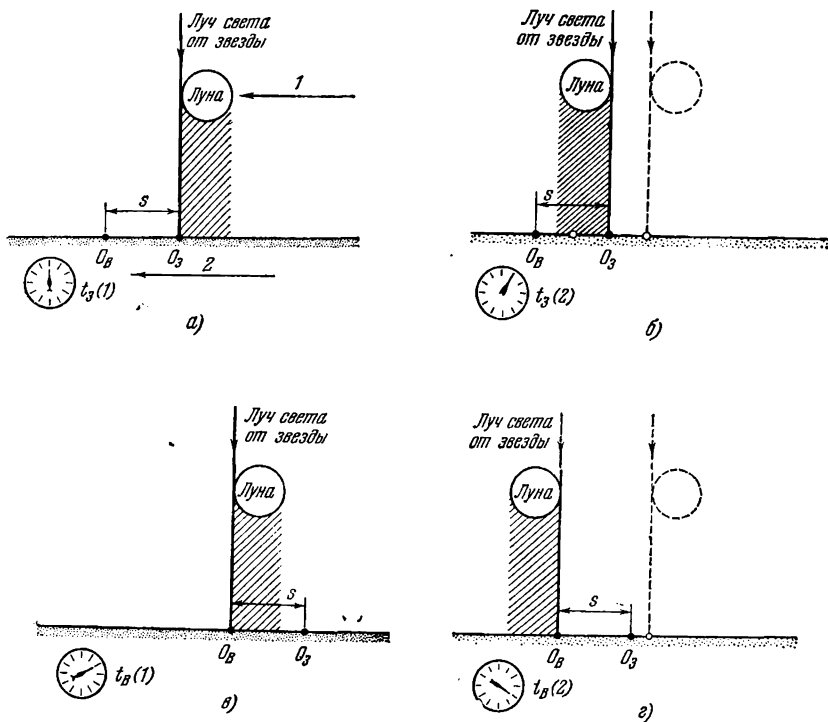


Рис. 1.20. а) Положение Луны и наблюдателей  $O_3$  и  $O_B$  в момент  $t_3(1)$ . Предполагается, что звезда бесконечно удалена и поэтому лучи света от нее параллельны (1 — направленные движения Луны; 2 — направление движения наблюдателей, обусловленного вращением Земли). б) В момент  $t_3(2)$  Луна переместилась в это положение, и свет от звезды опять становится виден наблюдателю  $O_3$ , который за тот же промежуток времени переместился из-за вращения Земли в новое положение, показанное на рисунке. в) Таким же образом наблюдатель  $O_B$  перестает видеть звезду в момент  $t_B(1)$ . г) Через некоторый промежуток времени в момент  $t_B(2)$  эта звезда опять становится видна ему.

в) Показать, что диаметр Луны равен

$$2R_{\text{Л}} = (v_{\text{Л}} - v_0)(t_2 - t_1).$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — соответствующие отсчеты времени, произведенные тем или другим наблюдателем.

г) Используя значение радиуса Земли, определенное выше, и зная период ее вращения, определить линейную скорость, с которой движется относительно центра Земли точка ее поверхности, находящаяся на тридцатой северной параллели.

О т в е т.  $4,04 \cdot 10^4$  см.

Типичные результаты наблюдений, которые могли бы быть получены двумя любителями, приведены в следующей таблице.

Наблюдение	$t_3$ (1)	$t_3$ (2)	$t_B$ (1)	$t_B$ (2)
Время, мин	0,0	95,6	22,0	117,7

д) Используя эти данные и полученные выше результаты, можно показать, что скорость движения Луны равна  $10,1 \cdot 10^4$  см/сек, а диаметр равен  $3,48 \cdot 10^8$  см. Определить орбитальную скорость Луны, два астронома-любителя сразу используют известную им величину периода обращения ее по орбите ( $2,36 \cdot 10^8$  сек) для определения радиуса орбиты.

е) Показать, что их наблюдения приводят к результату, согласующемуся с данными точных измерений ( $3,8 \cdot 10^{10}$  см).

Если спутник данного небесного тела движется по круговой орбите, то можно довольно просто определить массу притягивающего его тела. Пользуясь законом тяготения Ньютона  $F = GM_3 M_{\text{Л}}/r^2$  для силы притяжения между Землей и Луной, мы показываем в гл. 3, что  $GM_3 = v_{\text{Л}}^2 r = R^2 g$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $M_3$  — масса Земли,  $v_{\text{Л}}$  — скорость Луны,  $r$  — радиус орбиты Луны,  $R$  — радиус Земли,  $g$  — ускорение силы тяжести на поверхности Земли ( $980$  см/сек<sup>2</sup>). Первое из двух приведенных равенств получается в результате приравнивания силы притяжения центростремительной силе  $M_{\text{Л}} v_{\text{Л}}^2 / r$ , где  $M_{\text{Л}}$  — масса Луны.

ж) Рассчитать величину константы  $GM_3$ .

После значительных усилий наши любители приходят к выводу, что, так как у них нет сведений, достаточных для вычисления массы Земли, им надо произвести другой опыт. В идеальном случае они должны измерить гравитационную постоянную  $G$ . Ввиду того, что это измерение довольно трудно выполнить, они решают взамен него определить плотность Земли. Изучая вещества, находящиеся на поверхности, они получают величину  $5$  г/см<sup>3</sup>.

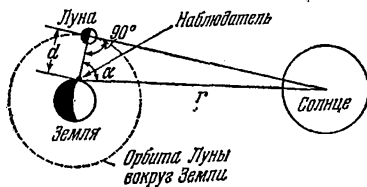


Рис. 1.21. Метод определения расстояния от Земли до Солнца с помощью уже известных данных относительно орбиты Луны.

з) Какова по этим данным приближительная масса Земли? Какой ошибке в процентах это в действительности соответствует?

и) Используя эту приближительную величину и предыдущие результаты, определить порядок величины  $G$ .

Затем два любителя, пользуясь известными им данными относительно орбиты Луны, определяют расстояние до Солнца, как показано на рис. 1.21. В данный момент времени Солнце, Луна и Земля находятся в таких положениях, что край тени совпадает с диаметром Луны (которая видна наблюдателю как точный полукруг). В этот момент наблюдатель определяет угол между направлениями к центру Луны и к центру Солнца.

к) Для значения угла  $\alpha = 89^\circ 51'$  рассчитать расстояние от Земли до Солнца. Зная расстояние от Земли до Солнца, два любителя убеждаются, что третий закон Кеплера (в дополнение к ньютоновским основным законам движения) позволяет им рассчитать массу Солнца (см. «Физика», пер. с англ. под ред. А. С. Ахматова, «Наука», 1965, стр. 464).

л) Рассчитать массу Солнца.

Наконец, два любителя, которым посчастливилось наблюдать в 1963 г. полное солнечное затмение, вспоминают, что тогда Луна почти точно закрыла все Солнце.

м) Определить диаметр Солнца  $2R_{\text{С}}$  на основании сведений, изложенных выше.

Выполнение подобных определений с предельной точностью требует большого труда по налаживанию приборов, наблюдениям, их интерпретации, расчетам и разработке теории — все это занимало умы многих людей в течение столетий и представляет интерес также в наше время. Однако соображения относительно

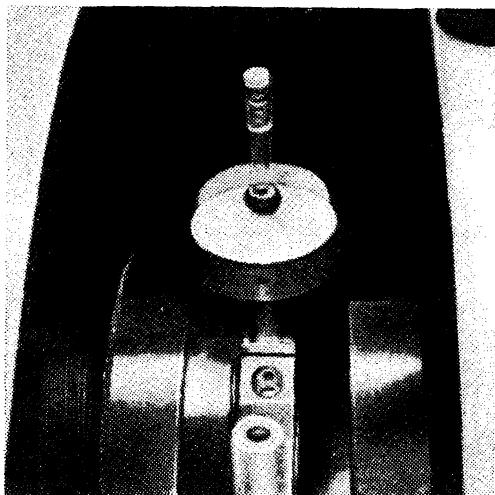


Рис. 1.22. Получение спектров ядерного магнитного резонанса: образец быстро вращается между полюсами электромагнита, чтобы усреднить местные изменения магнитного поля.

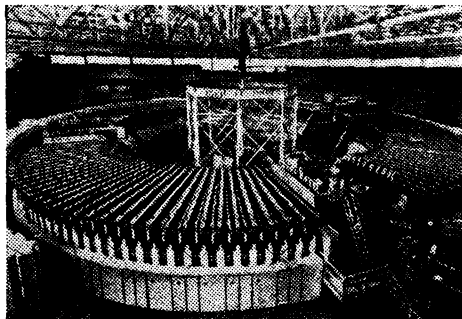


Рис. 1.23. Ускоритель частиц высоких энергий — bevatрон в Беркли. Внизу справа — место ввода протонов. (Радиационная лаборатория им. Лоуренса)

точности не помешали людям производить измерения в новых областях науки. Если бы физики дожидались, пока будут усовершенствованы приборы, дающие высокую точность измерений, они вообще не могли бы двигаться вперед. Как-то было сказано, что многие сложные экспериментальные установки являются памятниками потеряному времени.

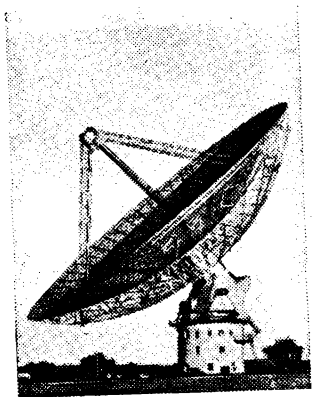


Рис. 1.24. Большой радиотелескоп в Австралии. Диаметр чаши 64 м. Прибор находится в укромной долине в Новом Южном Уэльсе в 320 км к западу от Сиднея. В этом удаленном месте электрические помехи минимальны.



Рис. 1.25. Телескоп Хэйла, направленный в зенит; вид с юга. Диаметр зеркала этого телескопа 200 дюймов (5,08 м). (Обсерватории Маунт Вильсон и Паломар)

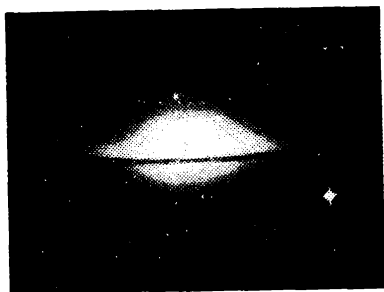


Рис. 1.26. Вид сбоку на спиральную туманность NGC 4594 в созвездии Девы. Снимок сделан с помощью двухсотдюймового телескопа Хэйла. (Обсерватории Маунт Вильсон и Паломар)

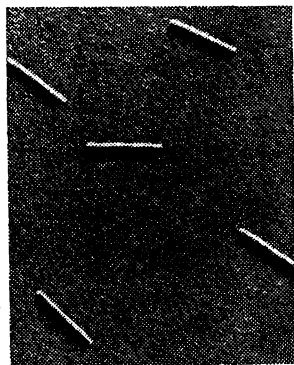


Рис. 1.27. Снимок частиц вируса табачной мозаики, полученный в электронном микроскопе с увеличением 70 000. Эти палочки состоят из протейна и рибонуклеиновой кислоты и проявляют вредное инфекционное действие, если натереть ими листья растений табака. Рентгеноструктурный анализ показывает, что частицы вируса имеют форму спирали, состоящей примерно из 2000 витков, причем витки спирали образованы как протейном, так и рибонуклеиновой кислотой. (Лаборатория вирусов Калифорнийского университета в Беркли)



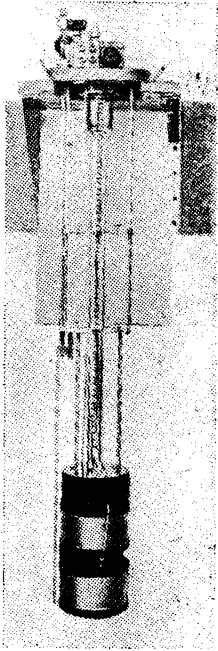


Рис. 128. Электромагнит со сверхпроводящими обмотками, работающий при низкой температуре. Эти обмотки рассчитаны на получение магнитного поля в 54 000 гс. Такой прибор является сердцем современной лаборатории низких температур.

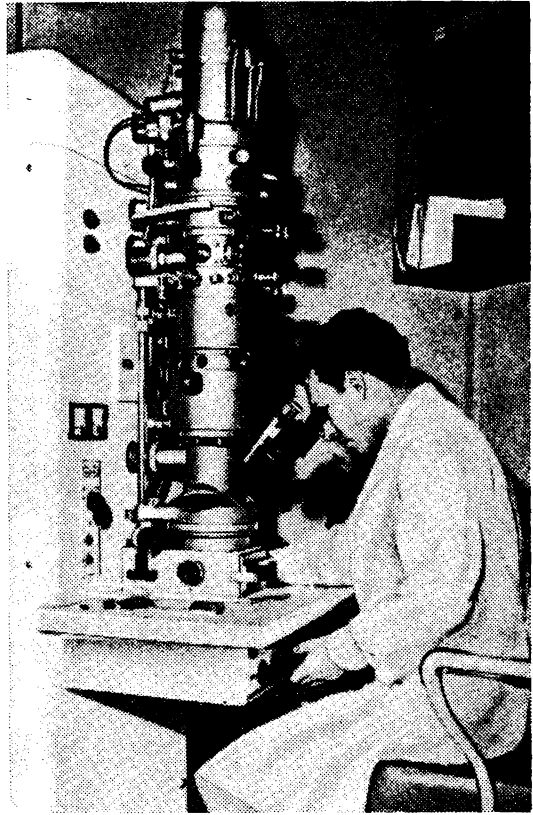


Рис. 129. Электронный микроскоп Сименса, работающий при напряжении 50 — 100 кВ и дающий разрешение до  $10^{-7}$  см. В соединенных друг с другом цилиндрах, показанных на фотоснимке, находятся магнитные линзы. Источник электронов расположен сверху, а увеличенное окончательное изображение объекта можно видеть на флуоресцирующем экране в нижней части прибора. Для получения фотоснимков надо помещать фотопластинки в этой плоскости. Фокусировка производится посредством изменения силы тока в магнитных линзах. (Лаборатория вирусов Калифорнийского университета в Беркли)

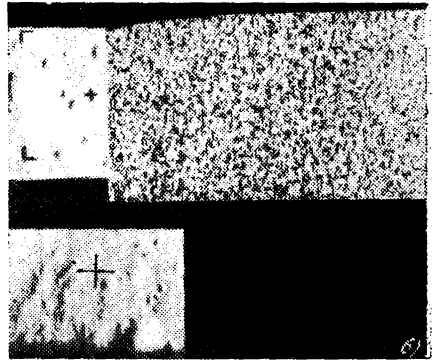
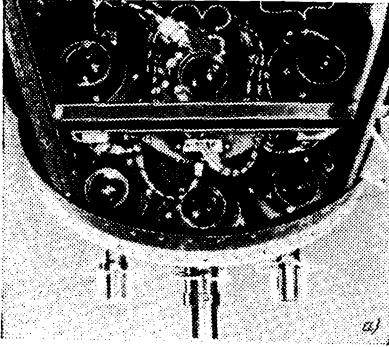


Рис. 1.30. Полет «Рейнджера» на Луну. 31 июля 1964 г. после полета продолжительностью 68 часов космический корабль «Рейнджер-7» разбился при прилунении. Снимки, полученные в течение последних 10 минут полета, когда «Рейнджер» приближался к Луне со скоростью 9600 км/час, передавались на Землю телевизионным передатчиком. Черные отметки на этих снимках дают возможность определить их масштаб.

а) Общий вид шести телевизионных камер (двух широкоугольных и четырех узкоугольных); установленных на «Рейнджере-7» для съемки поверхности Луны.

б) *Последние кадры.* Сверху — север. *Верхний снимок.* Высота 305 м. Этот кадр был последним, переданным камерой Р-3 (фокусное расстояние 25 мм, относительное отверстие 1:1) к тому моменту, как «Рейнджер-7» прилунился. Космический корабль разбился при передаче кадра, в результате этого приемник дал картину шумов, показанную справа. Площадь размерами 30×18 м<sup>2</sup> снята на кадре с разрешением, в 1000 раз лучшим, чем при наблюдениях с Земли. Самые маленькие кратеры имеют диаметр около 90 см и глубину около 30 см. *Нижний снимок.* Высота около 915 м. Снимок, на котором показана площадь со стороны около 30 м, был сделан камерой Р-1 (фокусное расстояние 75 мм, относительное отверстие 1:2) с частичным разложением изображения. Многие из показанных кратеров имеют округленные склоны, в противоположность более крупным лунным кратерам.

#### *Приборы для физических исследований*

На стр. 41—44 показаны фотоснимки некоторых приборов и установок, применение которых значительно способствовало прогрессу физических наук (рис. 1.22—1.30).

## ГЛАВА 2

### ВЕКТОРЫ

#### 2.1. Термины и понятия. Векторная система обозначений

Терминология является существенной составной частью всякой научной теории. Трудно выразить сложные и абстрактные понятия на языке, не имеющем слов, соответствующих этим понятиям. Поэтому для выражения новых научных понятий создаются и вводятся в язык науки новые термины; многие из них образуются от корней слов классического греческого или латинского языка. Новый термин может приобрести «права гражданства» сразу во многих современных языках, если он удовлетворяет потребностям научного общения. Таким образом, русскому слову *вектор* соответствует английское *vector*, французское *vecteur* и немецкое *Vektor*. *Вектором называется количественная характеристика, имеющая не только числовую величину, но и направление.* Этот смысл слова «вектор» представляет собой обобщение его прежнего, ныне устаревшего значения в астрономии, где вектором назывался воображаемый прямолинейный отрезок, соединяющий планету, обращающуюся вокруг центра или фокуса эллипса, с этим центром или фокусом.

Система обозначений входит составной частью в математический язык и поэтому является важной принадлежностью математики. Векторная система обозначений имеет два существенных преимущества.

1. Формулировки физических законов в векторной форме не зависят от выбора осей координат. Векторная система обозначений представляет собой такой язык, в котором формулировки имеют физическое содержание даже без введения системы координат.

2. Векторная система обозначений является компактной. Многие физические законы выражаются через векторные величины в простой и обзримой форме, которая не сохраняется при выражении их через проекции этих величин в какой-либо системе координат.

Мы будем выражать законы физики в векторной форме, где это возможно, хотя при решении задач мы чаще всего предпочитаем

оперировать с определенной системой координат. Некоторые более сложные законы, которые нельзя выразить в векторной форме, могут быть сформулированы в виде тензорных соотношений. *Тензор* представляет собой обобщение вектора, включающее вектор как частный случай. Векторный анализ в его современном виде является главным образом результатом относящихся к концу девятнадцатого столетия работ Джошуа Вилларда Гиббса и Оливера Хевисайда.

Единичным вектором называется вектор, абсолютная величина которого равна единице \*). Единичный вектор в направлении  $\mathbf{A}$

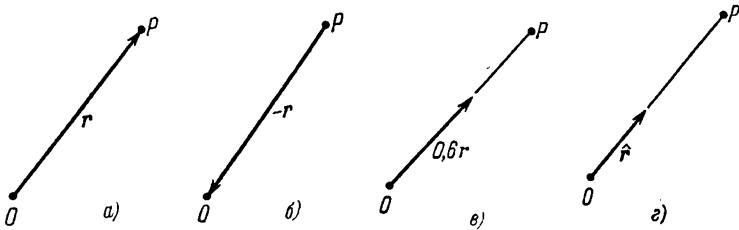


Рис. 2.1. а) Вектор  $\mathbf{r}$  выражает положение точки  $P$  относительно другой точки  $O$  как начала отсчета. б) Вектор  $-\mathbf{r}$  равен по величине, но противоположен по направлению вектору  $\mathbf{r}$ . в) Вектор  $0,6\mathbf{r}$  имеет то же направление, что и вектор  $\mathbf{r}$ , а его абсолютная величина равна  $0,6r$ . г) Вектор  $\hat{\mathbf{r}}$  — это единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}$ . Заметьте, что  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ .

пишется со значком  $\hat{\phantom{A}}$ :  $\hat{\mathbf{A}}$  читается, как «единичный вектор направления  $\mathbf{A}$ » или « $\mathbf{A}$  с шапочкой». Эти правила обозначения можно кратко выразить следующим тождеством:

$$\mathbf{A} \equiv A\hat{\mathbf{A}}. \quad (1)$$

Применимость векторов для удобства выражения физических соотношений в значительной степени основывается на геометрии Евклида. При выражении физических законов в векторной форме обычно предполагают, что выполняются все положения евклидовой геометрии. Если же геометрия пространства не является евклидовой, то операция сложения двух векторов может оказаться непростой и неоднозначной. Для пространства, обладающего кривизной, существует более общий математический язык — это метрическая дифференциальная геометрия, язык общей теории относительности, т. е. той области физики, в которой евклидову геометрию уже нельзя считать достаточно точной.

Мы говорили, что вектор — это количественная характеристика, имеющая не только числовую величину, но и направление. Это свойство совершенно не связано с какой-либо конкретной системой

\*) Установим следующие правила применения векторной системы обозначений. Векторная величина обозначается буквой со стрелкой над ней  $\vec{A}$ . В печати обозначения векторов обычно набираются жирным шрифтом. Абсолютная величина вектора печатается курсивом:  $A$  — это абсолютная величина вектора  $\vec{A}$ . Вместо  $A$  пишут также  $|\vec{A}|$ .

координат \*). Однако мы увидим, что не все величины, имеющие числовое значение и направление, обязательно являются векторами.

По определению *скаляром называется такая величина, которая не имеет направления и имеет числовое значение, не зависящее от системы координат*. Например, абсолютная величина вектора представляет собой скаляр. Координата  $x$  неподвижной точки — не скаляр, потому что величина координаты  $x$  зависит от направления, выбранного для оси  $x$ . Температура  $T$  — это скаляр, скорость  $v$  — это вектор.

**Равенство векторов.** По определению два вектора  $A$  и  $B$  равны, если они имеют одинаковую абсолютную величину и одинаковое направление. Не обязательно, чтобы начальная точка вектора была закреплена, хотя вектором может быть обозначена величина, относящаяся и к определенной точке пространства.

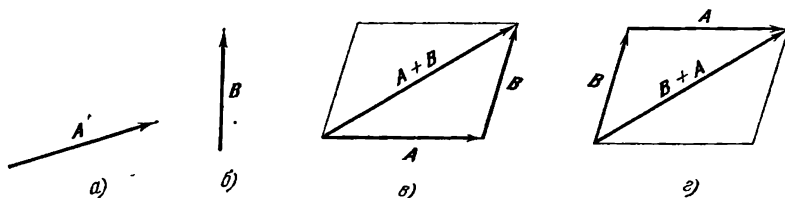


Рис. 2.2. а) Вектор  $A$ . б) Вектор  $B$ . в) Векторная сумма  $A+B$ . г) Векторная сумма  $B+A$  равна  $A+B$

Можно сравнивать два вектора, даже если они выражают физические величины, определенные в разных точках пространства и в разные моменты времени. Если бы мы не могли удостовериться на основании опыта, что можно считать пространство неискривленным (за исключением, может быть, тех случаев, когда речь идет об огромных космических расстояниях), то результат сравнения двух векторов, имеющих различные начальные точки, возможно, оказался бы неоднозначным (см. «Математическое дополнение 1» в конце этой главы).

**Сложение векторов.** Сумма двух векторов  $A$  и  $B$  определяется согласно геометрическому построению, показанному на рис. 2.2. Это построение часто называется законом сложения векторов по правилу параллелограмма. Для определения суммы  $A+B$  вектор  $B$  переносится параллельно самому себе таким образом, чтобы его начальная точка совпала с конечной точкой вектора  $A$ . Вектор, проведенный от начальной точки  $A$  к конечной точке вектора  $B$ , — это сумма векторов  $A+B$ . Из рис. 2.2, в и г следует, что  $A+B = B+A$ , т. е. что сложение векторов *коммутативно*.

Вычитание векторов определяется, как показано на рис. 2.3 и 2.4.

\*) Мы предполагаем, что всегда можно точно указать направление вектора. В некоторых случаях мы можем определить это направление относительно лаборатории, в других — относительно неподвижных звезд.

Сложение векторов удовлетворяет соотношению  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ , так что можно сказать, что сложение векторов *ассоциативно*, т. е. для него выполняется сочетательный закон. Сумма конечного числа векторов не зависит от порядка, в котором они складываются. Если  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$ , то, прибавляя к обеим частям равенства по  $\mathbf{B}$ , мы получаем  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ . Во всех случаях можно оперировать с суммами и разностями векторов так, как если бы это были числа. Если  $k$  — скаляр, то

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, \quad (2)$$

так что можно сказать, что умножение вектора на скаляр *дистрибутивно*, т. е. для него выполняется распределительный закон.

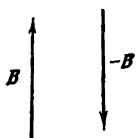


Рис. 2.3. Векторы  $\mathbf{B}$  и  $-\mathbf{B}$ .

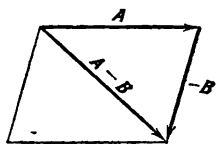


Рис. 2.4. Образование разности  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ; вычитание векторов.

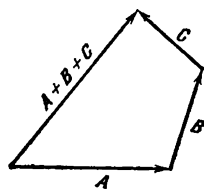


Рис. 2.5. Сумма трех векторов:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ . Проверьте самостоятельно, что эта сумма равна  $\mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{C}$ .

Когда физическая величина может быть выражена вектором? Мы ввели векторную систему обозначений для описания перемещений в пространстве, не обладающем кривизной. Помимо перемещений, имеются другие физические величины, подчиняющиеся тем же законам преобразования и обладающие теми же свойствами инвариантности, что и перемещения. Такие величины также можно выразить векторами. Чтобы величина выражалась вектором, она должна удовлетворять следующим двум условиям:

1. Для нее должен соблюдаться закон сложения по правилу параллелограмма.
2. Ее абсолютная величина и направление не должны зависеть от выбора системы координат.

*Дифференцирование векторов.* Скорость материальной точки  $\mathbf{v}$  — вектор, ускорение  $\mathbf{a}$  также является вектором. Скорость — это характеристика изменения положения материальной точки со временем. Положение материальной точки в любой момент времени  $t$  можно определить с помощью вектора  $\mathbf{r}(t)$ , который соединяет с данной точкой определенную неподвижную точку  $O$ , называемую началом отсчета. С течением времени материальная точка движется, а вектор, характеризующий ее положение, изменяется по направлению и по величине (рис. 2.6). Разность между  $\mathbf{r}(t_2)$  и  $\mathbf{r}(t_1)$  — это разность двух векторов:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1), \quad (3)$$

и она сама является вектором. Если вектор  $\mathbf{r}$  можно рассматривать как функцию (векторную функцию) одной скалярной переменной  $t$ , то значение  $\Delta \mathbf{r}$  будет полностью определено, когда известны оба значения  $t_1$  и  $t_2$ . Так, на рис. 2.7,а  $\Delta \mathbf{r}$  — это хорда  $P_1P_2$ . Отношение

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

является вектором, коллинеарным с хордой  $P_1P_2$  (рис. 2.7,б), но увеличенным по сравнению с нею в  $1/\Delta t$  раз. Если  $\Delta t$  стремится

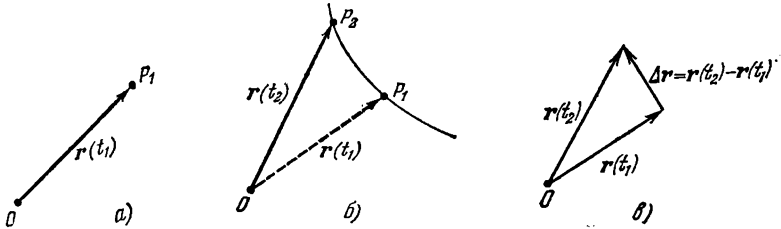


Рис. 2.6. а) Положение  $P_1$  материальной точки относительно фиксированного начала отсчета задается в момент времени  $t_1$  вектором  $\mathbf{r}(t_1)$ . б) К моменту  $t_2$  материальная точка достигла положения  $P_2$ . в) Вектор  $\Delta \mathbf{r}$  представляет собой разность между  $\mathbf{r}(t_2)$  и  $\mathbf{r}(t_1)$ .

к нулю, то  $P_2$  приближается к  $P_1$ , а хорда  $P_1P_2$  в пределе стремится к касательной в точке  $P_1$ . Тогда вектор  $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$  стремится к  $d\mathbf{r}/dt$ , вектору, направленному по касательной к кривой в точке  $P_1$  в ту же сторону, в которую увеличивается вдоль кривой переменная  $t$ .

Вектор

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (4)$$

называется *производной по времени* от  $\mathbf{r}$ . По определению скорость материальной точки равна

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (5)$$

Абсолютная величина  $v = |\mathbf{v}|$  вектора скорости называется числовым значением скорости материальной точки. Числовое значение скорости — скаляр.

Ускорение тоже представляет собой вектор; оно связано со скоростью  $\mathbf{v}$  точно так же, как  $\mathbf{v}$  связана с  $\mathbf{r}$ . Отсюда следует такое определение ускорения:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (6)$$

Рассмотрим движущуюся материальную точку. Положение ее в любой момент времени  $t$  задается радиусом-вектором  $\mathbf{r}(t)$ . Мы

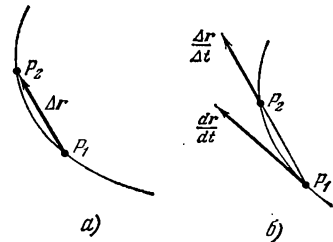


Рис. 2.7. а)  $\Delta \mathbf{r}$  — это хорда, соединяющая точки  $P_1$  и  $P_2$  траектории, описываемой данной материальной точкой. б) Если  $t_2 - t_1 = \Delta t \rightarrow 0$ , то вектор  $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$  коллинеарный с хордой  $P_1P_2$ , стремится к вектору скорости  $d\mathbf{r}/dt$ , коллинеарному с касательной к траектории в точке  $P_1$ .

можем написать:

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \hat{\mathbf{r}}(t), \quad (7)$$

где скаляр  $r(t)$  — это длина радиуса-вектора, а  $\hat{\mathbf{r}}(t)$  — единичный вектор направления  $\mathbf{r}$ . Согласно определению производной вектора  $\mathbf{r}(t)$  она равна

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [r(t) \hat{\mathbf{r}}(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) \hat{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - r(t) \hat{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t}. \quad (8)$$

Преобразуем числитель дроби и получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left[ r(t) + \frac{dr}{dt} \Delta t \right] \left[ \hat{\mathbf{r}}(t) + \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \Delta t \right] - r(t) \hat{\mathbf{r}}(t) = \\ = \Delta t \left( \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \right) + (\Delta t)^2 \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \end{aligned} \quad (9)$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  пренебрегаем последним слагаемым в правой части и получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \quad (10)$$

Это пример применения общего правила дифференцирования произведения скаляра  $a(t)$  на вектор  $\mathbf{b}(t)$ :

$$\frac{d}{dt} (a\mathbf{b}) = \frac{da}{dt} \mathbf{b} + a \frac{d\mathbf{b}}{dt}. \quad (11)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (10) выражает изменение направления вектора  $\mathbf{r}$ ; первое слагаемое обусловлено изменением длины  $r$  этого вектора.

**Пример. Круговое движение.** Этот пример исключительно важен! Наша цель — получить точные выражения для векторов скорости и ускорения материальной точки, движущейся с постоянной по абсолютной величине скоростью по круговой траектории постоянного радиуса  $r$ . Круговую траекторию можно описать таким уравнением:

$$\mathbf{r}(t) = r \hat{\mathbf{r}}(t), \quad (12)$$

в котором абсолютная величина  $r$  постоянна, а единичный вектор  $\hat{\mathbf{r}}$  вращается относительно начала отсчета с постоянной скоростью. Выразим такой единичный вектор следующим образом:

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t, \quad (13)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}$  и  $\hat{\mathbf{y}}$  — взаимно перпендикулярные постоянные единичные векторы, а  $\omega$  — постоянная величина, называемая *угловой частотой* или *угловой скоростью* движения. Эта величина измеряется в радианах на единицу времени. Вектор  $\hat{\mathbf{r}}$  вращается против часовой стрелки, если величина  $\omega$  положительна, и за время  $t$  поворачивается на угол  $\omega t$  радиан относительно направления  $x$ . Напомним, что в  $360^\circ$  содержится  $2\pi$  радиан. Эти утверждения относительно единичного



вектора  $\hat{\mathbf{r}}$  непосредственно следуют из определений тригонометрических функций косинуса и синуса. Заметим, что при  $t=0$  единичный вектор  $\hat{\mathbf{r}}$  направлен вдоль оси  $x$ .

В качестве иллюстрации возьмем такое значение времени, для которого  $\omega t = 1/4\pi$  радиан, т. е. угол  $\omega t$  равен  $45^\circ$ . Мы знаем, что  $\cos 1/4\pi = \sin 1/4\pi = \sqrt{2}/2$ , так что в этом случае

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{y}} \quad (14)$$

т. е. при  $\omega t = 1/4\pi$  единичный вектор  $\hat{\mathbf{r}}$  направлен относительно оси  $x$  под углом  $45^\circ$ , отсчитанным против часовой стрелки. В более поздний момент времени, для которого угол  $\omega t = 1/2\pi$  радиан (т. е.  $90^\circ$ ), мы получим  $\cos 1/2\pi = 0$ ,  $\sin 1/2\pi = 1$ , так что

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{y}}. \quad (15)$$

Теперь единичный вектор направлен по оси  $y$ .

Для того чтобы получить значение вектора скорости материальной точки, движущейся по окружности, мы используем формулу (10), но при этом  $dr/dt = 0$ , так как радиус  $r$  окружности постояен. Тогда из (12) и (13) следует:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = r \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{d}{dt} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \frac{d}{dt} \sin \omega t \right). \quad (16)$$

Определим производные от синуса и косинуса. Вспомним из курса математического анализа, что

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t, \quad \frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \quad \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t. \quad (18)$$

Если эти формулы не были известны вам ранее, попробуйте их вывести \*).

---

\*) Производная от  $\sin t$  по  $t$  определяется обычным способом, т. е.

$$\frac{d}{dt} \sin t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos \Delta t + \cos t \sin \Delta t - \sin t}{\Delta t},$$

где мы используем известное тригонометрическое тождество:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Но из геометрических определений косинуса и синуса очевидно, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \cos \Delta t = 1, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} = 1.$$

Подставляя эти результаты в формулу, полученную выше, имеем

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t.$$

Аналогичным способом читатель может получить формулу (18) для  $\frac{d}{dt} \cos t$ .

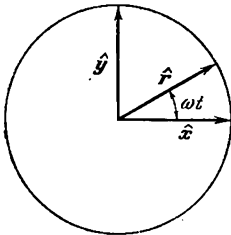
С помощью формул (17) и (18) можно переписать равенство (16) в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r(-\omega \sin \omega t \cdot \hat{x} + \omega \cos \omega t \cdot \hat{y}). \quad (19)$$

Абсолютная величина скорости равна  $\omega r$ . В этом можно убедиться, вычислив  $v^2$  (используя определение скалярного произведения векторов, данное ниже в уравнении (28), а также равенство  $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ ):

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \omega^2 r^2 (-\sin \omega t \cdot \hat{x} + \cos \omega t \cdot \hat{y}) \cdot (-\sin \omega t \cdot \hat{x} + \cos \omega t \cdot \hat{y}) = \omega^2 r^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \omega^2 r^2. \quad (20)$$

Здесь мы использовали тождество  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \equiv 1$ . Таким образом, получен важный результат, согласно которому числовое значение скорости материальной точки при равномерном круговом движении равно



$$v = \omega r. \quad (21)$$

Ускорение при круговом движении можно найти, продифференцировав по  $t$  правую часть формулы (19):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = r(-\omega^2 \cos \omega t \cdot \hat{x} - \omega^2 \sin \omega t \cdot \hat{y}). \quad (22)$$

Рис. 2.8. Материальная точка движется по окружности единичного радиуса с угловой скоростью  $\omega$ . Скорость материальной точки определяется по формуле (19), а ее ускорение — по формуле (22).

Сравнивая этот результат с (12) и (13), мы видим, что правая часть равенства (22) равна  $-\omega^2 \mathbf{r}$ :

$$\mathbf{a} = -\omega^2 r (\cos \omega t \cdot \hat{x} + \sin \omega t \cdot \hat{y}) = -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (23)$$

Следовательно, числовое значение ускорения при равномерном круговом движении равно

$$a = \omega^2 r, \quad (24)$$

причем ускорение направлено, как  $-\mathbf{r}$ , т. е. к центру круга. Подставив из (21)  $v = \omega r$ , перепишем (24) в таком виде:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (25)$$

Это ускорение называется *центростремительным ускорением*, известным вам из курса физики средней школы.

Угловая частота  $\omega$  связана простой зависимостью с обычной частотой  $f$ . Согласно уравнению (13) вектор  $\hat{r}$  описывает за единицу времени угол в  $\omega$  радиан, т. е. числовое значение  $\omega$  равняется выраженной в радианах величине угла, описанного за единицу времени. Но обычная частота  $f$  по определению равна числу оборотов, совершенных за единицу времени. Поскольку при одном обороте

описывается полный угол, равный  $2\pi$  радиан, получаем

$$2\pi f = \omega. \quad (26)$$

Период кругового движения  $T$  определяется как время, в течение которого совершается один оборот. Из уравнения (13) видно, что один оборот совершается за такое время  $T$ , что  $\omega T = 2\pi$ , или

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \quad (27)$$

Для иллюстрации приведем числовой пример, в котором частота  $f$  равна  $60$  об/сек. Тогда период равен

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} \cong 0,017 \text{ сек},$$

а угловая частота

$$\omega = 2\pi f \cong 378 \text{ рад/сек}.$$

Если радиус окружности равен  $10$  см, то линейная скорость движения равна

$$v = \omega r \cong 387 \cdot 10 \approx 3,8 \cdot 10^3 \text{ (см/сек)}.$$

Ускорение в любой точке этой траектории равно

$$a = \omega^2 r \approx (3,8 \cdot 10^2)^2 \cdot 10 \approx 1,45 \cdot 10^6 \text{ (см/сек}^2\text{)}.$$

В гл. 3 рассматривается числовой пример, который показывает, что точка, находящаяся на поверхности Земли на ее экваторе, имеет ускорение около  $3,4$  см/сек<sup>2</sup> вследствие вращения Земли вокруг оси.

Из определений  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  следует, что все эти величины являются векторами. Сила  $\mathbf{F}$ , напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  также являются векторами; чтобы доказать это, мы должны на основании опытных данных убедиться, что они обладают свойствами, необходимыми для векторов.

Опыт показывает, что сила  $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ , где масса  $M$  — постоянный скаляр \*). Поскольку  $\mathbf{a}$  — это вектор, сила тоже должна быть вектором. Напряженность электрического поля определяется как сила, которая действует на неподвижную частицу с единичным зарядом, находящуюся в электрическом поле; таким образом, и напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  должна быть вектором. Опытным путем установлено, что магнитные поля складываются по закону сложения векторов: совместное действие полей с магнитной индукцией  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ .

\*) Если масса  $M$  не постоянна, то

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (M\mathbf{v}) = \frac{dM}{dt} \mathbf{v} + M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dM}{dt} \mathbf{v} + M\mathbf{a}.$$

в точности равносильно действию одного магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ , т. е. индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  также является вектором.

Не все величины, которые имеют числовое значение и направление, обязательно являются векторами. Например, повороту твердого тела вокруг определенной оси, неподвижной в пространстве,

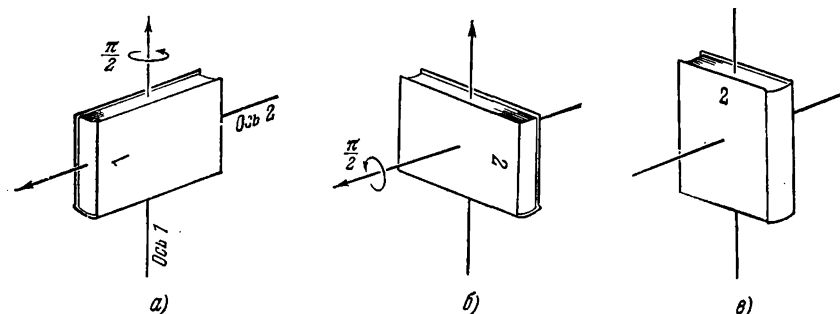


Рис. 2.9. а) Исходное положение книги. б) Положение книги после поворота на  $\pi/2$  радиан вокруг оси 1. в) Положение книги после последующего поворота на  $\pi/2$  радиан вокруг оси 2. 1 — передняя часть обложки; 2 — задняя часть обложки.

можно приписать как числовое значение (величина угла поворота), так и направление (направление оси). Однако два таких поворота не складываются согласно закону сложения векторов, если только углы поворота не являются бесконечно малыми. Это легко видеть, когда две оси перпендикулярны друг к другу, а оба угла поворота

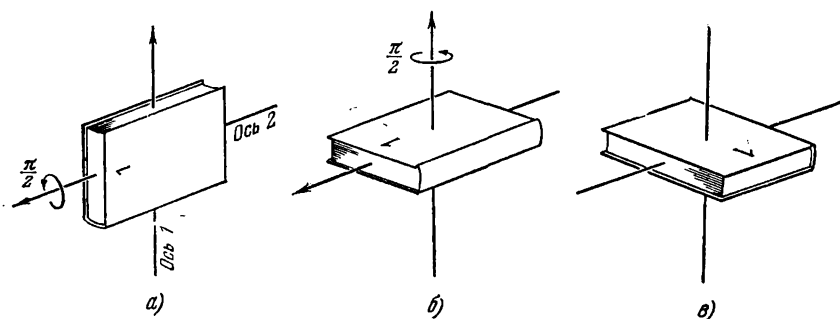


Рис. 2.10. а) Исходное положение книги. б) Положение книги после поворота на  $\pi/2$  радиан вокруг оси 2. в) Положение книги после последующего поворота на  $\pi/2$  радиан вокруг оси 1.

равны по  $\pi/2$  каждый. Представим себе какой-либо предмет, например книгу (рис. 2.9, а). Поворот (1) переводит ее в положение, показанное на рис. 2.9, б, а последующий поворот (2) вокруг другой оси — в положение на рис. 2.9, в. Однако если вернуть предмет в первоначальное положение и сначала произвести поворот (2), а затем поворот (1), то в конце концов этот предмет окажется в положении, показанном на рис. 2.10, в. Ориентация предмета на рис. 2.10, в

отличается от ориентации на рис. 2.9, в. Очевидно, что для этих поворотов не выполняется закон коммутативности сложения. Повороты на конечный угол нельзя выразить векторами, хотя их можно охарактеризовать числовым значением и направлением.

## 2.2. Произведения векторов. Скалярное произведение двух векторов

Известны два вида произведений двух векторов, широко используемые в физике. Для обоих видов произведений векторов выполняется распределительный (дистрибутивный) закон умножения: произведение вектора  $\mathbf{A}$  на сумму векторов  $\mathbf{B} + \mathbf{C}$  равно сумме произведений  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{C}$ . Одно из этих произведений двух векторов

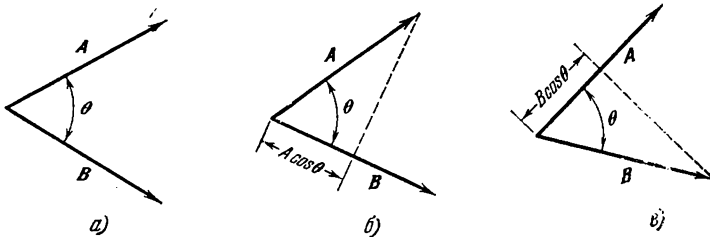


Рис. 2.11. а) Для образования скалярного произведения  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  приведем векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  к общей начальной точке. б)  $B(A \cos \theta) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ . в)  $A(B \cos \theta) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ . Здесь буквой  $\theta$  обозначен угол между векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

представляет собой скаляр, другое (также применяемое для многих целей) является вектором. В принципе возможно дать определение операции умножения двух векторов еще и другими способами, но эти способы не применяются, так как для них не выполняется распределительный закон. Например, нельзя считать, что число  $AB$ , т. е. обычное числовое произведение  $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$  абсолютных величин векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , является произведением этих векторов: легко заметить, что если  $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ , то в общем случае  $AD \neq AB + AC$ . Это отсутствие дистрибутивности делает число  $AB$  непригодным в качестве произведения векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

По определению скалярное произведение двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — это число, получаемое умножением абсолютной величины  $\mathbf{A}$  на абсолютную величину  $\mathbf{B}$  и на косинус угла между этими векторами (рис. 2.11). Операция скалярного умножения двух векторов обозначается точкой между символами сомножителей:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (28)$$

Здесь  $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  обозначает косинус угла между векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Очевидно, что определение скалярного произведения совсем не связано с системой координат, т. е. скалярное произведение векторов представляет собой скаляр. Заметим, что  $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \cos(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ ,

и поэтому скалярное произведение коммутативно:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (29)$$

Если угол, образованный векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , находится между  $\pi/2$  и  $3\pi/2$ , то  $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  и  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  будут отрицательными числами. Если  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , то  $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$  и

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^2 = |\mathbf{A}|^2. \quad (30)$$

Если  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  и при этом  $A \neq 0$  и  $B \neq 0$ , то мы говорим, что вектор  $\mathbf{A}$  ортогонален вектору  $\mathbf{B}$  или перпендикулярен вектору  $\mathbf{B}$ . Заметим, что  $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ , так что скалярное произведение двух единичных векторов в точности равно косинусу угла между ними. Величина проекции вектора  $\mathbf{B}$  на направление вектора  $\mathbf{A}$  равна

$$B \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = B \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{A}}, \quad (31)$$

где  $\hat{\mathbf{A}}$  — единичный вектор направления  $\mathbf{A}$ . Проекция вектора  $\mathbf{A}$  на направление вектора  $\mathbf{B}$  равна

$$A \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{B}}. \quad (32)$$

Не существует действия, обратного скалярному умножению векторов: если  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = b$ , то это уравнение не имеет единственного решения для  $\mathbf{X}$ . Деление на вектор — это не имеющая смысла, неопределенная операция.

Рассмотрим некоторые применения скалярных произведений.

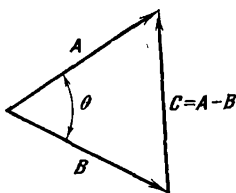


Рис. 2.12.  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = C^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = A^2 + B^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$ .

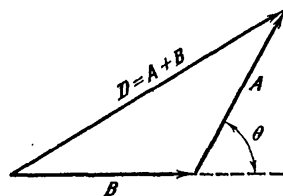


Рис. 2.13.  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = D^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = A^2 + B^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$ .

1. *Теорема косинусов.* Пусть  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$ ; тогда, взяв скалярное произведение каждой части этого равенства на такую же величину, получаем

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}, \quad (33)$$

или

$$A^2 + B^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = C^2, \quad (34)$$

что в точности соответствует общеизвестному тригонометрическому соотношению:

$$A^2 + B^2 - 2AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = C^2. \quad (35)$$

2. *Направляющие косинусы.* Пусть  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  — три ортогональных\*) единичных вектора, которыми определяется прямоугольная декартова система координат. Произвольный вектор  $\mathbf{A}$  можно выразить следующим образом (рис. 2.14):

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \hat{x}) \hat{x} + (\mathbf{A} \cdot \hat{y}) \hat{y} + (\mathbf{A} \cdot \hat{z}) \hat{z}. \quad (36)$$

Величины  $(\mathbf{A} \cdot \hat{x})$ ,  $(\mathbf{A} \cdot \hat{y})$  и  $(\mathbf{A} \cdot \hat{z})$  называются составляющими вектора  $\mathbf{A}$  и часто обозначаются соответственно как  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$ . Соотношение (36) можно проверить, помножив обе его части скалярно на  $\hat{x}$

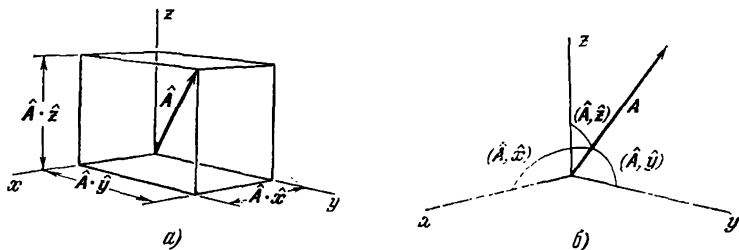


Рис. 2.14. а) Направляющие косинусы  $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{z}$ ,  $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{y}$ ,  $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{x}$ , показанные в виде проекций, б) Направляющие косинусы относятся к указанным углам.

и используя соотношения  $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$ ,  $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ ,  $\hat{x} \cdot \hat{z} = 0$  (следующие из определения ортогональных единичных векторов). При этом получится тождество

$$\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{x} = (\mathbf{A} \cdot \hat{x})(\hat{x} \cdot \hat{x}) + (\mathbf{A} \cdot \hat{y})(\hat{y} \cdot \hat{x}) + (\mathbf{A} \cdot \hat{z})(\hat{z} \cdot \hat{x}) = \mathbf{A} \cdot \hat{x}. \quad (37)$$

Единичный вектор  $\hat{\mathbf{A}}$  направления  $\mathbf{A}$  можно согласно (36) выразить так:

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{x} \cos(\hat{\mathbf{A}}, \hat{x}) + \hat{y} \cos(\hat{\mathbf{A}}, \hat{y}) + \hat{z} \cos(\hat{\mathbf{A}}, \hat{z}). \quad (38)$$

Три косинуса, входящие в это равенство, называются *направляющими косинусами* вектора  $\hat{\mathbf{A}}$  или направляющими косинусами вектора  $\mathbf{A}$  относительно основных единичных векторов  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  прямоугольной декартовой системы координат. Взяв скалярное произведение каждой части равенства (38) на самое себя, получим другое известное соотношение:

$$1 = \cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{x}) + \cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{y}) + \cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{z}). \quad (39)$$

Сумма квадратов всех трех направляющих косинусов равна единице.

3. *Уравнение плоскости.* Обозначим через  $\mathbf{N}$  вектор нормали к рассматриваемой плоскости, проведенный из начала координат

\*) Слово «ортогональные» употребляется в смысле «взаимно перпендикулярные».

$O$ , не находящегося в этой плоскости (рис. 2.15). Пусть  $\mathbf{r}$  — вектор, идущий из начала координат  $O$  в какую-то произвольную точку плоскости  $P$ . Проекция  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{N}$  должна быть равна абсолютной величине  $N$  вектора нормали. Таким образом, плоскость описывается следующим уравнением:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = N^2. \quad (40)$$

Чтобы убедиться в равносильности этого компактного соотношения обычному уравнению плоскости в аналитической геометрии, выразим векторы  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{r}$  соответственно через их составляющие  $N_x, N_y, N_z$  и  $x, y, z$  в прямоугольной декартовой системе координат, определенной ортогональными единичными векторами  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ . Тогда уравнение (40) принимает следующий вид:

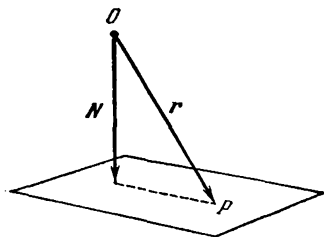


Рис. 2.15. Уравнение плоскости;  $\mathbf{N}$  — вектор нормали к плоскости, идущий из начала отсчета  $O$ . Уравнение этой плоскости:  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = N^2$ .

$$(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \cdot (N_x\hat{x} + N_y\hat{y} + N_z\hat{z}) = N^2, \quad (41)$$

или

$$N_x x + N_y y + N_z z = N^2. \quad (42)$$

Если  $\hat{\mathbf{k}}$  — единичный вектор в направлении распространения плоской электромагнитной волны в свободном пространстве, то (как мы увидим в т. III) векторы напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}$  должны находиться в плоскости, нормальной вектору  $\hat{\mathbf{k}}$  (рис. 2.16). Это геометрическое условие мы можем выразить следующими соотношениями:

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (43)$$

4. *Мощность (работа, совершаемая в единицу времени)*. Из элементарного курса физики (см. также гл. 5) мы узнаем, что работа, которую сила  $\mathbf{F}$  совершает в единицу времени над частицей, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , равна  $Fv \cos(\mathbf{F}, \mathbf{v})$ . В этом выражении мы теперь узнаем скалярное произведение:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Если мы обозначим мощность, т. е. работу, совершаемую в единицу времени, как производную  $dW/dt$ , то

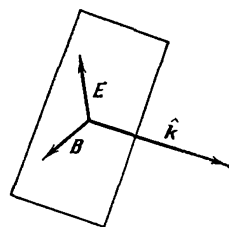


Рис. 2.16. Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в свободном пространстве, векторы электрического и магнитного полей перпендикулярны к направлению распространения  $\hat{\mathbf{k}}$ . Таким образом,  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (44)$$



5. *Объемная скорость.* Пусть  $S$  — вектор, нормальный к плоской площадке, имеющей площадь, равную абсолютной величине  $S$  этого вектора, а через  $v$  обозначим скорость, с которой движется

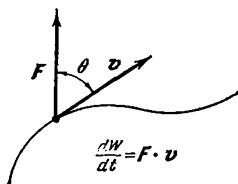


Рис. 2.17. Работа, которую сила  $F$  совершает в единицу времени над материальной точкой, движущейся со скоростью  $v$ .

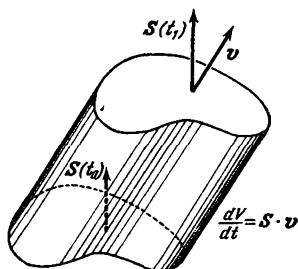


Рис. 2.18. Объемная скорость  $dV/dt$ , т. е. скорость, с которой площадка  $S$ , движущаяся со скоростью  $v$ , описывает объем, ограниченный цилиндрической поверхностью.

эта площадка. Мы видим, что за единицу времени площадка  $S$  описывает объем цилиндра с основанием  $S$  и длиной наклонной образующей  $v$  (рис. 2.18). Объемная скорость  $dV/dt$ , таким образом, равна

$$\frac{dV}{dt} = S \cdot v. \quad (45)$$

### 2.3. Векторное произведение

В физике широко применяется и другой вид произведения двух векторов. Это произведение является вектором, а не скаляром, но вектором в несколько ограниченном смысле. По определению

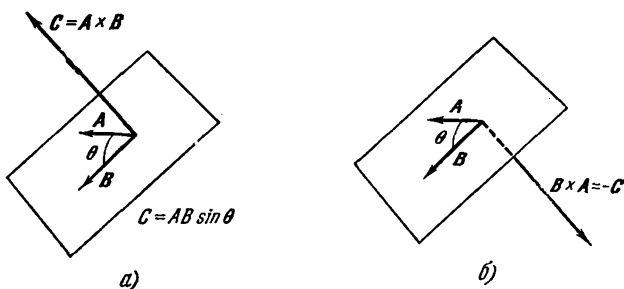


Рис. 2.19. а) Векторное произведение  $C = A \times B$ . б) Векторное произведение  $B \times A$  противоположно по знаку векторному произведению  $A \times B$ .

*векторное произведение* — это вектор, нормальный к плоскости, образованной векторами-сомножителями  $A$  и  $B$ , и имеющий абсолютную величину  $AB |\sin(A, B)|$  (рис. 2.19):

$$C = A \times B = \hat{C} AB |\sin(A, B)|. \quad (46)$$

Векторное произведение обозначается крестом между символами множителей:  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  \*). Направление векторного произведения  $\mathbf{C}$  по установленному соглашению определяется *правилом правого винта* (рис. 2.20): представим себе, что вектор  $\mathbf{A}$ , находящийся на первом месте в произведении, поворачивается на наименьший угол таким образом, чтобы его направление совпало с направлением вектора  $\mathbf{B}$ ; векторное произведение  $\mathbf{C}$  направлено в ту сторону, в которую двигался бы винт с правой резьбой (т. е. со стандартным направлением резьбы), если бы головка винта поворачивалась в том же направлении, что и вектор  $\mathbf{A}$ .

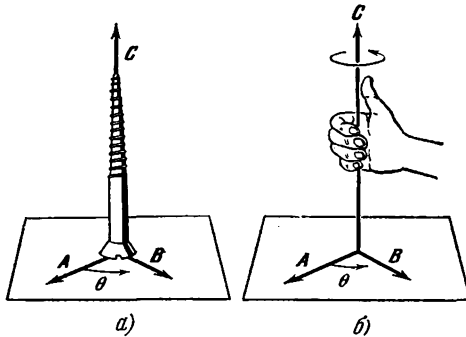


Рис. 2.20. а) Правило правого винта; б) то же правило, но в применении к правой руке.

Сформулируем иначе правило определения направления вектора  $\mathbf{C}$ . Сначала совместим начальные точки векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — это позволит определить их плоскость. Вектор  $\mathbf{C}$  перпендикулярен к этой плоскости; это значит, что векторное произведение  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  перпендикулярно как к вектору  $\mathbf{A}$ , так и к вектору  $\mathbf{B}$ . Повернем  $\mathbf{A}$  до совмещения с направлением  $\mathbf{B}$  на меньший из двух возможных углов и загнем четыре пальца правой руки в том направлении, в котором поворачивается вектор  $\mathbf{A}$ ; тогда большой палец покажет нам, куда направлен вектор  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Заметим, что в силу этого соглашения о знаке произведения  $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  является вектором, равным по абсолютной величине и противоположным по знаку вектору  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (47)$$

Таким образом, векторное произведение некоммукативно. Из (47) следует, что  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ , т. е. что векторное произведение любого вектора на самого себя равно нулю. Для векторного произведения выполняется распределительный (дистрибутивный) закон:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \quad (48)$$

\*) Часто векторное произведение обозначается квадратными скобками:  $[\mathbf{A} \mathbf{B}]$ . (Прим. ред.)

Несколько громоздкое доказательство этого тождества можно найти в любой книге по векторному анализу или аналитической геометрии.

Ниже мы рассмотрим некоторые применения векторных произведений.

1. *Площадь параллелограмма* (рис. 2.21). Абсолютная величина векторного произведения

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB |\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})| \quad (49)$$

равняется площади параллелограмма со сторонами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  (или удвоенной площади треугольника со сторонами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ). Направление вектора  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  перпендикулярно к плоскости параллелограмма, поэтому мы можем считать  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  *вектором площади* параллелограмма. Поскольку мы приписали определенным направлениям сторонам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , вектор площади также получает направление. Имеются физические приложения, где удобно приписывать площади определенное направление.

2. *Объем параллелепипеда*. Скаляр

$$|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}| = V \quad (50)$$

представляет собой объем параллелепипеда с площадью основания  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  и боковым ребром  $\mathbf{C}$ . Если три вектора  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  лежат в одной плоскости, то объем этого параллелепипеда

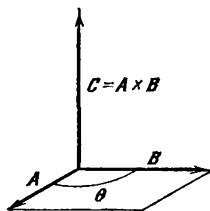


Рис. 2.21. Вектор площади параллелограмма равен  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \times \sin \theta | \hat{c}$ .

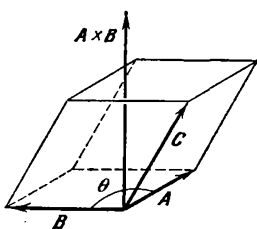


Рис. 2.22.  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  равно произведению площади основания на высоту, т. е. равно объему параллелепипеда.

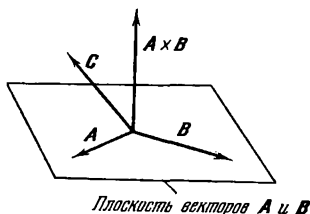


Рис. 2.23.  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  — три вектора. Вектор  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  перпендикулярен к плоскости, образованной векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

будет равен нулю; следовательно, три вектора компланарны \*) тогда и только тогда, когда  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = 0$ .

Рассматривая рис. 2.22, можно установить, что

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}, \quad (51)$$

т. е. в тройном скалярном произведении векторов можно менять местами знаки скалярного и векторного умножений, не изменяя

\*) Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости. (Прим. ред.)

величину произведения. Однако

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}). \quad (52)$$

Величина тройного скалярного произведения не изменяется при циклической перестановке порядка векторов, но меняет знак, если нарушается циклический порядок векторов. Циклическими перестановками для  $ABC$  будут  $BCA$  и  $CAB$ ; антициклическими перестановками для  $ABC$  будут  $BAC$ ,  $ACB$  и  $CBA$ .

3. *Теорема синусов.* Рассмотрим треугольник из векторов, определяемых равенством  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , и помножим векторно на  $\mathbf{A}$  обе части этого равенства:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (53)$$

Но  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ , а абсолютные величины обеих частей равенства (53) должны быть одинаковыми, т. е.

$$AC |\sin(\mathbf{A}, \mathbf{C})| = AB |\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})|, \quad (54)$$

или

$$\frac{\sin(\mathbf{A}, \mathbf{C})}{B} = \frac{\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{C}. \quad (55)$$

Это равенство представляет собой тригонометрическую теорему синусов.

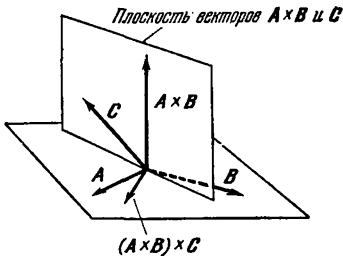


Рис. 2.24. Вектор  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  перпендикулярен к плоскости векторов  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ ; он лежит в плоскости векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

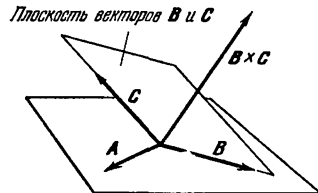


Рис. 2.25. Вектор  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  перпендикулярен к плоскости векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ .

4. *Тройные произведения векторов.* Возможны два вида тройных произведений, являющихся векторами. Вектор

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (56)$$

— это попросту произведение вектора  $\mathbf{C}$  на скаляр  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ . Другое тройное произведение называется *тройным векторным произведением* и имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad (57)$$

т. е. оно является вектором, перпендикулярным к  $\mathbf{A}$  и к  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ . Поскольку вектор  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  перпендикулярен к плоскости, образованной векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , то вектор  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  должен находиться в плоскости векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ . Подобное же рассуждение приводит к тому, что

произведение

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (58)$$

представляет собой вектор, лежащий в плоскости, образованной векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  и перпендикулярной к  $\mathbf{C}$ . Ясно, что (57) и (58) — это разные величины, т. е. положение скобок имеет существенное значение.

Можно выразить тройное векторное произведение как сумму двух слагаемых:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (59)$$

Доказательство этого важного соотношения приводится в руководствах по векторному анализу.

5. *Сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле.* Сила, действующая на точечный электрический заряд в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , пропорциональна составляющей

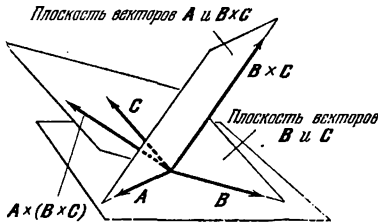


Рис. 2.26. Вектор  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  перпендикулярен к плоскости векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ; он находится в плоскости векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ . Очевидно, что  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  и  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  — это различные векторы.

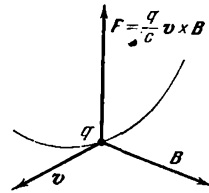


Рис. 2.27. Сила, действующая на положительный заряд  $q$  в магнитном поле.

вектора  $\mathbf{B}$ , перпендикулярной к скорости  $\mathbf{v}$ , с которой движется этот заряд. Это соотношение легко можно выразить в форме векторного произведения:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{в гауссовой системе единиц}) \quad (60)$$

или

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{в системе СИ}). \quad (61)$$

Здесь  $q$  — заряд частицы, а  $c$  — скорость света (рис. 2.27).

Этот закон действия силы подробно рассматривается в т. II.

## 2.4. Векторы в декартовой системе координат

Выражение физических законов в векторной форме отличается изяществом и лаконичностью. Однако в конечном счете мы должны количественно оценить следствия применения этих законов к конкретным физическим условиям. При этом полезно перейти от векторов к определенным системам координат, из которых наиболее

удобной является декартова система. Из-за своей особенной простоты эта система координат чаще всего применяется в физике. Она определяется заданием любой тройки взаимно перпендикулярных единичных векторов  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  и  $\hat{z}$ . Если мы их напишем на доске, не указав стрелками, что это векторы, то это не приведет к недоразумению. Некоторые авторы предпочитают обозначать эти единичные векторы через  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  и  $\hat{k}$ . Направление  $\hat{z}$  относительно  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  определяется правилом правого винта, указанным выше в связи с определением векторного произведения. Согласно этому правилу

$$\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}. \quad (62)$$

Условимся пользоваться только правовинтовыми системами координат. Как мы сообщили бы наше определение правого винта

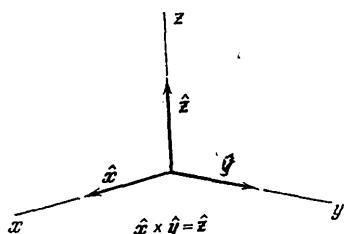


Рис. 2.28. Единичные векторы  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  декартовой ортогональной системы координат.

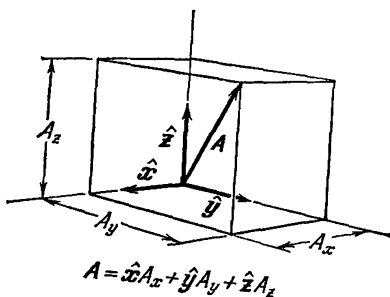


Рис. 2.29

разумному существу, находящемуся в другой Солнечной системе нашей Галактики? Мы можем это сделать с помощью поляризованных по кругу радиоволн \*). Радиосигнал несет информацию, которая сообщает удаленному наблюдателю, как мы задали направление круговой поляризации радиоволн. Этот удаленный наблюдатель должен располагать двумя приемниками, один из которых реагирует на данное направление круговой поляризации сигнала, а другой — на ее противоположное направление. Подобная однозначность в определении направления вращения вектора необходима для любого метода: так, например, первоначально Зеeman при анализе спектрального эффекта, впоследствии названного эффектом Зеemана, неправильно определил направление круговой поляризации света и из-за этого сделал ошибочный вывод, что в атомах колеблющиеся заряды имеют положительный знак \*\*).

\*) Круговая поляризация рассматривается в т. III («Волны»).

Если два гармонических колебания равной амплитуды совершаются в одной плоскости по взаимно перпендикулярным направлениям (оси  $x$  и  $y$ ) при разности фаз, равной  $\pi/2$ , то результатом их сложения является окружность. (Прим. ред.)

\*\*\*) См. P. Zeeman, Philosophical Magazine, ser. 5, 43, 55 and 226 (1897). По подобной же причине 11 июля 1962 г. первая передача со спутника «Тельстар»

*Инвариантность величины  $A^2$  по отношению к повороту системы отсчета.*

Любой вектор  $\mathbf{A}$  можно выразить так (рис. 2.29):

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}. \quad (63)$$

Здесь  $A_x, A_y, A_z$  — проекции вектора  $\mathbf{A}$  на соответствующие координатные оси. Таким образом,

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{x} = A \cos(\mathbf{A}, \hat{x}), \quad (64)$$

и аналогично для  $A_y$  и  $A_z$ . Мы будем иногда обозначать вектор  $\mathbf{A}$  в виде тройки чисел  $(A_x, A_y, A_z)$ . Для квадрата вектора  $\mathbf{A}$  мы получаем такое равенство:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \quad (65)$$

Предположим, что мы оставляем направление вектора  $\mathbf{A}$  неизменным и поворачиваем систему отсчета с осями координат вокруг начала координат, получая при этом новую тройку ортогональных единичных векторов  $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ . В новой системе координат составляющие вектора  $\mathbf{A}$  будут равны  $A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$ :

$$\mathbf{A} = A_{x'} \hat{x}' + A_{y'} \hat{y}' + A_{z'} \hat{z}'. \quad (66)$$

Нетрудно представить себе направление вектора  $\mathbf{A}$  неизменным — мы оставляем вектор  $\mathbf{A}$  неподвижным относительно неподвижных звезд или, что еще удобнее, относительно этой напечатанной страницы. Новая система отсчета поворачивается относительно старой. Длина отрезка  $A$  должна быть независимой от ориентации системы отсчета; следовательно, величина  $A^2$ , рассчитанная исходя из уравнения (66), должна быть тождественной величине  $A^2$  в уравнении (65):

$$A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \quad (67)$$

Это первый встретившийся нам пример *инвариантной формы* \*). Формула, выражающая абсолютную величину вектора, одна и та же во всех декартовых системах координат, отличающихся друг от

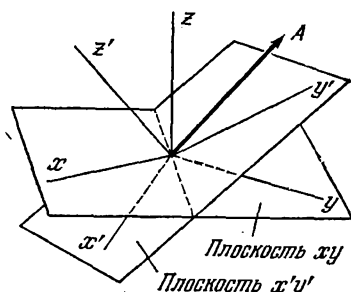


Рис. 2.30. Вектор  $\mathbf{A}$  можно выразить в системе координат  $x, y, z$  или в системе координат  $x', y', z'$ , полученной из  $x, y, z$  путем произвольного поворота. Мы говорим, что  $A^2$  является инвариантной формой по отношению к повороту. Это означает,

$$\text{что } A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2.$$

плохо принималась в Англии из-за «... обращения фазы малой составляющей в антенне, причиной которого было неправильное определение направления круговой поляризации радиоволн» («Таймс», 13 июля 1962 г., стр. 11).

\*) Дирак писал: «Величины, соответствующие важным понятиям в природе, являются инвариантами этих преобразований (или, в более общем случае, «квазиинвариантами», или величинами, которые преобразуются по простым правилам)» (П. А. М. Д и р а к, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960, стр. 12).

друга жестким поворотом осей координат. Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (68)$$

представляет собой другой пример инвариантной формы, как это очевидно из его геометрического определения через проекции.

Векторное произведение, как следует из его геометрического определения, представляет собой еще одну инвариантную форму. Векторное произведение выражается через декартовы координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) = \\ &= A_x B_y (\hat{x} \times \hat{y}) + A_x B_z (\hat{x} \times \hat{z}) + A_y B_x (\hat{y} \times \hat{x}) + \\ &+ A_y B_z (\hat{y} \times \hat{z}) + A_z B_x (\hat{z} \times \hat{x}) + A_z B_y (\hat{z} \times \hat{y}), \end{aligned} \quad (69)$$

где мы использовали соотношение  $\hat{x} \times \hat{x} = 0$  и т. п. Но из определения векторного произведения очевидно, что

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}. \quad (70)$$

Заметьте, что в каждое произведение единичные векторы входят в порядке *xyz* или в его циклической перестановке. Если изменить порядок сомножителей, то меняется знак произведения, потому

что такое изменение приводит к перестановке, антициклической относительно *xyz*:

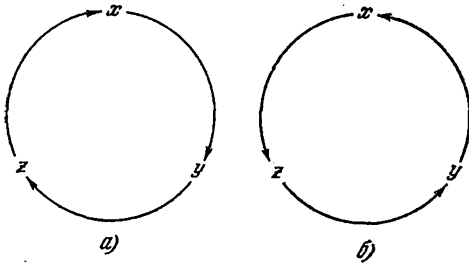


Рис. 2.31. а) Циклический порядок *xyz*. б) Антициклический порядок *xyz*.

$$\begin{aligned} \hat{y} \times \hat{x} &= -\hat{z}, \quad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}, \\ \hat{x} \times \hat{z} &= -\hat{y}. \end{aligned} \quad (71)$$

С учетом этих соотношений равенство (69) принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{x}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{y}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{z}(A_x B_y - A_y B_x). \quad (72)$$

Обратите внимание, что в правую часть формулы (72) входят со знаком плюс те слагаемые, в которых буквы *x, y, z* в обозначениях единичных векторов и индексах при *A* и *B* расположены в порядке *xyz* или в его циклической перестановке; в противоположном случае, т. е. для перестановки, антициклической относительно *xyz*, получается минус. Если вы знакомы с определителями, то вы легко можете проверить, что следующая формула:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad (73)$$

эквивалентна формуле (72) и притом легче запоминается.



Примеры. Различные элементарные действия с векторами. Рассмотрим следующий вектор (рис. 2.32):

$$\mathbf{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}.$$

а) Найти длину вектора  $\mathbf{A}$ . Определим  $A^2$ :

$$A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14,$$

откуда следует, что  $A = \sqrt{14}$  — это длина вектора  $\mathbf{A}$ .

б) Какова длина проекции вектора  $\mathbf{A}$  на плоскость  $xy$ ? Вектор, являющийся проекцией  $\mathbf{A}$  на плоскость  $xy$ , — это  $3\hat{x} + \hat{y}$ ; квадрат длины этого вектора равен  $3^2 + 1^2 = 10$ .

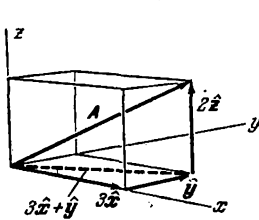


Рис. 2.32. Вектор  $\mathbf{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$  и его проекция на плоскость  $xy$ .

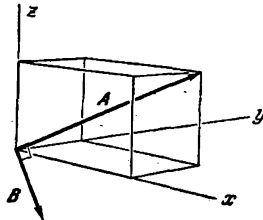


Рис. 2.33. Вектор  $\mathbf{B}$  находится в плоскости  $xy$  и перпендикулярен к вектору  $\mathbf{A}$ .

в) Построить вектор, лежащий в плоскости  $xy$  и перпендикулярный к вектору  $\mathbf{A}$  (рис. 2.33). Запишем в виде

$$\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$$

вектор  $\mathbf{B}$ , обладающий свойством  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ , или

$$(3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y}) = 0.$$

Вычислив скалярное произведение, находим, что

$$3B_x + B_y = 0,$$

или

$$B_y/B_x = -3.$$

Длина вектора  $\mathbf{B}$  не определяется условиями задачи.

г) Построить единичный вектор  $\hat{\mathbf{B}}$ . Для этого вектора  $\hat{B}_x^2 + \hat{B}_y^2 = 1$ , или

$$\hat{B}_x^2 (1^2 + 3^2) = 1 = 10 \hat{B}_x^2.$$

Следовательно,

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x} - \frac{3}{\sqrt{10}} \hat{y} = \frac{\hat{x} - 3\hat{y}}{\sqrt{10}}.$$

д) Найти скалярное произведение вектора  $\mathbf{A}$  на вектор  $\mathbf{C} = 2\hat{x}$ . Можно непосредственно убедиться, что оно равно  $2 \cdot 3 = 6$ .

е) Выразить векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  в системе отсчета, полученной из старой системы отсчета поворотом на  $\pi/2$  по часовой стрелке, если смотреть вдоль положительного направления оси  $z$ . Новые единичные векторы  $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$  связаны со старыми  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  следующими соотношениями:

$$\hat{x}' = \hat{y}, \quad \hat{y}' = -\hat{x}, \quad \hat{z}' = \hat{z}.$$

Все  $\hat{x}$  заменяем на  $-\hat{y}'$ ;  $\hat{y}$  заменяем на  $\hat{x}'$ , таким образом,

$$\mathbf{A} = \hat{x}' - 3\hat{y}' + 2\hat{z}', \quad \mathbf{C} = -2\hat{y}'.$$

ж) Найти скалярное произведение векторов  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ , когда эти векторы выражены в штрихованной системе координат. По результатам

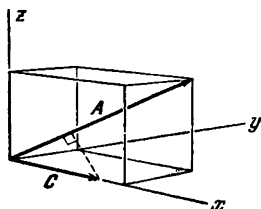


Рис. 2.34. Проекция вектора  $\mathbf{C} = 2\hat{x}$  на вектор  $\mathbf{A}$ .

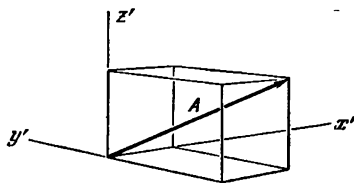


Рис. 2.35. Штрихованная система отсчета  $x', y', z'$  получена из нештрихованной системы  $x, y, z$  поворотом на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $z$ .

предыдущего пункта получим  $(-3) \cdot (-2) = 6$ , точно так же, как и в нештрихованной системе.

з) Найти векторное произведение  $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ . В нештрихованной системе оно равно

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{y} - 2\hat{z}.$$

Образую скалярные произведения, можно убедиться, что этот вектор перпендикулярен как к  $\mathbf{A}$ , так и к  $\mathbf{C}$ .

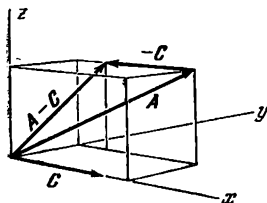


Рис. 2.36. Вектор  $\mathbf{A} - \mathbf{C}$ .

и) Рассчитать вектор  $\mathbf{A} - \mathbf{C}$  (рис. 2.36). Получаем

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} = (3 - 2)\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z} = \hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}.$$

Запись в виде векторного произведения особенно удобна для выражения угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела. Мы видели, что повороты на конечный угол не являются векторами, потому что два таких поворота не подчиняются закону сложения векторов. Но угловая скорость, по определению, представляет собой предел отношения бесконечно малого угла поворота к бесконечно малому интервалу времени, за который происходит этот поворот. Порядок, в котором совершаются два бесконечно малых

поворота, не влияет на окончательное положение предмета, если исключить слагаемые такого же порядка малости, как квадрат величины бесконечно малых поворотов, а эти слагаемые исчезают при соответствующем переходе к пределу. В одной из последующих глав мы докажем это и рассмотрим элементарную динамику вращающихся тел.

Иногда мы говорим о скалярной функции положения, например о температуре  $T(x, y, z)$  в точке  $(x, y, z)$  как о *скалярном поле*. Подобно этому о векторе, значение которого является функцией положения, например о скорости  $v(x, y, z)$  материальной точки, находящейся в точке  $(x, y, z)$ , мы говорим как о *векторном поле*. Векторный анализ в значительной своей части посвящен скалярным и векторным полям и дифференциальным операциям над векторами, подробно рассматриваемым в т. II.

## 2.5. Часто применяемые векторные тождества

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (74)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{x}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{y}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{z}(A_x B_y - A_y B_x), \quad (75)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}, \quad (76)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}, \quad (77)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad (78)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] \mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \mathbf{D}, \quad (79)$$

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}). \quad (80)$$

### Задачи

При решении предлагаемых задач применяйте векторные методы, где это возможно.

1. *Составляющие вектора.* Поставьте на листе бумаги две точки, обозначьте их  $O$  и  $P$  (рис. 2.37). Проведите отрезок от  $O$  к  $P$ , обозначив его конец стрелкой.

а) Найти  $x$  и  $y$  — составляющие вектора  $\vec{OP}$  (в см).

б) Параллельно осям на рис. 2.37 провести другую пару осей, проходящих через точку  $O$ ; каковы новые составляющие этого вектора  $x'$  и  $y'$ ?

в) Повернуть вторую пару осей на  $30^\circ$  против часовой стрелки и найти составляющие вектора  $x''$  и  $y''$  в новой системе координат.

2. *Сложение векторов.* Построить результаты следующих операций сложения векторов:

а) Сложить вектор длиной 2 см, направленный на восток, с вектором длиной 3 см, направленным на северо-запад.

б) Сложить вектор длиной 8 см, направленный на восток, с вектором длиной 12 см, направленным на северо-запад.

в) Сравнить результаты пунктов а) и б) и сформулировать теорему о сложении двух векторов, кратных двум другим векторам.

3. *Умножение на скаляр.* Пусть  $\mathbf{A}$  — вектор длиной 2,0 см, направленный под углом  $70^\circ$  к востоку от северного направления, а  $\mathbf{B}$  — вектор длиной 3,5 см, направленный под углом  $130^\circ$  к востоку от северного направления. При решении

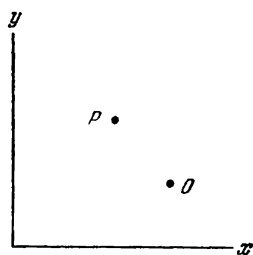


Рис. 2.37

пользуйтесь транспортиром или специальной бумагой, разграфленной в полярных координатах.

а) Построить векторы, указанные выше, и еще два вектора, удлинненные в 2,5 раза.

б) Умножить  $\mathbf{A}$  на  $-2$  и  $\mathbf{B}$  на  $+3$  и найти сумму полученных векторов.

О т в е т. Вектор длиной 9,4 см, направленный под углом  $150^\circ$  к востоку от северного направления.

в) Отметить точку, находящуюся на 10 см к северу от начала координат. Найти такие векторы, кратные  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , чтобы векторная сумма этих кратных была вектором, идущим из начала координат в отмеченную точку.

4. *Единичные векторы.* а) Начертить вектор единичной длины, умножить его на 4 и начертить новый вектор.

б) Начертить другой единичный вектор, перпендикулярный к построенному вектору, имеющему длину 4 единицы. Помножить его на  $-3$  и сложить с вектором длиной в 4 единицы.

в) Пользуясь осями координат, направленными вдоль единичных векторов, найти  $x$ - и  $y$ -составляющие суммы векторов.

г) Любой произвольный вектор на плоскости можно выразить в виде суммы определенных кратных двух непараллельных векторов. В чем состоит особое удобство ортогональных (т. е. взаимно перпендикулярных) единичных векторов? ( $\mathcal{V}$  к а з а н и е: рассмотреть скалярное произведение двух векторов.)

5. *Скалярное и векторное произведения двух векторов.* Даны два вектора:  $\mathbf{a} = 3\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z}$  и  $\mathbf{b} = -\hat{x} + 2\hat{y} + 6\hat{z}$ . Рассчитать, пользуясь векторными методами:

а) Длину каждого вектора.

О т в е т.  $a = \sqrt{50}$ ;  $b = \sqrt{41}$ .

б) Скалярное произведение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

О т в е т.  $-25$ .

в) Угол между векторами.

О т в е т.  $123,5^\circ$ .

г) Направляющие косинусы каждого из векторов.

д) Сумму  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  и разность  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

О т в е т.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\hat{x} + 6\hat{y} + \hat{z}$ .

е) Векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

О т в е т.  $34\hat{x} - 13\hat{y} + 10\hat{z}$ .

6. *Векторная алгебра.* Два вектора заданы так, что

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 11\hat{x} - \hat{y} + 5\hat{z}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = -5\hat{x} + 11\hat{y} + 9\hat{z}.$$

а) Найти  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

б) Пользуясь векторными методами, найти угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .

7. *Сложение скоростей.* Пилот ведет самолет к пункту, находящемуся на 200 км к востоку от места взлета. Ветер дует с северо-запада со скоростью 30 км/час. Вычислить вектор скорости самолета относительно движущегося воздуха, если согласно расписанию он должен достичь места назначения за 40 мин.

О т в е т.  $\mathbf{v} = (279\hat{x} + 21\hat{y})$  км/час; вектор  $\hat{x}$  направлен на восток, вектор  $\hat{y}$  — на север.

8. *Обращение осей координат.* Можно ли превратить правую систему единичных координатных векторов в левую систему, помножив все три единичных вектора на один скаляр? Какое это число?

9. *Операции с векторами; относительный радиус-вектор.* Две частицы испускаются одним и тем же источником, и к данному моменту времени они достигли следующих положений:

$$\mathbf{r}_1 = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 8\hat{z}, \quad \mathbf{r}_2 = 2\hat{x} + 10\hat{y} + 5\hat{z}.$$

а) Изобразить положения частиц и написать выражение для перемещения  $\mathbf{r}$  частицы 2 относительно частицы 1.

О т в е т.  $r_1 = 9,4$ ;  $r_2 = 11,3$ ;  $r = 7,9$ .

б) Пользуясь скалярным произведением, найти абсолютную величину каждого вектора.

в) Вычислить углы между всеми возможными парами из этих трех векторов.

г) Вычислить величину проекции  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{r}_1$ .

О т в е т.  $-1, 2$ .

д) Вычислить векторное произведение  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ .

О т в е т.  $-65\hat{x} - 4\hat{y} + 34\hat{z}$ .

10. *Наименьшее расстояние между двумя материальными точками.* Две материальные точки 1 и 2 движутся вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно со скоростями  $\mathbf{v}_1 = 2\hat{x}$  см/сек и  $\mathbf{v}_2 = 3\hat{y}$  см/сек. При  $t=0$  их координаты равны:  $x_1 = -3$  см,  $y_1 = 0$ ;  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = -3$  см.

а) Найти вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , выражающий положение материальной точки 2 относительно точки 1 как функцию времени.

О т в е т.  $\mathbf{r} = [(3-2t)\hat{x} + (3t-3)\hat{y}]$  см.

б) Когда и где расстояние между этими материальными точками, является наименьшим?

О т в е т.  $t = 1, 15$  сек.

11. *Внутренние диагонали куба.* Чему равен угол между двумя пересекающимися внутренними диагоналями куба? (Внутренняя диагональ соединяет две вершины и проходит внутри куба. Диагональ грани соединяет две вершины и проходит по грани куба.)

12. *Условие перпендикулярности векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .* Доказать, что вектор  $\mathbf{a}$  перпендикулярен к вектору  $\mathbf{b}$ , если  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ .

13. *Площадь поверхности тетраэдра.* Рассмотрите тетраэдр, вершины которого  $O, A, B, C$  находятся соответственно в начале координат и на осях  $x, y, z$  (радиус-вектор вершины  $A$  равен  $\mathbf{a} = a\hat{x}$  и т. д.). Вывести выражение для площади его поверхности, которая равна сумме площадей всех его треугольных граней.

14. *Объем параллелепипеда.* Ребра параллелепипеда описываются векторами  $\hat{x} + 2\hat{y}$ ,  $4\hat{y}$  и  $\hat{y} + 3\hat{z}$ , идущими из начала координат. Найти его объем.

О т в е т. 12.

15. *Равновесие сил.* Пусть на материальную точку одновременно действуют три силы  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  и  $\mathbf{F}_3$ . Результирующая сила  $\mathbf{F}_p$  представляет собой просто векторную сумму этих сил. Материальная точка считается находящейся в равновесии, если  $\mathbf{F}_p = 0$ .

а) Доказать, что если  $\mathbf{F}_p = 0$ , то векторы, изображающие эти три силы, образуют треугольник.

б) Если, как сказано выше,  $\mathbf{F}_p = 0$ , то может ли быть, чтобы один из векторов находился вне плоскости, образованной двумя другими?

в) Материальная точка, находящаяся под действием силы в 10 н, направленной вниз по вертикали, и подвешенная на веревке (натяжение 15 н), образующей с вертикалью угол  $0,1$  рад, не может находиться в равновесии. Какая третья сила необходима, чтобы достигалось равновесие? Является ли ответ однозначным?

16. *Работа, совершенная силами.* На материальную точку при ее перемещении из положения  $A(20; 15; 0)$  (см) в положении  $B(0; 0; 7)$  (см) одновременно действуют две постоянные силы

$$\mathbf{F}_1 = (\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}) \text{ дин}$$

и

$$\mathbf{F}_2 = (4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z}) \text{ дин.}$$

а) Какова работа (в эргах), совершенная над материальной точкой? Совершенная работа (см. гл. 5) определяется как  $\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{F}_p$  — результирующая сила (здесь  $\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ ), а  $\mathbf{r}$  — перемещение материальной точки.

О т в е т.  $-48$  эрг.

б) Предположим, что действуют те же силы, но движение совершается от  $B$  к  $A$ . Какова в этом случае работа, совершенная над материальной точкой?

17. *Момент силы относительно точки.* Момент, или вращающий момент,  $\mathbf{N}$  силы относительно данной точки определяется как  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{r}$  — вектор, идущий из

данной точки в точку приложения силы  $F$ . Пусть сила  $F = -3\hat{x} + \hat{y} + 5\hat{z}$  приложена в точке  $g = (7\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z})^*$ . Помните, что  $F \times r = -r \times F$ .

а) Каков момент силы (в *дин·см*) относительно начала координат? (Результат определения  $N$  выразить в виде линейной комбинации  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  и  $\hat{z}$ .)

О т в е т.  $14\hat{x} - 38\hat{y} + 16\hat{z}$ .

б) Каков момент силы относительно точки  $(0, 10, 0)$ ?

О т в е т.  $36\hat{x} - 38\hat{y} - 14\hat{z}$ .

18. *Выражение векторного произведения в виде определителя.* Заметьте, что выражение, развертывающее  $A \times B$  по составляющим, содержит слагаемые вида  $A_i B_j - B_i A_j$ . Это как раз представляет собой определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j \\ B_i & B_j \end{vmatrix}.$$

а) Доказать, что если оперировать с единичными векторами, как с числами, то

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

б) Доказать далее, что

$$C \cdot (A \times B) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

19. *Движение по закону «случайных блужданий».* Материальная точка движется в пространстве по траектории, которая состоит из  $N$  равных отрезков длиной по  $s$  каждый. Ориентация каждого отрезка совершенно произвольна, и не существует какой-либо связи между направлениями любых двух отрезков. Суммарное перемещение:

$$S = \sum_{i=1}^N s_i.$$

Доказать, что при этих условиях среднее квадратичное смещение конечного положения этой точки относительно ее начального положения равно  $\langle S^2 \rangle = Ns^2$ , где через  $\langle \rangle$  обозначено среднее значение величины. (У к а з а н и е: предположение, что направление каждого отрезка не зависит от направления всех других отрезков, означает, что  $\langle s_i \cdot s_j \rangle = 0$  для всех  $i$  и  $j$ , за исключением  $i = j$ .)

### Д о п о л н е н и е 1. Векторы и сферические полярные координаты

В сферических координатах положение точки выражается величинами  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , причем  $r$  — это абсолютная величина вектора  $g$ , проведенного из начала координат к данной точке;  $\theta$  — угол между вектором  $g$  и полярной осью  $z$ , а  $\varphi$  — угол между осью  $x$  и проекцией вектора  $g$  на экваториальную плоскость, т. е. на плоскость  $xy$  (рис. 2.38). При этом всегда  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Проекция вектора  $g$  на плоскость  $xy$  имеет величину  $r \sin \theta$ . Заметьте, что декартовы координаты точки связаны с ее сферическими координатами следующими равенствами:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta. \quad (81)$$

а) Пусть первая точка занимает положение  $g_1 \equiv (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ , а вторая точка — положение  $g_2 \equiv (r_2, \theta_2, \varphi_2)$ . Пусть  $\theta_{12}$  — это угол между векторами  $g_1$  и  $g_2$ . Выражая скалярное произведение  $g_1 \cdot g_2 = \cos \theta_{12}$  через  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ , можно показать, что

$$\cos \theta_{12} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad (82)$$

\*) Под точкой  $g$  подразумевается точка, имеющая в данной системе отсчета радиус-вектор  $g$ . (Прим. ред.)

Где мы воспользовались тригонометрическим тождеством

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2. \quad (83)$$

Это хороший пример эффективности векторных методов (попробуйте получить формулу (82) другим способом!).

б) Подобным же образом, образуя векторное произведение  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ , найдите соотношение для  $\sin \theta_{12}$ .

Цилиндрические полярные координаты  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  определяются следующими их соотношениями с прямоугольными координатами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

При использовании двух измерений координаты сводятся только к  $\rho$  и  $\varphi$ .

## Дополнение 2. Кристаллические решетки и обратная решетка

Предположим, что пространство внутри определенной области является евклидовым. Наше предположение означает, что если все предметы, как-либо участвующие в данном опыте или наблюдении, сместить параллельно их первоначальному положению на величину одного и того же вектора переноса  $\mathbf{t}$ , то в результате этого опыта ничего не изменится. Поэтому, когда мы говорим, что законы физики

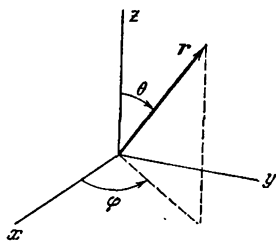


Рис. 2.38.

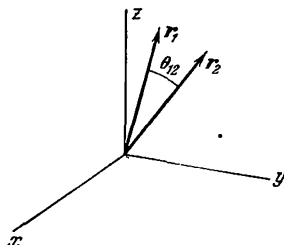


Рис. 2.39.

инвариантны по отношению к любому параллельному переносу  $\mathbf{t}$ , то это значит, что все тела, как-то участвующие в данном опыте, должны совершать одинаковое перемещение. Например, законы движения маятника не останутся инвариантными, если перенести этот маятник с уровня моря на вершину Эвереста: мы знаем, что в результате такого перемещения маятника относительно окружающих предметов, оставшихся неподвижными, изменится его собственная частота, так как изменится величина ускорения силы тяжести  $g$ .

Кристалл представляет собой регулярное расположение атомов в пространстве. Если мысленно представить себя движущимися внутри *неподвижного* кристалла, то мы увидим, что окружающая среда значительно меняется от точки к точке. Окружающий мир, каким он представлялся бы электрону, движущемуся внутри неподвижного кристалла, не обладает по отношению к параллельному переносу \*) той полной инвариантностью, которая характерна для мира вне кристалла, в свободном пространстве. В кристалле окружающая среда вокруг точки  $g'$  будет такой же, что и окружающая среда вокруг точки  $g$ , только в том случае, если эти две точки находятся друг от друга на расстоянии, кратном периоду повторяемости кристаллической решетки.

По определению мы называем идеальным кристаллом систему, состоящую из атомов, расположенных в кристаллической решетке таким образом, что существуют три вектора элементарных трансляций  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , обладающие следующим свойством: расположение атомов, если смотреть на него из любой точки  $g$ , выглядит во всех отношениях одинаковым с расположением атомов, наблюдаемым из точки

\*) В кристаллографии такой параллельный перенос называется трансляцией.  
(Прим. ред.)

$g'$ , связанной с точкой  $g$  следующим соотношением:

$$g' = g + n_1 a + n_2 b + n_3 c, \quad (84)$$

где  $n_1, n_2, n_3$  — произвольные целые числа. Заметьте, что  $a, b, c$  — это не векторы единичной длины; обычно они имеют длину порядка размеров атомов или немного больше. Система векторов элементарных трансляций называется *примитивной*, если лю бы е две точки  $g$  и  $g'$ , из которых расположение атомов выглядят совершенно одинаковым, могут быть связаны соотношением типа (84) при соответствующем выборе целых чисел  $n_1, n_2, n_3$ .

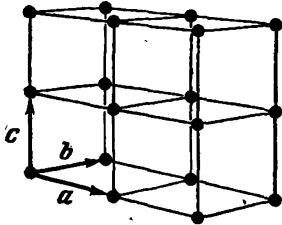


Рис. 2.40. Изображение небольшой части кристаллической решетки с векторами элементарных трансляций  $a, b, c$ . В изображенном здесь частном случае векторы  $a, b$  и  $c$  ортогональны, но для многих кристаллов  $a, b$  и  $c$  не ортогональны.

Таким образом, пространство внутри неподвижного кристалла обладает инвариантностью не относительно любого параллельного переноса, а только относительно параллельных переносов следующего вида:

$$t = n_1 a + n_2 b + n_3 c, \quad (85)$$

где  $n_1, n_2, n_3$  — целые числа. Законы механики для движения электрона внутри неподвижного кристалла могут существенно отличаться от тех простых законов механики, которые выполняются в свободном пространстве. Для ознакомления с особенностями движения электронов внутри кристалла можно рекомендовать книгу Ч. Киттеля «Введение в физику твердого тела» (Физматгиз, 1963), содержание которой будет вполне понятно вам после изучения т. IV этого курса, посвященного квантовой физике.

Чаще всего примитивные векторы элементарных трансляций  $a, b, c$  не ортогональны. Математический анализ явлений, связанных с кристаллическим состоянием, и, в частности, дифракция рентгеновских лучей и электронов в кристаллических решетках сильно упрощается с помощью введенного Дж. В. Гиббсом

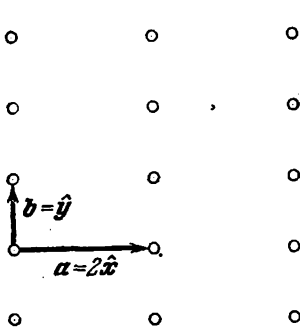


Рис. 2.41. Прямая кристаллическая решетка, для которой  $a = 2\hat{x}$  и  $b = \hat{y}$ .

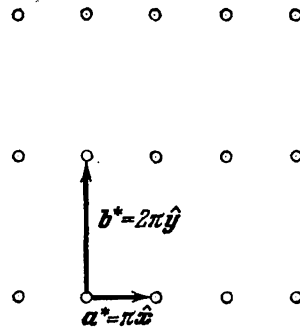


Рис. 2.42. Обратная решетка, для которой  $a^* = \pi\hat{x}$  и  $b^* = 2\pi\hat{y}$ . Масштаб отличается от масштаба рис. 2.41.

понятия об обратной решетке. Векторы элементарных трансляций обратной решетки  $a^*, b^*, c^*$  выражаются через примитивные векторы элементарных трансляций прямой решетки посредством следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a^* &= 2\pi \frac{b \times c}{a \cdot (b \times c)}, & b^* &= 2\pi \frac{c \times a}{a \cdot (b \times c)}, \\ c^* &= 2\pi \frac{a \times b}{a \cdot (b \times c)}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$



В это определение вводится удобный коэффициент  $2\pi$ , которого нет в обычном кристаллографическом определении, даваемом в элементарных руководствах.

**П р и м е ч а н и е.** Единицы абсолютной величины векторов элементарных трансляций обратной решетки — это не единицы длины. Если длина векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  измеряется в сантиметрах, то величина векторов  $\mathbf{a}^*$ ,  $\mathbf{b}^*$ ,  $\mathbf{c}^*$  измеряется в обратных сантиметрах ( $\text{см}^{-1}$ ).

а) Показать, что  $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} = 2\pi$ ,  $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{c} = 0$ .

б) Пусть для двумерной кристаллической решетки в соответствующих единицах

$$\mathbf{a} = 4\hat{x}, \quad \mathbf{b} = \hat{y},$$

где  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  — единичные векторы осей прямоугольных декартовых координат. Изобразите часть решетки. Найдите  $\mathbf{a}^*$  и  $\mathbf{b}^*$  и изобразите часть обратной решетки. (У к а з а н и е: пусть  $\mathbf{c} = z$ , если это облегчит вам соответствующие определения для двумерной решетки.)

в) Для другой двумерной решетки

$$\mathbf{a} = \hat{x}, \quad \mathbf{b} = \hat{x} \cos \frac{\pi}{3} + \hat{y} \sin \frac{\pi}{3}.$$

Изобразите часть решетки; найдите векторы элементарных трансляций обратной решетки и изобразите обратную решетку.

г) Показать, что

$$V^* = \frac{(2\pi)^3}{V},$$

где  $V$  — это объем  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  элементарной ячейки прямой решетки, а  $V^*$  — объем  $\mathbf{a}^* \cdot (\mathbf{b}^* \times \mathbf{c}^*)$  элементарной ячейки обратной решетки. Для вывода этой формулы потребуется произвести довольно кропотливые выкладки.

### М а т е м а т и ч е с к о е д о п о л н е н и е 1. Равенство векторов в сферическом пространстве

Наше определение равенства двух векторов исходит из предположения, что пространство является евклидовым. В пространстве, обладающем кривизной, нельзя однозначно произвести сравнение двух векторов, если эти векторы имеют различные точки приложения. В качестве примера рассмотрим двумерное искривленное пространство, образованное поверхностью обыкновенного трехмерного шара. В этом пространстве мы должны считать «прямыми» линиями дуги больших кругов шара, потому что они представляют собой кратчайшие расстояния между точками \*).

Если в таком двумерном пространстве нам надо сравнить два вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , то мы должны передвинуть вектор  $\mathbf{B}$ , не меняя его направления, таким образом, чтобы совместить его начальную точку с начальной точкой вектора  $\mathbf{A}$ . Но что означает «не меняя его направления»? Следуя методу построения, применявшемуся в неискривленном пространстве, мы проводим «прямую» линию через  $O_A$  и  $O_B$ . Затем мы перемещаем вектор  $\mathbf{B}$  так, чтобы его начальная точка перемещалась по этой «прямой» по направлению к начальной точке вектора  $\mathbf{A}$ , и делаем это таким образом, чтобы не менялся угол между вектором  $\mathbf{B}$  и «прямой» линией  $O_A O_B$  (рис. 2.43).

После этого мы можем проверить наш способ сравнения, сначала переместив начало вектора  $\mathbf{B}$  в точку  $O_C$ , сравнив его там с вектором  $\mathbf{C}$ , а затем перемещая  $\mathbf{B}$  вдоль «прямой»  $O_C O_A$ , чтобы сравнить его потом с  $\mathbf{A}$  (рис. 2.44). Но эти два способа сравнения  $\mathbf{B}$  с  $\mathbf{A}$  дают различные ответы. Пусть в данном частном случае оба вектора

\*) Линия, каждый отрезок которой  $MN$  является кратчайшим расстоянием между точками  $M$  и  $N$ , называется в математике геодезической линией. Только в евклидовом пространстве геодезические линии всегда являются прямыми. (Прим. ред.)

А и В перпендикулярны к «прямой»  $O_A O_B$  и поэтому параллельны между собой. Выберем вектор С так, чтобы он был параллелен В в том смысле, что С и В образуют одинаковые углы с «прямой»  $O_C O_B$ . Однако из рис. 2.43 ясно видно, что вектор С не будет параллельным вектору А, потому что они не образуют равных углов с «прямой», соединяющей  $O_C$  и  $O_A$ . Итак, мы пришли к противоречию: вектор В параллелен вектору А, а вектор С параллелен вектору В, но вектор С не параллелен вектору А. При этом для каждой пары брался наикратчайший путь сравнения. Если мы сначала сравним В с С, а затем С с А, то мы найдем, что вектор В не параллелен вектору А.

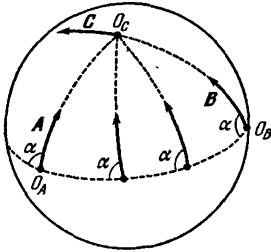


Рис. 2.43. Один возможный способ сравнения направлений векторов В и А заключается в перемещении В (начиная с точки  $O_B$ ) вдоль экватора, но при этом так, что вектор В остается направленным на  $O_C$ , пока начало вектора В не попадет в точку  $O_A$ .

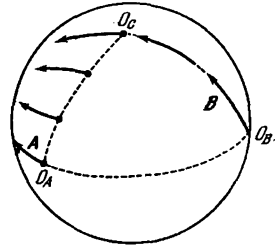


Рис. 2.44. Здесь вектор В перемещается с целью сравнения с А вдоль меридиана, пока его начальная точка не попадет в  $O_C$ , затем он смещается в боковом направлении вниз до экватора.

В качестве упражнения определите длину сторон сферического треугольника  $O_A O_B O_C$ , если при параллельном переносе вектора В сначала вдоль линии  $O_B O_C$ , а затем вдоль линии  $O_C O_A$  этот вектор В оказался перпендикулярным к вектору А. Примите длину окружности большого круга за единицу.

## Математическое дополнение 2. Обобщенная векторная система обозначений в декартовых координатах

Операции с векторными величинами и их выражение в обычной декартовой системе координат упрощаются посредством некоторого изменения обозначений. Новая система обозначений позволяет дать явные выражения для составляющих произведений векторов в более кратком виде, чем это было выведено выше.

Обозначим основные единичные векторы декартовой системы координат соответственно через  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  и введем *дельта-символ Кронекера*  $\delta_{ij}$ , по определению равный

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (87)$$

где индексы  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2, 3. Тогда выражение вектора А через его составляющие в декартовых координатах принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i. \quad (88)$$

Греческая заглавная буква  $\Sigma$  означает, что нужно просуммировать величину, следующую за знаком  $\Sigma$ , по интервалу значений индексов, указанному снизу и сверху этой буквы. Введем условие, что эта буква не пишется, когда суммирование следует производить только по повторяющемуся индексу, обозначенному

греческой буквой, т. е.

$$A_\mu \hat{e}_\mu \equiv \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i = A. \quad (89)$$

Тогда, например, для скалярного произведения получаем

$$A \cdot B = \left( \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 B_i \hat{e}_i \right) = \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_\mu B_\mu. \quad (90)$$

При этом используется следующее соотношение:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}. \quad (91)$$

Таким же образом получается

$$A (B \cdot C) = \hat{e}_\mu A_\mu B_\nu C_\nu. \quad (92)$$

Заметим теперь, что

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = \hat{e}_3 \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) = \hat{e}_2 \cdot (\hat{e}_3 \times \hat{e}_1) = 1, \quad (93)$$

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_3 \times \hat{e}_2) = \hat{e}_3 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_1) = \hat{e}_2 \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_3) = -1, \quad (94)$$

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) = \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_1) = \dots = 0, \quad (95)$$

где многоточие в равенствах (95) относится к другим возможным произведениям вида  $\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$ , содержащим по меньшей мере два одинаковых индекса. Можно обобщить равенства (93) — (95), введя новый символ — *тензор Леви — Чивита*  $\varepsilon_{ijk}$ , по определению равный

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если индексы следуют в циклическом порядке,} \\ -1, & \text{если индексы следуют в антициклическом порядке,} \\ 0, & \text{если два индекса одинаковы,} \end{cases} \quad (96)$$

где индексы  $i, j, k$  принимают значения 1, 2, 3. Циклический порядок — это последовательности 123, 312, 231; антициклический порядок — это последовательности 132, 321, 213. Равенства (93), (94) и (95) принимают следующий вид:

$$\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \varepsilon_{ijk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (97)$$

Компоненты векторного произведения в декартовых координатах выражаются следующим образом:

$$A \times B = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i A_j B_k = \varepsilon_{\lambda\mu\nu} \hat{e}_\lambda A_\mu B_\nu. \quad (98)$$

В качестве упражнения вычислите  $(A \times B)^2$ , пользуясь формулой (98).

### Из истории физики. Дж. В. Гиббс

Рассказ о происхождении векторного анализа цитируется по гл. 7 книги Л. Ф. Уилера «Джошуа Виллард Гиббс. История великого ума» (Yale Univ. Press, New Haven, Conn., 1962).

...Вероятно, Гиббс слишком хорошо понимал значение системы обозначений, когда он писал: «Именно сомнения относительно преимущества различных систем обозначений, удерживавшие меня ранее от каких-либо публикаций по данному предмету и удерживавшие меня также сейчас от какой-либо формы окончательной публикации, ... вызвали у меня ощущение, что в моем способе применения символов кроется какая-то неточность». Гиббс ввел точку и крест для обозначения скалярного и векторного произведений. Значение разработки векторного анализа иллюстрируется следующей характеристикой, данной самим Гиббсом: «Если я достиг каких-то успехов в математической физике, то это, как я думаю, произошло потому, что я смог преодолеть математические трудности».

## ГЛАВА 3

### ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

#### 3.1. Формулировка законов движения Ньютона

Эта глава в основном посвящена законам движения Ньютона, которые уже изучались в курсе средней школы. Сформулируем их сначала для тел с постоянной массой.

*Первый закон Ньютона.* Тело остается в состоянии покоя или движения с постоянной скоростью (без ускорения), если оно предоставлено само себе, т. е. на него не действуют никакие внешние силы. Это означает:

$$a = 0, \quad \text{когда} \quad F = 0.$$

*Второй закон Ньютона.* Результирующая сила, действующая на тело, равна произведению массы этого тела на его ускорение:

$$F = Ma.$$

*Третий закон Ньютона.* При взаимодействии двух тел сила  $F_{12}$ , действующая на второе тело (2) со стороны первого (1), равна по величине и противоположна по направлению силе  $F_{21}$ , действующей на первое тело (1) со стороны второго (2):

$$F_{12} = -F_{21}.$$

Имеются определенные пределы применимости третьего закона. Мы знаем (о чем еще будем говорить в гл. 10), что все сигналы и силы передаются с конечной скоростью. Однако третий закон содержит утверждение, что сила  $F_{12}$  равна по величине и противоположна силе  $F_{21}$ , когда обе они измеряются *в один и тот же момент*. Это требование противоречит факту, что данное тело воспринимает действие силы, оказываемое другим телом, не мгновенно, а через конечный промежуток времени. Поэтому третий закон Ньютона не всегда является достаточно хорошим приближением для рассмотрения столкновений атомов. Для столкновений же автомобилей он будет очень хорошим приближением, потому что продолжительность такого столкновения велика по сравнению с промежутком времени,

нужным для того, чтобы световой сигнал прошел вдоль длины помятого автомобиля. Этот промежуток времени имеет следующий порядок величины:

$$\frac{L}{c} \approx \frac{300 \text{ см}}{3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}} \approx 10^{-8} \text{ сек},$$

где  $L$  — длина помятого автомобиля (за  $10^{-8}$  сек автомобиль, движущийся со скоростью 100 км/час, т. е. около  $3 \cdot 10^3$  см/сек, проходит около  $3 \cdot 10^{-6}$  см).

Первые два закона движения выполняются только тогда, когда наблюдение ведется в системах отсчета, движущихся без ускорения. Это видно из нашего повседневного опыта. Например, если система отсчета неподвижно связана с вращающейся каруселью, то в такой системе отсчета ускорение тела не равно нулю, когда на это тело не действуют силы. Вы сможете неподвижно стоять на карусели, только если будете отталкиваться от чего-либо, сообщая вашему телу силу  $M\omega^2 r$  по направлению к оси, где  $M$  — ваша масса,  $\omega$  — угловая скорость, а  $r$  — расстояние от вас до оси вращения. Другой пример — система отсчета, неподвижно связанная с самолетом, который быстро набирает скорость при взлете. Благодаря ускорению вас прижимает назад к сиденью, а сила, действующая со стороны спинки сиденья, удерживает вас в состоянии покоя относительно этой системы.

Если бы вы находились в состоянии равномерного движения или покоя относительно системы отсчета, не имеющей ускорения, то для этого не требовалось бы никакой силы. Но если вы хотите находиться в состоянии покоя относительно системы отсчета, движущейся с ускорением, то вы должны прилагать силу или испытывать действие силы со стороны другого тела — вам нужна веревка, чтобы удержаться, или сиденье, чтобы прижиматься к нему. Силы, автоматически возникающие в системах отсчета, движущихся с ускорением, играют важную роль в физике. Особенно важно понять характер сил, которые действуют в системе отсчета, совершающей вращательное движение. Поэтому целесообразно кратко изложить здесь еще раз эти вопросы, которые уже изучались в курсе средней школы.

**Пр и м е р. Ультрацентрифуга.** Результаты того, что тело находится в неинерциальной системе отсчета, могут иметь огромное практическое значение. Рассмотрим молекулу, находящуюся во взвешенном состоянии в жидкости, которая содержится в пробирке ультрацентрифуги. Предположим, что молекула находится на расстоянии 10 см от оси вращения и что центрифуга вращается со скоростью 1000 об/сек (60 000 об/мин). Тогда угловая скорость равна

$$\omega = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^3 \cong 6 \cdot 10^3 \text{ рад/сек},$$

а линейная скорость

$$v = \omega r \cong 6 \cdot 10^3 \cdot 10 = 6 \cdot 10^4 \text{ см/сек}.$$

Величина ускорения при круговом движении равна  $\omega^2 r$  (мы это вывели в гл. 2):

$$a = \omega^2 r \cong (6 \cdot 10^3)^2 \cdot 10 \cong 4 \cdot 10^8 \text{ см/сек}^2.$$

Но ускорение силы тяжести на поверхности Земли составляет всего  $980 \text{ см/сек}^2$ , так что отношение ускорения вращательного движения к ускорению силы тяжести равно

$$\frac{a}{g} \cong \frac{4 \cdot 10^8}{10^3} \cong 4 \cdot 10^5.$$

Таким образом, ускорение в ультрацентрифуге в 400 000 раз больше ускорения силы тяжести (эти данные относятся к ультрацентрифугам типа показанной на рис. 3.1). На взвешенные в жидкости молекулы растворенного вещества, *плотность* (отношение массы к объему) которых отличается от плотности окружающей жидкости, будет действовать в пробирке ультрацентрифуги очень большая центробежная сила, стремящаяся отделить их от жидкости. Если же их плотность равна плотности жидкой среды, то отделение не будет происходить.

Согласно первому закону Ньютона взвешенная молекула стремится остаться неподвижной (или двигаться по прямой с постоянной скоростью), если

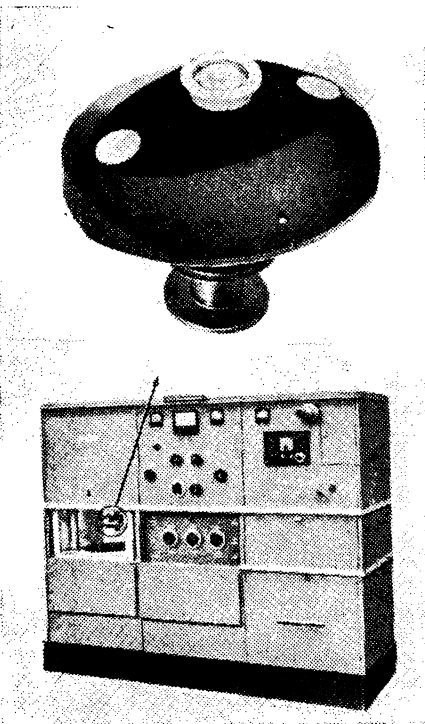


Рис. 3.1. Ротор ультрацентрифуги. Эта ультрацентрифуга работает со скоростью вращения 60 000 об/мин, и в ней возникает центробежное ускорение, превышающее ускорение силы тяжести почти в 300 000 раз.

рассматривать ее движение относительно лаборатории (лаборатория представляет собой достаточно хорошее приближение к системе отсчета, не имеющей ускорения). Молекула в ультрацентрифуге как бы противится бешеному вращению с большой угловой скоростью. Для наблюдателя, покоящегося относительно ротора ультрацентрифуги, молекула растворенного вещества будет вести себя так, как если бы на нее действовала сила величиной  $M\omega^2 r$ , стремящаяся оттолкнуть ее от оси вращения в сторону наружной стенки пробирки, вставленной в ротор центрифуги. Как велика эта сила? Предположим, что молекулярный вес растворенного вещества равен 100 000, т. е. что масса  $M$  молекулы этого вещества

приблизительно в  $10^5$  раз больше массы протона:

$$M \cong (10^5) \cdot (1,7 \cdot 10^{-24}) \cong 2 \cdot 10^{-19} \text{ г}$$

(так как масса протона приближенно равна одной атомной единице массы — см. таблицу физических постоянных в приложении к этому тому).

Сила, вызывающая ускорение вращательного движения, равна

$$Ma = M\omega^2 r \cong (2 \cdot 10^{-19}) \cdot (4 \cdot 10^8) \cong 8 \cdot 10^{-11} \text{ дин},$$

где подставлена величина ускорения, рассчитанная выше. Эта сила, стремящаяся оттолкнуть молекулу в сторону наружной стенки пробирки, называется *центробежной* силой. Движению в сторону наружной стенки противодействует сила сопротивления со стороны жидкости, окружающей молекулу. Поскольку на различные виды молекул действуют разные по величине центробежные силы и силы сопротивления, то такие молекулы будут двигаться в пробирке ультрацентрифуги с различными скоростями в направлении от оси вращения. Поэтому ультрацентрифугирование является эффективным методом разделения молекул различных видов. Метод ультрацентрифугирования наиболее часто применяется для разделения больших молекул, которые как раз представляют огромный интерес для биологии, и, таким образом, вопрос о том, покоится ли молекула относительно системы отсчета, имеющей ускорение или не имеющей его, оказывается важным для биологических и медицинских исследований.

### 3.2. Инерциальные системы отсчета

Основным законом классической механики является второй закон Ньютона:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{p}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, а  $\mathbf{p} \equiv M\mathbf{v}$  — импульс. Этот закон выполняется, если наблюдатель неподвижен относительно системы отсчета, не имеющей ускорения. Такая система отсчета называется *инерциальной системой отсчета*. Для тела с постоянной массой  $M$  мы получаем

$$\mathbf{F} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv M \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv M\mathbf{a}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{a}$  — ускорение. Иногда масса не является постоянной; она не постоянна, например, у искусственного спутника, из двигателя которого выбрасываются продукты горения, а также у любого тела, движущегося со скоростью в области релятивистских скоростей (т. е. скоростей, близких к скорости света). Уравнение (1) или (2) можно рассматривать как строгое определение *истинной* \*) силы  $\mathbf{F}$ , которая действует на данное тело.

---

\*) См. примечание на стр. 102.

Является ли помещение лаборатории, неподвижное относительно земной поверхности, достаточно хорошей инерциальной системой отсчета? Если нет, то какую поправку надо внести в уравнение  $F=Ma$ , чтобы учесть ускорение самой лаборатории?

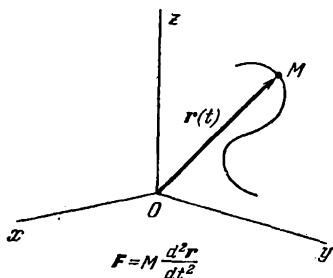


Рис. 3.2. Второй закон Ньютона гласит:  
Сила = масса  $\times$  ускорение.  
Но относительно какой системы отсчета надо определять ускорение?

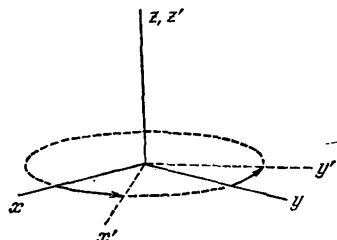


Рис. 3.3. Например, система отсчета  $S'$  ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ) вращается относительно системы  $S$  ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Материальная точка  $M$  имеет различные ускорения в каждой из этих систем отсчета.

Для многих целей Земля является довольно хорошим приближением к инерциальной системе отсчета. Причиной ускорения лаборатории, неподвижной относительно Земли, является суточное вращение Земли вокруг ее оси. Это вращение создает небольшое ускорение лабораторной системы отсчета, которым можно пренебречь не

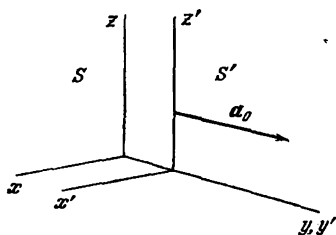


Рис. 3.4. Система отсчета  $S'$  движется поступательно с ускорением  $a_0$  относительно системы  $S$ . Ускорение материальной точки  $M$  различно в каждой из этих систем отсчета.

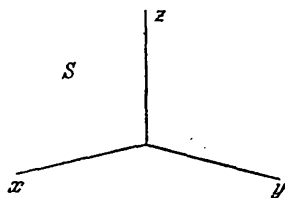


Рис. 3.5. Существуют ли инерциальные системы отсчета, относительно которых мы должны определять ускорение  $a$ , входящее в уравнение  $F=Ma$ ? ( $S$  — инерциальная система отсчета.)

во всех случаях. Точка, покоящаяся на поверхности Земли на ее экваторе, должна иметь центростремительное ускорение относительно центра Земли, равное

$$a = \frac{v^2}{R_3} = \omega^2 R_3. \quad (3)$$

Здесь  $\omega = 2\pi f$  — угловая скорость Земли, а  $R_3$  — радиус Земли. Земля за одни сутки совершает оборот на  $360^\circ$ , т. е. на  $2\pi$  радиан, а в сутках около  $8,6 \cdot 10^4$  сек. Поэтому угловая скорость Земли равна

$$\omega = \frac{2\pi}{8,6 \cdot 10^4} \approx 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}. \quad (4)$$



Так как  $R_3 \cong 6,4 \cdot 10^8$  см, то центростремительное ускорение равно

$$a \approx (0,73 \cdot 10^{-4})^2 \cdot (6,4 \cdot 10^8) \approx 3,4 \text{ см/сек}^2. \quad (5)$$

Это представляет собой большую часть той величины, на которую наблюдаемое ускорение силы тяжести на Северном полюсе превышает наблюдаемое ускорение силы тяжести на экваторе. Остальная часть изменения веса на земной поверхности, зависящего от широты, обусловлена эллипсоидальной формой Земли. Полное изменение величины  $g$  при переходе от Северного (или Южного) полюса к экватору составляет около  $5,2 \text{ см/сек}^2$ . До того, как появились искусственные спутники, лучшим способом определения степени сплюснутости Земли у полюсов было исследование изменений ускорения силы тяжести на поверхности Земли.

Значения  $g$  на различных широтах

Географический пункт	Широта	$g$ , см/сек <sup>2</sup>
Северный полюс	90° сев.	983,245
Глетчер Караяк, Гренландия	70° »	982,53
Рейкьявик, Исландия	64° »	982,27
Ленинград	60° »	981,93
Париж	49° »	980,94
Нью-Йорк	41° »	980,27
Сан-Франциско	38° »	979,96
Гонолулу, Гавайские острова	21° »	978,95
Монровия, Либерия	6° »	978,16
Джакарта, Индонезия	6° южн.	978,18
Мельбурн, Австралия	38° »	979,99

Ниже в этой главе мы дадим более сложную формулировку второго закона Ньютона, применимую к системе отсчета, координатные оси которой неподвижно связаны с поверхностью Земли. Однако чтобы этот закон был верен в простой форме, описываемой уравнениями (1) или (2), мы должны подставлять в эти уравнения ускорение относительно такой системы отсчета, которая сама не имеет ускорения.

Такая система отсчета называется инерциальной или галилеевой. В системе отсчета, движущейся с ускорением, т. е. неинерциальной, сила  $F$  не равна  $Ma$ , где  $a$  — ускорение, наблюдаемое относительно неинерциальной системы.

Установилось соглашение говорить о системе, связанной с неподвижными звездами, как о стандартной системе отсчета, не имеющей ускорения. Утверждение, что неподвижные звезды не имеют ускорения, нельзя доказать, исходя из наших фактических экспериментальных значений. Невероятно, чтобы наши приборы смогли определить ускорение удаленной звезды или группы звезд, меньшее чем  $10^{-4} \text{ см/сек}^2$ , даже если бы мы проводили тщательные наблю-

дения в течение ста лет. Для практических целей удобно ориентировать направления осей координат относительно неподвижных звезд. Однако, как мы увидим ниже, можно найти опытным путем и другую систему отсчета, которая также окажется не имеющей ускорения с точностью, удовлетворительной для практических целей. Даже если бы Земля была непрерывно окружена совершенно непрозрачным туманом, мы были бы в состоянии без особых трудностей найти какую-либо инерциальную систему отсчета.

Величина ускорения Земли в ее движении по орбите вокруг Солнца на порядок меньше, чем величина ускорения из-за вращения Земли. Так как 1 год  $\approx 3 \cdot 10^7$  сек, то угловая частота обращения Земли вокруг Солнца равна

$$\omega \approx \frac{2\pi}{3 \cdot 10^7} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ сек}^{-1}. \quad (6)$$

Подставив  $R = 1,5 \cdot 10^{13}$  см, получаем центростремительное ускорение движения Земли по орбите вокруг Солнца:

$$a = \omega^2 R \approx (4 \cdot 10^{-14}) \cdot (1,5 \cdot 10^{13}) \approx 0,6 \text{ см/сек}^2. \quad (7)$$

Величина ускорения Солнца относительно центра нашей Галактики \*) не была определена экспериментально. Однако скорость движения Солнца относительно центра Галактики определяется по исследованию доплеровского сдвига спектральных линий величины порядка  $3 \cdot 10^7$  см/сек. Если Солнце обращается по круговой орбите вокруг отстоящего от него на расстоянии около  $3 \cdot 10^{22}$  см центра Галактики, то ускорение движения Солнца вокруг этого центра Галактики равно

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \approx \frac{9 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^{22}} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ см/сек}^2. \quad (8)$$

Это совсем ничтожная величина. Из результатов наблюдений нам неизвестно, движется ли Солнце со значительно большим ускорением, чем эта величина, а также неизвестно, имеет ли сам центр Галактики сколько-нибудь значительное ускорение.

Мы знаем из опыта, что ряд утверждений, являющихся важнейшими аксиомами классической механики, выполняется исключительно хорошо. Это следующие четыре утверждения:

1. Пространство является евклидовым.

2. Пространство изотропно, т. е. его физические свойства одинаковы во всех направлениях. В частности, величина массы  $M$  в уравнении  $F = Ma$  не зависит от направления движения.

---

\*) Звезды не разбросаны в беспорядке в космическом пространстве. Они группируются в большие системы, разделенные друг от друга огромными расстояниями. Каждая система содержит около  $10^{10}$  звезд. Эти системы называются галактиками; та из них, в которую входит наше Солнце, известна как наша Галактика. Млечный Путь является частью нашей Галактики. Сами галактики не распределяются совершенно произвольно, так как имеется определенная тенденция к образованию скоплений галактик. Наша Галактика принадлежит к скоплению из 19 составных частей, которое называется локальной группой и образует связанную гравитационным притяжением замкнутую физическую систему.

3. Ньютоновы законы движения выполняются в инерциальной системе, определенной для наблюдателя, неподвижно находящегося на Земле, если учитывать только ускорение Земли при ее вращении вокруг оси и при ее движении по орбите вокруг Солнца.

4. Всегда и для всех тел выполняется закон всемирного тяготения Ньютона. Этот закон гласит, что между любыми двумя материальными точками с массами  $M_1$  и  $M_2$ , находящимися на расстоянии  $R$ , действует сила притяжения  $F = GM_1M_2/R^2$ , где  $G$  — постоянная величина.

Было бы затруднительно очень точно проверить эти утверждения поодиночке. Наибольшая точность достигается при проверке всего сочетания изложенных четырех утверждений по наблюдениям за движением планет Солнечной системы. Некоторые примеры такой точной проверки системы аксиом классической механики разбираются в заметках «Из истории физики» в конце гл. 5.

*Силы в инерциальных системах отсчета.* Галилей сформулировал закон, что тело, на которое не действуют силы, имеет постоянную скорость \*). Мы видели, что это утверждение верно только в инерциальной системе отсчета, — по существу, оно содержит определение инерциальной системы.

Данная формулировка может показаться сомнительной: откуда мы будем знать, что нет сил, действующих на тело? Силы могут действовать на тела не только при непосредственном соприкосновении тел, но они могут действовать и на изолированное тело. Гравитационные или электрические силы могут играть важную роль даже и тогда, когда очень близко от данного тела нет других тел. Мы не можем быть уверены в отсутствии действия сил только потому, что никакие другие тела не соприкасаются или не находятся очень близко к данному телу. Но если мы а priori не можем решить, что какое-то данное тело не подвержено действию силы, то у нас возникает трудность в формулировке системы законов движения, связывающих силы с ускорениями. Нам необходима система отсчета, не имеющая ускорения, относительно которой мы можем измерять ускорения тел. Способ определения, данный Галилеем для такой системы, основан на предположении, что у нас есть какая-то независимая возможность узнать, что на эту систему не действуют никакие силы. Однако этой возможности нет, потому что наш критерий — нет силы, значит, нет ускорения — требует какой-то системы отсчета, относительно которой следует измерять ускорения... и опять повторяется тот же круг рассуждений.

Однако положение не безнадежно, так как мы знаем, что величина любой силы, действующей между двумя телами, должна довольно быстро уменьшаться по мере увеличения расстояния между этими телами. Если бы силы не уменьшались достаточно быстро с увеличением расстояний между взаимодействующими телами, то мы никогда не смогли бы изолировать взаимодействие двух тел от

---

\*) Этот закон часто называют первым законом Ньютона.

взаимодействий их со всеми другими телами во Вселенной. Величина всех известных сил, действующих между частицами, убывает по крайней мере не менее быстро, чем по закону обратных квадратов.

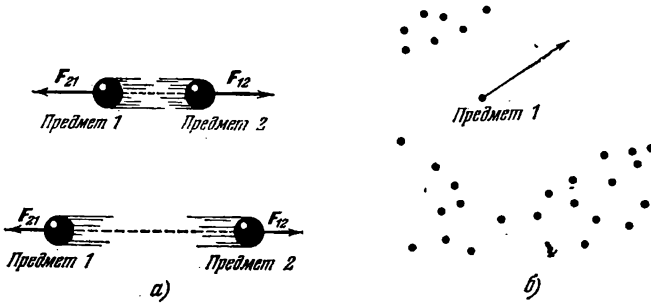


Рис. 3.6. Экспериментально установлено, что сила, с которой один предмет действует на другой, всегда быстро уменьшается по мере того, как эти предметы разделяет все большее расстояние (а). Следовательно, если предмет 1 находится достаточно далеко от всех других предметов, то на него не будут действовать никакие силы (б).

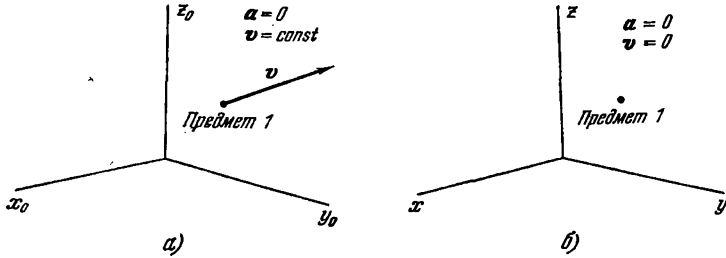


Рис. 3.7. а) Инерциальная система отсчета—это такая система отсчета, относительно которой ускорение тела, подобного предмету 1 (на который не действуют силы), равно нулю. б) В частности, имеются такие инерциальные системы отсчета, относительно которых предмет 1 остается неподвижным.

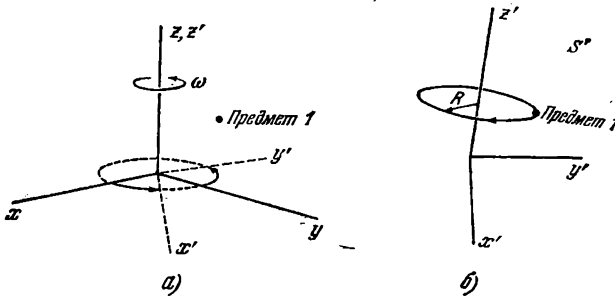


Рис. 3.8. Если  $S(x, y, z)$ —инерциальная система отсчета, то система отсчета  $S'$ , вращающаяся вокруг оси  $z$  системы  $S$ , не может быть инерциальной (а), так как относительно системы отсчета  $S'$  предмет 1 движется с ускорением (потому что он кажется движущимся по кругу), хотя он весьма удален от всех других предметов (б).

Мы, как и всякое другое тело на Земле, испытываем притяжение главным образом к центру Земли и только в ничтожной степени — к какой-либо удаленной части Вселенной. Если бы мы не опирались

о пол, то получили бы ускорение  $980 \text{ см/сек}^2$  по направлению к центру Земли. Менее сильно нас притягивает Солнце; согласно уравнению (7) мы движемся с направленным к нему ускорением  $0,6 \text{ см/сек}^2$ . Если разумно оценивать возможную величину ускорения, то следует ожидать, что на тело, значительно удаленное от всех других тел, вероятно, не будут действовать силы, и поэтому оно не будет иметь ускорения. Типичная звезда удалена от ближайших соседних небесных тел на расстояние не менее  $10^{18} \text{ см}^*$ , и поэтому следует ожидать, что она имеет лишь маленькое ускорение. Таким образом, мы пришли к утверждению, что с хорошей степенью приближения можно определить связанную с неподвижными звездами систему координат как удобную систему, не имеющую ускорения.

Интересное обсуждение проблемы нахождения системы отсчета, не имеющей ускорения, содержится в статье П. В. Бриджмена [Am J. Phys. 29, 32 (1961)]. Вот некоторые отрывки из этой статьи:

«Система из трех жестких ортогональных осей образует галилееву систему отсчета, если три массивные частицы, на которые не действуют силы, имеют произвольные проекции скоростей на эти три оси и продолжают двигаться с постоянными составляющими скоростей вдоль этих осей. Наши земные лаборатории не образуют

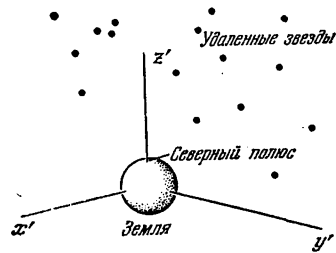


Рис. 3.9. Например, относительно системы отсчета  $S'$  ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ), неподвижно связанной с Землей, удаленные звезды, подобно предмету 1, движутся по круговым траекториям. Система отсчета, неподвижно связанная с Землей, не является инерциальной, потому что Земля вращается вокруг своей оси и обращается вокруг Солнца.

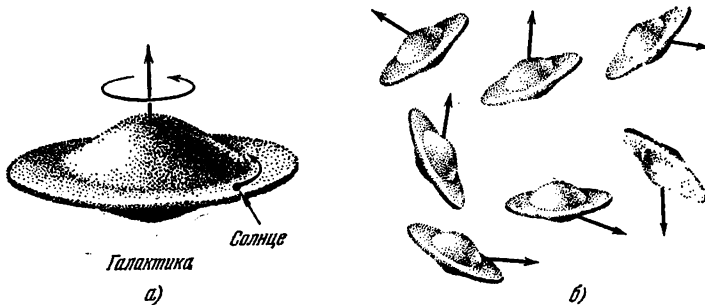


Рис. 3.10. Является ли инерциальной система отсчета, неподвижно связанная с Солнцем? Солнце также вращается вокруг оси Галактики, но, по-видимому, ускорение этого движения достаточно мало, так что им можно пренебречь (а), и, по-видимому, мы можем также пренебречь ускорением нашей Галактики относительно других галактик (б).

такую систему отсчета, но и в наших лабораториях мы можем построить подобную систему отсчета, измерив, насколько движение трех произвольно избранных масс отклоняется от этого требования...

\*) Исключение — двойные звезды.

и введя эти отклонения в качестве отрицательных поправок в наши условия для галилеевой системы отсчета. При этом вовсе не требуется производить измерения положений относительно звезд. Можно вполне надежно описать движение тел, используя такие непосредственно наблюдаемые явления, как вращение плоскости колебаний маятника Фуко относительно Земли или отклонение падающего тела от направления отвеса. Даже если оператор центра управления ракетой, выводя спутник на орбиту, находит удобным ориентироваться по наблюдениям за Полярной звездой, очевидно, что его приборы должны давать показания относительно земных ориентиров... В галилеевой системе отсчета вращающееся тело сохраняет положение плоскости вращения неизменным относительно этой системы отсчета после того, как это тело было приведено во вращение и затем изолировано от действия сил; следовательно, оно сохраняет неизменным направление оси вращения».

### 3.3. Абсолютное и относительное ускорение

Итак, можно найти инерциальную систему отсчета, т. е. такую систему отсчета, в которой с очень большой точностью сила  $\mathbf{F}$  равна  $M\mathbf{a}$ . Это много раз подтверждено на опыте. Мы установили, что в инерциальной системе отсчета все силы, действием которых объясняется движение галактик, звезд, атомов, электронов и т. д., обладают тем общим свойством, что величина силы, действующей на тело, обязательно уменьшается по мере того, как это тело удаляется все дальше и дальше от своих соседей. Мы увидим, что если избрать неинерциальную систему отсчета, то появятся *кажущиеся* силы, которые не обладают этим свойством, т. е. они не обусловлены присутствием других тел вблизи данного тела.

Существование инерциальных систем отсчета приводит к сложному вопросу, остающемуся без ответа: какое влияние оказывает вся прочая материя во Вселенной на опыт, производимый в лаборатории на Земле? Предположим, например, что в какой-то момент всей материи во Вселенной, за исключением той ее части, которая находится в непосредственной близости к нашей Земле, сообщено большое ускорение  $\mathbf{a}$ . Частица, находящаяся на Земле под действием сил, сумма которых равна нулю, не имела ускорения относительно неподвижных звезд. Когда эти звезды станут двигаться с ускорением, то будет ли эта частица, вначале не находившаяся под действием сил, продолжать двигаться без ускорения относительно далеких звезд, ранее не имевших ускорения, или же изменится характер ее движения относительно своего непосредственного окружения? Существует ли различие между ускоренным движением частицы с ускорением  $+\mathbf{a}$  и ускоренным движением звезд с ускорением  $-\mathbf{a}$ ? Если играет роль только относительное ускорение, то ответом на последний вопрос будет *нет*; если же абсолютное ускорение, то ответ будет *да*. Это принципиальный вопрос, остающийся без ответа, но его нелегко подвергнуть экспериментальному исследованию.

Ньютон образно сформулировал этот вопрос и свой ответ на него. Представим себе ведро с водой. Если мы будем вращать ведро вокруг вертикальной оси, неподвижной относительно звезд, то поверхность воды примет параболическую форму; с этим все согласятся. Предположим, однако, что вместо вращения ведра мы каким-то образом привели звезды во вращение вокруг ведра, так что относительное движение осталось одно и то же. Ньютон считал, что если бы мы вращали звезды, то поверхность воды осталась бы плоской. Согласно этой точке зрения, существует *абсолютное* вращение и *абсолютное* ускорение. Из опыта мы не знаем, можно ли полностью описать и сопоставить с результатами локальных измерений в лаборатории все явления, происходящие с вращающимся ведром воды, никак не относя их к звездам.

Противоположная точка зрения о том, что *имеет значение только ускорение относительно неподвижных звезд*, представляет собой гипотезу, обычно называемую принципом Маха. Хотя не имеется ни экспериментального подтверждения, ни опровержения этой точки зрения, некоторые физики, включая Эйнштейна, нашли, что этот принцип a priori представляет интерес. Другие физики придерживаются противоположного мнения. Этот вопрос имеет значение для теоретической космологии.

Если считать, что среднее движение всей остальной части Вселенной влияет на состояние любой одиночной частицы, то возникает целый ряд связанных с этим вопросов, и путей к ответу на них пока не видно. Имеются ли какие-либо другие взаимные связи между свойствами одиночной частицы и состоянием остальной части Вселенной? Изменится ли заряд электрона или его масса или энергия взаимодействия между нуклонами\*), если бы как-то изменилось число частиц во Вселенной или плотность их распределения? До настоящего времени нет ответа на этот глубокий вопрос о соотношении между далекой Вселенной и свойствами отдельных частиц.

### 3.4. Абсолютная и относительная скорость

Имеет ли абсолютная скорость какой-либо физический смысл? Согласно всем опытам, выполненным к настоящему времени, ответ должен быть такой: *нет, не имеет*. Таким образом, мы пришли к фундаментальной гипотезе — *принципу относительности Галилея*:

*Основные законы физики одинаково формулируются для всех систем отсчета, которые движутся с постоянной скоростью (т. е. без ускорения) относительно друг друга.*

Согласно этому принципу, наблюдатель, находящийся в кабине без окон, не может экспериментально определить, покоится ли он

\*) Нуклон — это протон или нейтрон; антинуклон — это антипротон или антинейтрон.

или находится в равномерном прямолинейном движении относительно неподвижных звезд. Только смотря в окно и имея, таким образом, возможность сравнить свое движение с движением звезд, наблюдатель может сказать, что он находится относительно них в равномерном движении. Даже тогда он не мог бы решить, что движется: он сам или звезды. Принцип относительности Галилея был одним из первых основных принципов физики. Он являлся основным для данной Ньютоном картины Вселенной. Этот принцип выдержал многократную экспериментальную проверку и служит сейчас одним из краеугольных камней для специальной теории относительности. Это настолько замечательная своей простотой гипотеза, что ее следовало бы серьезно рассматривать, даже если бы она не была так очевидна. Как мы увидим в гл. 11, принцип относительности Галилея полностью согласуется со специальной теорией относительности.

Как мы можем применить этот принцип? Утверждение, что абсолютная скорость не имеет смысла в физике, частично ограничивает форму и содержание всех физических законов, как известных, так и еще не открытых. Если этот принцип справедлив, то законы физики должны одинаково формулироваться для двух наблюдателей, движущихся с различными скоростями, но без относительного ускорения? Предположим, что оба они наблюдают какое-то отдельное явление, например столкновение двух частиц. Из-за различия скоростей наблюдателей каждый из них дает описание наблюдаемого явления, отличающееся от описания, данного другим наблюдателем. На основании законов физики мы можем предсказать, как взаимодействуют эти частицы, каковы будут наблюдения одного наблюдателя и, наконец, как то же взаимодействие частиц представляется второму наблюдателю.

Таким образом, формулировка законов физики для второго наблюдателя может быть выведена из их формулировки для первого наблюдателя посредством двух различных способов рассуждения. Первый из них — это гипотеза, что обе формулировки одинаковы. Другой способ — мы можем сформулировать эти законы для второго наблюдателя, предсказав, каковы должны быть результаты его наблюдений над явлениями, которые были описаны с помощью законов физики, сформулированных для первого наблюдателя. Для всех известных нам физических законов оба способа дают одинаковые результаты. Мы начнем наш анализ с того, что установим некоторые эмпирические особенности характера описания одного и того же физического явления двумя наблюдателями, один из которых движется относительно другого с постоянной скоростью.

### 3.5. Преобразование Галилея

Если мы проанализируем, как два наблюдателя измеряют данные интервалы длины и времени, то мы сможем сравнить результаты измерений других физических величин, произведенных этими



наблюдателями. Обозначим через  $S$  какую-либо инерциальную декартову систему координат, а через  $S'$  — другую инерциальную декартову систему координат, движущуюся со скоростью  $V$  относительно первой. Пусть оси  $x', y', z'$  системы  $S'$  направлены параллельно осям  $x, y, z$  системы  $S$  (рис. 3.11). Выберем эти оси так, чтобы вектор  $V$  был направлен параллельно оси  $x$ . Мы хотим сравнить измерения времени и расстояний, сделанные наблюдателем, неподвижным относительно системы  $S'$ , с такими же измерениями, выполненными наблюдателем, покоящимся относительно системы  $S$ . Только опытным путем можно окончательно решить, каков будет результат сравнения.

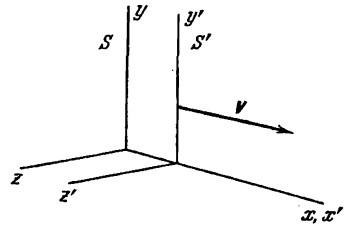


Рис. 3.11. Пусть  $S$  — инерциальная система отсчета, а система  $S'$  движется относительно системы  $S$  с постоянной скоростью  $V$ . Тогда система  $S'$  тоже должна быть инерциальной.

Если каждый из двух наблюдателей располагает большим числом часов с совершенно одинаковым ходом, то они могут произвести следующий опыт. Пусть сначала наблюдатель в системе  $S$  распределит свои часы вдоль оси  $x$  и установит их все на одно и то же время. Это вовсе не так уж просто осуществить, но мы отложим анализ того, как следует точно выполнить эти измерения, до тех пор, пока в гл. 11 не будет рассмотрен аналогичный опыт с точки зрения

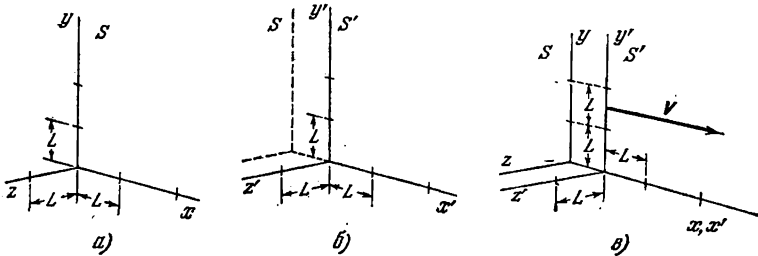


Рис. 3.12. Отложим отрезки равной длины по осям  $x, y, z$  системы отсчета  $S$  (а) и по осям  $x', y', z'$  системы отсчета  $S'$  (б). Тогда, согласно преобразованию Галилея, наблюдателю в системе  $S$  длины отрезков в системе  $S'$  представляются неизменными, хотя система  $S'$  движется (в).

специальной теории относительности. Однако если мы будем приближенно считать скорость света бесконечно большой <sup>\*</sup>), то надо только посмотреть на все часы, чтобы удостовериться, что все их начальные показания одинаковы. Теперь мы можем сравнивать показания часов в системе  $S'$  с показаниями часов 1, 2, 3, ... в системе  $S$ ,

<sup>\*</sup>) В противном случае можно простым способом усовершенствовать эту операцию отсчета, введя поправку на время, необходимое для того, чтобы изображение удаленного предмета достигло наших глаз. Часы, удаленные на  $l$  см, будут казаться наблюдателю отстающими от часов, расположенных непосредственно рядом с ним, на  $l/c$  сек, где  $c=3 \cdot 10^{10}$  см/сек — скорость света.

когда часы в  $S'$  проходят мимо каждого часа в системе  $S$ . Если такой опыт придется производить с реальными макроскопическими часами, то по чисто техническим причинам мы должны ограничить скорость движения  $V$  системы  $S'$  величиной порядка  $10^6$  см/сек, т. е. порядка скорости типичного искусственного спутника. При таком условии  $V/c \ll 1$ , и опыт подтверждает, что если часы в системе  $S'$  установлены одинаково с часами 1, то их показания будут одинаковы и с показаниями часов 2, 3, 4, ... С той точностью, с которой мы можем измерять \*) в таких условиях, можно установить, что

$$t' = t. \quad (9)$$

Это означает, что результаты отсчетов времени, выполненных в системе  $S'$ , равны результатам отсчетов времени в системе  $S$ . Здесь  $t$  означает время события в системе  $S$ , а  $t'$  — время события в системе  $S'$ .

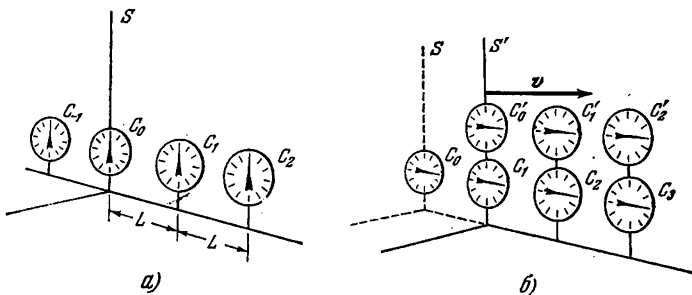


Рис. 3.13. а) Расставим вдоль оси  $x$  через интервалы длиной  $L$  синхронизированные часы  $C_0, C_1$  и т. д., неподвижные относительно системы отсчета  $S$ . б) Если такие же часы  $C'_0, C'_1$  и т. д. мы расставим также неподвижно относительно системы отсчета  $S'$ , то, согласно преобразованию Галилея, наблюдателю в системе  $S$  эти часы представляются синхронизированными между собой и с часами  $C_0, C_1$  и т. д.

Как мы увидим в гл. 11, это утверждение не является ни самоочевидным, ни точно выполняющимся для всех скоростей  $V$ . Мы можем также определить относительные размеры неподвижной и движущейся метровой линейки. Мы хотим знать, какой кажущийся размер для наблюдателя в системе  $S$  имеет метровая линейка, покоящаяся в системе  $S'$ . Простой способ определить это заключается также в использовании часов для регистрации положения обоих концов движущейся метровой линейки, производимой одновременно, т. е. при одном и том же показании часов, находящихся в систе-

\*) Согласно теории относительности, при скорости  $V=10^6$  см/сек величины  $t'$  и  $t$  должны отличаться только на одну двухмиллиардную часть, меньше чем на 1 сек за 50 лет. Хотя в настоящее время можно изготовить часы с таким стабильным ходом, пока еще нет возможности запустить спутник с часами, движущийся со скоростью порядка  $10^6$  см/сек, на столь продолжительное время, которое необходимо для этого измерения. Равенство  $t' = t$  для  $V \ll c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек представляет собой простую экстраполяцию опытных данных и до настоящего времени не проверялось точными измерениями.

ме  $S$  у переднего и заднего концов этой линейки. Экспериментально мы находим  $L=L'$ \*, что

$$L' = L \quad (10)$$

при условии, когда  $V \ll c$ .

Мы можем выразить равенства (9) и (10) в форме преобразования, связывающего координаты  $x', y', z'$  и время  $t'$ , измеренные в системе  $S'$ , с координатами  $x, y, z$  и временем  $t$ , измеренными в системе  $S$ . Система  $S'$  движется со скоростью  $V\hat{x}$  относительно системы отсчета  $S$ . Предположим, что при  $t=0$  также и  $t'=0$  и что в этот момент совпадают начала координат  $O$  и  $O'$ . Если мы выберем совершенно одинаковые масштабы длины, то получим следующие уравнения преобразования:

$$t = t'; \quad x = x' + Vt'; \quad y = y'; \quad z = z'. \quad (11)$$

Это преобразование называется *преобразованием Галилея* (рис. 3.14).

Непосредственным следствием уравнений (11) является закон сложения скоростей:

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = \frac{x'}{t'} + V = v'_x + V, \quad (12)$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{v}'$  — скорость, измеренная в системе  $S'$ , а  $\mathbf{v}$  — скорость, измеренная в системе  $S$ . Преобразование, обратное по отношению к (13):

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Если сопоставить определение (11) преобразования Галилея между системами  $S$  и  $S'$  с основным постулатом о том, что законы физики, определенные в этих системах  $S$  и  $S'$ , должны быть тождественны, то мы можем сделать следующий вывод:

*Основные законы физики одинаково формулируются для любых двух систем отсчета, связанных преобразованием Галилея.*

Этот вывод носит несколько более частный характер, чем наше прежнее общее утверждение, что законы физики формулируются

\*) Такой эксперимент не выполнялся с большой точностью, и уверенность в том, что  $L'=L$  при  $V \ll c$ , основывается главным образом на качественных опытных данных, простоте гипотезы и том факте, что это предположение не приводит к каким-либо парадоксам или несоответствиям.

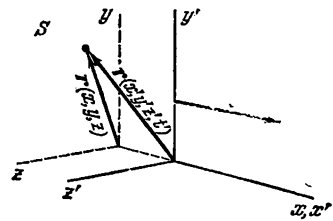


Рис. 3.14.  $t(x', y', z', t') = t(x - Vt', y, z, t)$ . Следовательно, мы можем выразить преобразование Галилея от  $S$  к  $S'$  и обратно такими формулами:

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt; & z' &= z, \\ y' &= y; & t' &= t \end{aligned}$$

совершенно одинаково для всех систем отсчета, движущихся с постоянной скоростью одна относительно другой. Более частный характер этого вывода связан, например, с дополнительным допущением, что  $t = t'$ . В гл. 11 мы увидим, что это допущение надо будет видоизменить.

Основной принцип инвариантности физических законов справедлив всегда, но соответствующие ему точные уравнения преобразования координат и времени — это уравнения преобразования Лоренца, а не уравнения (11).

Сделанное здесь предположение об инвариантности законов физики относительно преобразования (11) означает, что они должны иметь в точности одинаковый вид, будучи записаны в штрихованных и в нештрихованных переменных, как, например, уравнения (16) — (18), приводимые ниже. Это требование налагает определенное ограничение на возможную форму физических законов.

Из соотношения  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ , где  $\mathbf{V}$  — относительная скорость двух систем отсчета, следует, что

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}', \quad (14)$$

т. е. изменение скорости одного и того же тела, наблюдаемое в системе  $S$ , равно изменению его скорости, наблюдаемому в системе  $S'$ . Как  $S$ , так и  $S'$  — инерциальные системы отсчета. Напомним, что мы предположили, что скорость  $\mathbf{V}$  не меняется со временем. Так как  $\Delta t = \Delta t'$ , то отсюда следует, что ускорения, наблюдаемые в системах отсчета  $S$  и  $S'$ , равны между собой:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}'}{\Delta t'} \equiv \mathbf{a}'. \quad (15)$$

Как преобразуется величина силы  $\mathbf{F}$  при переходе от  $S$  к  $S'$ ? Утверждение, что законы физики имеют одинаковый вид в штрихованных и нештрихованных переменных, означает, что

$$\mathbf{F}' = M \mathbf{a}' \quad (16)$$

и

$$\mathbf{F} = M \mathbf{a} \quad (17)$$

при условии, что масса  $M$  не зависит от скорости. Но мы показали, выводя формулу (15), что  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ ; следовательно,

$$\mathbf{F} = M \mathbf{a}' = \mathbf{F}', \quad (18)$$

т. е. в обеих системах отсчета сила имеет одинаковую величину:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ . Мы приходим к выводу, что если для определения силы используется соотношение  $\mathbf{F} = M \mathbf{a}$ , то во всех инерциальных системах отсчета наблюдатели получат одинаковые данные об абсолютной величине и направлении силы  $\mathbf{F}$ , независимо от относительных скоростей этих систем отсчета.

### 3.6. Сохранение импульса

Среди физических законов, согласующихся с принципом относительности Галилея, особенное значение имеют законы сохранения импульса, сохранения массы и сохранения энергии. Эти законы уже знакомы вам по школьному курсу физики, где они формулировались без какой-либо связи с принципом относительности. Согласно закону сохранения энергии, полная энергия Вселенной постоянна, независимо от времени \*). Рассматривая эти законы с точки зрения принципа относительности, мы не откроем ничего сверх того, что мы уже знаем. Однако мы выиграем в отношении понимания явлений, и это поможет нам обобщить закон сохранения импульса на релятивистские условия, для которых соотношение  $F=Ma$  уже не является точным законом природы. Нашей конечной целью будет нахождение эквивалентов законов сохранения массы, энергии и импульса в условиях движения с релятивистскими скоростями, т. е. со скоростями, сравнимыми со скоростью света  $c$ .

В применении к удару двух тел, 1 и 2, закон сохранения импульса гласит, что сумма импульсов после удара равна сумме импульсов до удара:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (19)$$

до удара                      после удара

где, по определению, импульс  $\mathbf{p}$  тела массой  $M$  равен

$$\mathbf{p} \equiv M\mathbf{v}. \quad (20)$$

Мы предполагаем, что удар совершается в условиях, когда на оба тела не действуют внешние силы. Удар может быть или упругим, или неупругим. При упругом ударе вся кинетическая энергия сталкивающихся частиц сохраняется после удара как кинетическая энергия тех же частиц. При неупругом ударе часть кинетической энергии сталкивающихся частиц переходит после удара в какой-либо вид *внутренней* энергии возбужденного состояния (например, в теплоту) одной или более частиц. Важно убедиться, что закон сохранения импульса можно применять даже к *неупругому* удару.

В применении к удару двух тел закон сохранения массы гласит, что сумма масс после удара равна сумме масс до удара:

$$M_1 + M_2 = M_1 + M_2. \quad (21)$$

до удара                      после удара

В гл. 12 уравнения (19) и (21) будут обобщены для случая частиц, движущихся с релятивистскими скоростями.

Пока предположим, что в процессе удара масса каждой частицы сохраняется неизменной. Мы дадим сейчас два различных вывода

---

\*) Правильнее сформулировать эти законы следующим образом: «полная энергия замкнутой системы постоянна» и «полная масса замкнутой системы постоянна». При этом под *замкнутой системой* имеется в виду любая совокупность физических тел, которые не взаимодействуют с материей, не входящей в эту систему. (Прим. ред.)

закона сохранения импульса. Первый вывод основывается на предположении о *ньютоновских силах*. Второй вывод, являющийся более строгим и более общим, основывается на *принципе относительности Галилея* и *законе сохранения энергии*.

**Первый вывод.** Сохранение импульса не является обязательным следствием одного только уравнения  $F=Ma$ . В этом выводе мы дополнительно предполагаем, что силы между частицами — это силы специального характера, называемые *ньютоновскими*, для которых выполняется третий закон Ньютона. По определению ньютоновские силы обладают тем свойством, что сила  $F_{12}$ , с которой частица 1 действует на частицу 2, равна по величине и противоположна по направлению силе  $F_{21}$ , действующей со стороны частицы 2 на частицу 1:

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (22)$$

Из второго закона Ньютона следует, что в течение любого бесконечно малого промежутка времени  $\Delta t$

$$F_{12} = M_2 \frac{\Delta v_2}{\Delta t}, \quad F_{21} = M_1 \frac{\Delta v_1}{\Delta t}. \quad (23)$$

Но  $F_{12} = -F_{21}$ , и, таким образом, мы получаем из (22) и (23) закон сохранения импульса:

$$M_1 \Delta v_1 + M_2 \Delta v_2 = 0, \quad (24)$$

или

$$(M_1 v_1 + M_2 v_2)_{\text{нач}} = (M_1 v_1 + M_2 v_2)_{\text{кон}}. \quad (25)$$

В любой момент сумма импульсов  $M_1 v_1 + M_2 v_2$  двух сталкивающихся частиц сохраняется постоянной при условии, что силы их взаимодействия являются ньютоновскими.

Рис. 3.15. Если два движущихся точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  проходят очень близко друг к другу, то их траектории отклоняются от первоначальных прямолинейных траекторий. При таком соударении сохраняется суммарный импульс, но силы не являются ньютоновскими. Отклонение от ньютоновского взаимодействия играет важную роль в тех случаях, когда частицы движутся очень быстро.

1 — первоначальная траектория;  
2 — фактическая траектория.

Однако простое допущение о ньютоновском характере сил часто не выполняется в точности. Но все же закон сохранения импульса является точным законом. В действительности взаимодействие частиц 1 и 2 не может быть мгновенным, потому что действие сил передается не с бесконечно большой, а с конечной скоростью, не превышающей скорость света (гл. 10). Таким образом, в любой момент сила  $F_{12}$  может быть и не равна в точности  $-F_{21}$ . Мы можем ожидать, что сумма импульсов после удара будет равна сумме начальных импульсов только после того, как импульсы частиц достигнут своих конечных значений. Не следует основывать доказательство закона сохранения импульса на специальном допущении о ньютоновских силах. Для ньютоновских сил сумма импульсов строго сохраняется в любой момент времени, даже в течение самого процесса

удара. Но для реальных физических сил, действующих не мгновенно, должны существовать такие стадии тесного взаимодействия двух частиц, в течение которых не сохраняется суммарный импульс.

**В т о р о й в ы в о д.** При этом выводе мы исходим из предположений о выполнении принципа относительности Галилея, а также о выполнении законов сохранения энергии и массы. Рассмотрим две свободные частицы 1 и 2, которые вначале имеют скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Предположим, что их начальные (и конечные) положения значительно разделены в пространстве, так что в периоды до начала и после окончания удара частицы не взаимодействуют. Из школьного курса физики (или из гл. 5) известно, что до начала удара кинетическая энергия частиц равна

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2. \quad (26)$$

Теперь пусть между частицами произойдет удар; этот удар не обязательно должен быть упругим. Кинетическая энергия после удара равна

$$\frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \omega_2^2, \quad (27)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — скорости после удара, определенные через такой промежуток времени, что частицы уже больше не взаимодействуют. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \omega_2^2 + \Delta \epsilon, \quad (28)$$

где  $\Delta \epsilon$  (которое может быть или положительным, или отрицательным) — это изменение энергии внутреннего возбуждения частиц в результате удара. Внутреннее возбуждение может представлять собой вращение или внутренние колебания; оно может заключаться в возбуждении связанного электрона посредством перехода его с низкого энергетического уровня на более высокий. При упругом ударе  $\Delta \epsilon = 0$ , но при таком рассуждении нам не следует ограничиваться упругими ударами \*). Мы здесь предположили, что массы частиц  $M_1$  и  $M_2$  остаются после удара без изменений.

Теперь рассмотрим для этого удара подобные же соотношения в штрихованной системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью  $V$  относительно первоначальной нештрихованной системы отсчета. Обозначим через  $v'_1, v'_2$  начальные скорости, а через  $\omega'_1, \omega'_2$  — конечные скорости частиц в штрихованной системе отсчета. Мы

---

\*) При неупругом ударе вовсе не нарушается закон сохранения энергии, а происходит только перераспределение ее: убыль кинетической энергии механического движения тел переходит в энергию возбуждения в виде вращательного или колебательного движения их составных частей или в другие формы энергии внутреннего движения. Такое внутреннее движение часто называют *теплотой* или тепловым движением (см. т. V).

имеем, согласно правилу сложения скоростей,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, & \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}, \\ \mathbf{w}'_1 &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{V}, & \mathbf{w}'_2 &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{V}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Выражение закона сохранения энергии в штрихованной системе имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2} M_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v'_2)^2 = \frac{1}{2} M_1 (w'_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (w'_2)^2 + \Delta \epsilon. \quad (30)$$

Мы предполагаем, что энергия возбуждения  $\Delta \epsilon$  не меняется при перемене системы отсчета. Это согласуется с опытом.

Закон сохранения энергии должен быть инвариантным по отношению к преобразованию Галилея. Следовательно, как в штрихованной, так и в нештрихованной системах отсчета начальная кинетическая энергия должна быть равна сумме конечной кинетической энергии и энергии внутреннего возбуждения  $\Delta \epsilon$ . Это означает, что должны выполняться как уравнение (28), так и уравнение (30). Можно выразить закон сохранения энергии в штрихованной системе отсчета, подставив в (30) уравнения преобразования (29) и заметив, что  $(v'_1)^2 = v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2$  и т. д., так что уравнение (30) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_1 (v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \frac{1}{2} M_2 (v_2^2 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) = \\ = \frac{1}{2} M_1 (w_1^2 - 2\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \frac{1}{2} M_2 (w_2^2 - 2\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \Delta \epsilon. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что слагаемые с  $V^2$  сокращаются в правой и левой частях. Соотношение (31) превращается в уравнение (28) — закон сохранения энергии в нештрихованной системе отсчета — только при условии, что в (31) сокращаются скалярные произведения, т. е. что

$$(M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{V} = (M_1 \mathbf{w}_1 + M_2 \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{V}. \quad (32)$$

Уравнение (32) должно выполняться для любого значения  $\mathbf{V}$ . Следовательно, его общее решение таково, что

$$\boxed{M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2 = M_1 \mathbf{w}_1 + M_2 \mathbf{w}_2.} \quad (33)$$

Это представляет собой как раз закон сохранения импульса.

Резюмируем изложенное. Мы исходили из утверждения о выполнении законов сохранения энергии и сохранения массы при ударе, а далее мы предположили, что эти законы выполняются в любой инерциальной системе отсчета. Таким образом, мы исходили также из предположения, что выполняется принцип относительности Галилея. Мы нашли, что эти законы могут выполняться в различных инерциальных системах *только* в том случае, если при ударе сохраняется суммарный импульс. Мы не использовали закон сохранения массы в его наиболее общей форме. Если при ударе происхо-



дит какой-то обмен масс, так что после удара масса частицы  $M_1$  стала равной  $\bar{M}_1$ , а масса частицы  $M_2$  стала равной  $\bar{M}_2$ , но при этом  $M_1 + M_2 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ , то те же самые выкладки, которые применялись выше, также могли бы применяться при выводе закона сохранения импульса. Это иллюстрируется приводимым ниже примером.

### 3.7. Химические реакции

Докажем, что при химической реакции, заключающейся в перегруппировке или обмене местами атомов реагирующих веществ, сохраняется полный импульс, если только выполняется закон сохранения массы. Предполагаем, что внешние силы не действуют.

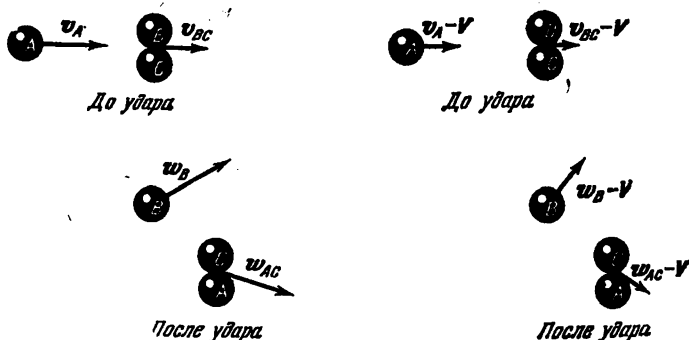


Рис. 3.16. После удара, совершающегося между атомом А и молекулой ВС, остаются атом В и молекула АС. Процесс соударения рассматривается относительно двух различных систем отсчета.

Пусть эта реакция описывается следующим уравнением:



где через ВС обозначена молекула, состоящая из атома В и атома С. В ходе реакции атом С присоединяется к атому А, образуя молекулу АС.

Определяя величины скоростей относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, можно написать закон сохранения энергии в следующем виде:

$$\frac{1}{2} M_A v_A^2 + \frac{1}{2} (M_B + M_C) v_{BC}^2 = \frac{1}{2} M_B w_B^2 + \frac{1}{2} (M_A + M_C) w_{AC}^2 + \Delta e. \quad (35)$$

Здесь  $\Delta e$  представляет собой сумму всех изменений энергии химических связей в молекулах, принимающих участие в реакции. В другой инерциальной системе отсчета, движущейся относительно первой со скоростью  $V$ , можно написать уравнение этого закона,

заменяя  $v_A$  на  $v_A - V$  и т. д.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_A (v_A - V)^2 + \frac{1}{2} (M_B + M_C) (v_{BC} - V)^2 = \\ = \frac{1}{2} M_B (w_B - V)^2 + \frac{1}{2} (M_A + M_C) (w_{AC} - V)^2 + \Delta \epsilon. \end{aligned} \quad (36)$$

Развернув выражения для квадратов скобок, мы увидим, что уравнения (35) и (36) равносильны, если

$$M_A v_A + (M_B + M_C) v_{BC} = M_B w_B + (M_A + M_C) w_{AC}. \quad (37)$$

Это соотношение точно совпадает с формулировкой закона сохранения импульса.

**Пример. Столкновение тяжелой и легкой частиц.** Рассмотрим упругий удар при столкновении тяжелой частицы, имеющей массу  $M$ , с легкой частицей, масса которой равна  $m$ . Пусть до удара легкая частица была неподвижна. Начальная скорость тяжелой частицы равна  $v_1 = v_1 \hat{x}$ , а ее конечная скорость равна  $w_1$  (рис. 3.17). Если данный удар происходит так, что легкая частица начинает двигаться вперед в направлении  $+\hat{x}$ , то какова будет ее скорость после удара  $w_2$ ? Какая доля энергии тяжелой частицы будет потеряна ею при этом ударе?

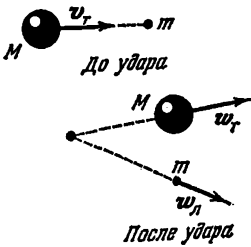


Рис. 3.17.

Согласно закону сохранения импульса, после удара конечная скорость тяжелой частицы не может иметь составляющей в направлении  $\hat{y}$ , так что

$$M v_1 \hat{x} = M w_1 \hat{x} + m w_2 \hat{x}, \quad (38)$$

или

$$M v_1 = M w_1 + m w_2. \quad (39)$$

Из закона сохранения энергии следует (так как для упругого удара  $\Delta \epsilon = 0$ ):

$$\frac{1}{2} M v_1^2 = \frac{1}{2} M w_1^2 + \frac{1}{2} m w_2^2. \quad (40)$$

Используя уравнение (39), можно переписать уравнение (40) в следующем виде:

$$\frac{1}{2} M \left( w_1^2 + \frac{2m}{M} w_1 w_2 + \frac{m^2}{M^2} w_2^2 \right) = \frac{1}{2} M w_1^2 + \frac{1}{2} m w_2^2. \quad (41)$$

Если  $m \ll M$ , то можно не учитывать в скобках слагаемое порядка  $m^2/M^2$ , так что (41) приводится к такому соотношению:

$$m w_1 w_2 \approx \frac{1}{2} m w_2^2, \quad (42)$$

или

$$w_2 \approx 2 w_1. \quad (43)$$

Следовательно, легкая частица начинает двигаться со скоростью, приблизительно вдвое большей, чем скорость тяжелой частицы после удара. Далее, подставляя  $w_x$  из (43) в уравнение (39), получаем

$$Mv_x \cong Mw_x + 2mw_x, \quad (44)$$

или

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} \cong \frac{v_x - w_x}{w_x} \cong \frac{2m}{M}. \quad (45)$$

Используя уравнение (45), можно определить долю энергии тяжелой частицы, потерянную при ударе:

$$\frac{\Delta \left( \frac{1}{2} Mv_x^2 \right)}{\frac{1}{2} Mv_x^2} = \frac{Mv_x \Delta v_x}{\frac{1}{2} Mv_x^2} = \frac{2\Delta v_x}{v_x} \cong \frac{4m}{M}. \quad (46)$$

Другие примеры применения закона сохранения импульса разбираются в гл. 6.

### 3.8. Силы инерции

Мы знаем, что в инерциальной системе отсчета, согласно второму закону Ньютона,

$$F = Ma_{\text{и}}, \quad (47)$$

где слева в уравнение входит приложенная сила  $F$ , а справа через  $a_{\text{и}}$  обозначено ускорение, наблюдаемое в инерциальной системе

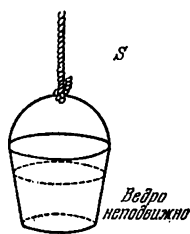


Рис. 3.18. Пример «фиктивных» сил — сил инерции, которые возникают в неинерциальных системах отсчета: когда ведро неподвижно относительно инерциальной системы отсчета  $S$ , поверхность воды плоская. Предполагается, что система  $S$  не обладает ускорением относительно удаленных звезд.

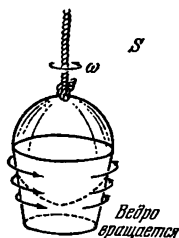


Рис. 3.19. Когда ведро вращается относительно инерциальной системы отсчета  $S$ , поверхность воды принимает форму параболоида.

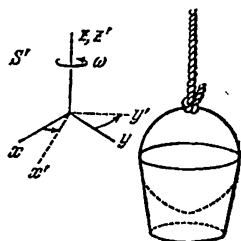


Рис. 3.20. Ведро неподвижно относительно вращающейся системы отсчета  $S'$ . Но поверхность воды все-таки имеет форму параболоида! В инерциальной системе отсчета  $S$  на воду действует центробежная сила инерции.

отсчета. Масса  $M$  принимается постоянной. Вектор  $a_{\text{и}}$  снабжен индексом «и» — начальной буквой слова *инерциальный*. Мы знаем, что уравнение (47) в том виде, как оно написано, не выполняется для неинерциальной системы отсчета, например для системы отсчета,

вращающейся вместе с Землей, так как в него не входит величина  $a_0$  — ускорение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы. Если  $a$  — это ускорение тела, измеренное в неинерциальной системе отсчета, то  $a + a_0 = a_{\text{и}}$ , или

$$F = M(a + a_0). \quad (48)$$

Если мы проводим опыты в неинерциальной системе отсчета, то, составляя уравнение, характеризующее действие силы, мы всегда обязательно должны учитывать ускорение этой системы  $a_0$ . Имея дело с неинерциальной системой отсчета, часто бывает удобно вместо  $a_0$  вводить величину  $F_0$ , определенную таким образом, чтобы уравнение (48) приняло следующий вид:

$$F + F_0 = Ma, \quad (49)$$

где величина

$$F_0 \equiv -Ma_0 \quad (50)$$

называется *фиктивной силой* или *силой инерции*, в отличие от истинной силы  $F$  \*).

По определению сила инерции равна по абсолютной величине и противоположна по направлению произведению массы на ускорение неинерциальной системы; она просто выражает влияние ускорения самой неинерциальной системы отсчета на характер движения относительно этой системы; это та величина, которую нам надо

\*) Вокруг понятия сил инерции часто возникают разногласия. Однако большинству специалистов, по-видимому, ясно, что с этими разногласиями не связана никакой физической проблемы, а речь идет о недоразумениях, возникающих в результате нечеткой терминологии, а иногда и вследствие неправильной трактовки данных опыта.

Центробежные силы инерции иногда называют фиктивными. Многие специалисты считают, что это неправильно или по крайней мере спорно. Термин «фиктивная сила» («кажущаяся сила» и т. п.) вряд ли можно считать удачным, потому что сила  $F_0$  имеет совершенно определенный физический смысл: она существует только для наблюдателя, жестко связанного с неинерциальной системой отсчета.

Прежде чем применять термин «фиктивная сила», следовало бы точно установить понятие фиктивной силы. Этому понятию, однако, можно приписывать различный смысл, и поэтому оно остается спорным. В сущности говоря, вопрос о реальности или фиктивности сил инерции возникает потому, что, рассматривая силы инерции, мы не можем указать второе тело, участвующее во взаимодействии, при котором возникают силы инерции. Мы не можем, однако, считать исключенным предположение о том, что этим вторым телом является вся совокупность небесных тел Вселенной. За этим исключением, силы инерции во всем остальном подобны обычным, «реальным» силам: они способны сообщать ускорение, совершать работу, мы складываем эти силы с другими силами, которые считаем «реальными», и получаем общую результирующую и т. д. Кроме того, с точки зрения общей теории относительности силы инерции эквивалентны силам тяготения (см. книги С. Э. Хайкина «Физические основы механики», Физматгиз, 1963, и «Силы инерции», Наука, 2-е изд., 1967). (Прим. ред.)

прибавить к истинной силе  $F$ , чтобы их сумма стала равной величине  $Ma$ , наблюдаемой в неинерциальной системе отсчета. Однако в физике все фиктивное выглядит запутанным, но вы всегда можете решать любую задачу, обращаясь к уравнению (48) и не пользуясь понятием о силе инерции.

**Пример. Акселерометр.** Предположим, что к массе  $M$  в направлении  $x$  со стороны растянутой пружины приложена сила, равная  $F_x = -Cx$ , где  $C$  — постоянная. Представим себе неинерциальную систему отсчета с ускорением  $a_0 = a_0 \hat{x}$  также в направлении  $x$ . Если пружина неподвижна относительно такой неинерциальной системы отсчета, то в этой системе ее ускорение  $a$  равно нулю и уравнение  $F = M(a + a_0)$  переходит в уравнение  $F_x = Ma_0$ , а уравнение  $F + F_0 = Ma$  приводится к следующему виду:

$$F_x + F_{0x} = 0. \quad (51)$$

Следовательно,

$$-Cx + F_{0x} = 0, \quad -Cx - Ma_0 = 0, \quad (52)$$

или

$$x = -\frac{Ma_0}{C}. \quad (53)$$

Смещение  $x$  пропорционально ускорению  $a_0$  неинерциальной системы. Неинерциальной системой может быть, например, самолет или автомобиль. Как мы видим, уравнение (53) описывает принцип работы *акселерометра*, т. е. прибора, в котором к пружине прикреплена масса  $M$ , могущая перемещаться только в одном направлении. Ускорение  $a_0$  неинерциальной системы отсчета измеряется по смещению  $x$  этой массы.

**Пример. Центробежная сила и центростремительное ускорение в равномерно вращающейся системе отсчета.** Хотя ниже мы подробно разберем вращающиеся системы отсчета, целесообразно уже сейчас обсудить один простой и распространенный пример. Рассмотрим материальную точку  $M$ , покоящуюся относительно неинерциальной системы отсчета, так что в этой системе ее ускорение  $a = 0$ . Сама же неинерциальная система отсчета равномерно вращается вокруг оси, неподвижной относительно инерциальной системы отсчета. Как было показано в гл. 2, ускорение данной точки относительно инерциальной системы отсчета равно

$$a_0 = -\omega^2 \rho, \quad (54)$$

где вектор  $\rho$  направлен перпендикулярно к оси вращения и идет от этой оси к данной точке. Здесь используется буква  $\rho$  для обозначения двумерного аналога радиуса-вектора  $r$ , определяющего положение точки в трехмерном пространстве.

Уравнением (54) определяется общеизвестное *центростремительное ускорение*. Материальную точку можно удерживать в покое относительно вращающейся системы отсчета, например, с помощью

растянутой пружины. Условие, что в неинерциальной системе отсчета  $\mathbf{a}=0$ , приводит, согласно уравнению (49), к следующему соотношению:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_0 = M\mathbf{a}_0 = -M\omega^2\rho. \quad (55)$$

В этом случае сила инерции носит название *центробежной силы инерции*; она равна  $F_0=M\omega^2\rho$  и направлена от оси. В данном примере центробежная сила инерции уравновешивается упругой силой пружины, так что относительно вращающейся неинерциальной системы отсчета ускорение обращается в нуль (в этой системе отсчета материальная точка неподвижна).

Если, например,  $M=100$  г,  $\rho=10$  см, а система отсчета вращается со скоростью 100 об/сек, то какова будет величина центробежной силы? Получаем:

$$\begin{aligned} F_0 &= M\omega^2\rho = \\ &= (10^2) (2\pi \cdot 100)^2 (10) \text{ дин} \approx \\ &\approx 4 \cdot 10^8 \text{ дин}. \end{aligned}$$

**Пример. Опыты в свободно падающем лифте.** Пусть ускорение движения неинерциальной системы (свободно падающего лифта) равно

$$\mathbf{a}_0 = -g\hat{z}, \quad (56)$$

где единичный вектор  $\hat{z}$  направлен вертикально вверх от поверхности Земли, а  $g$  — ускорение силы тяжести, соответствующее свободному падению тела под действием собственного веса. Согласно уравнению (50) сила инерции, действующая на материальную точку  $M$  в этой неинерциальной системе отсчета, равна

$$\mathbf{F}_0 = -M\mathbf{a}_0 = Mg\hat{z}. \quad (57)$$

Помещенный в лифте незакрепленный предмет находится под действием суммы следующих сил: силы тяготения  $\mathbf{F} = -Mg\hat{z}$  и силы инерции  $\mathbf{F}_0 = Mg\hat{z}$ , так что результирующая кажущаяся сила, действующая на этот предмет в неинерциальной системе отсчета, связанной со свободно падающим лифтом, равна нулю:

$$\mathbf{F}_0 + \mathbf{F} = 0. \quad (58)$$

Следовательно, относительно неинерциальной системы отсчета тело не имеет ускорения. Это явление носит характер «невесомости».

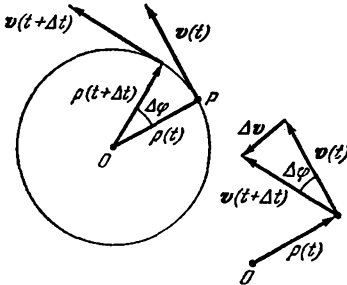


Рис. 3.21. Центростремительное ускорение. Если точка  $P$  движется по окружности радиусом  $\rho$  с постоянной по величине скоростью  $v$ , то ускорение  $\mathbf{a}$  точки  $P$  всегда направлено к центру окружности  $O$ . Абсолютная величина  $\mathbf{a}$  равна  $a=v^2/\rho=\omega^2\rho$ , где  $\omega=d\varphi/dt=v/\rho$ . Чтобы убедиться в этом, надо вспомнить, что вектор  $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{v}/\Delta t)$  всегда направлен к точке  $O$ , а его абсолютная величина

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right| = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \sin \Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $a=v\omega=v^2/\rho=\omega^2\rho$ . Этот результат уже был выведен аналитически в гл. 2.

Если тело не имело начальной скорости относительно лифта, то оно кажется парящим в пространстве.

**Пример. Маятник Фуко.** Маятник Фуко представляет собой прибор, делающий наглядным вращение Земли; с его помощью можно доказать, что Земля не является инерциальной системой отсчета.

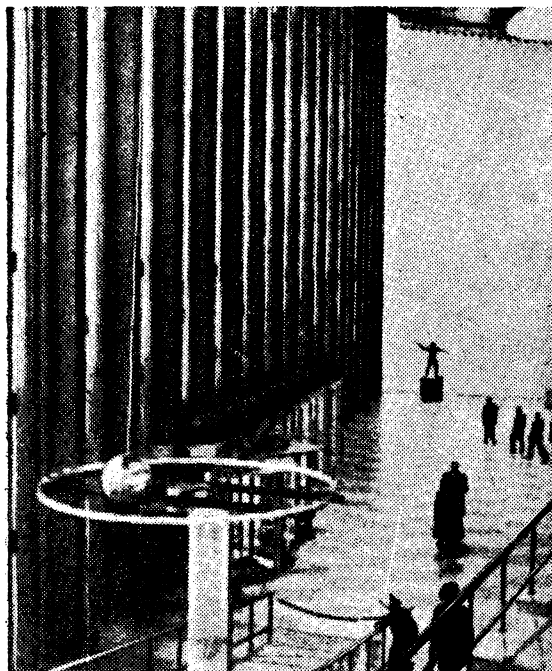


Рис. 3.22. Маятник Фуко, установленный в штаб-квартире Организации Объединенных Наций в Нью-Йорке. Шар, который виден слева, позолочен и весит 91 кг. Он подвешен к потолку и находится на высоте 7,6 м над полом вестибюля. Трос из нержавеющей стали позволяет ему свободно колебаться в любой вертикальной плоскости. Этот шар колеблется непосредственно над металлическим кольцом диаметром около 1,8 м, поднятым над полом. Он непрерывно качается, как маятник, а плоскость его качаний медленно поворачивается по часовой стрелке, и, таким образом, получается наглядное подтверждение вращения Земли. Полный круг совершается приблизительно за 36 часов 45 минут. На шаре написано высказывание голландской королевы Юлианы: «Это удовольствие — жить сегодня и завтра».

(Фото ООН)

Описываемый опыт был впервые публично произведен Фуко в 1851 г. Под большим куполом парижского Пантеона на тросе длиной около 70 м была подвешена масса в 28 кг. Крепление верхнего троса позволяет маятнику свободно качаться в любом направлении. Период колебания маятника такой длины составляет около 17 сек (см. гл. 7).

На полу под куполом была сооружена круговая ограда радиусом около 3 м, причем центр окружности находился на одной вертикали с точкой подвеса маятника. Внутри этой ограды был насыпан песок, а маятник оканчивался снизу металлическим острием, которое при каждом качании прочерчивало след на песке.

При длительном наблюдении было видно, как плоскость качаний маятника поворачивалась по направлению часовой стрелки, если смотреть сверху. За час плоскость качаний повернулась более чем на 11°. Полный оборот совершался примерно за 32 часа. При одном колебании эта плоскость поворачивалась на 3 мм по окружности.

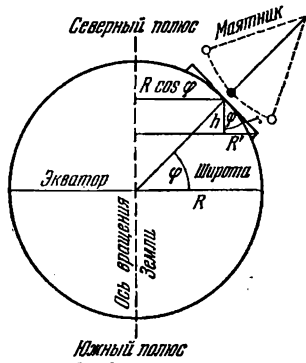


Рис. 3.23. Маятник Фуко, размеры которого сильно преувеличены относительно размеров Земли, схематически показан приблизительно на широте Парижа. Круг с песком под маятником имеет радиус  $r$ . Расстояние от земной оси до центра качаний маятника равно  $R \cos \varphi$ . Из-за вращения Земли южная сторона круга с песком движется быстрее северной стороны (относительно инерциальной системы отсчета).

Почему происходит вращение плоскости качаний маятника? Если бы опыт Фуко производился на Северном полюсе Земли, то мы могли бы сразу увидеть, что эта плоскость остается неподвижной относительно инерциальной системы отсчета, а Земля под маятником вращается, совершая один оборот за каждые 24 ч. Если смотреть сверху (скажем, с Полярной звезды) на Северный полюс, то вращение Земли совершается против часовой стрелки, так что наблюдателю на Земле, забравшемуся на лестницу у Северного полюса, казалось бы, что относительно него плоскость движения маятника вращается по часовой стрелке.

Иным (и более сложным для анализа) представляется положение в том случае, когда мы покинем Северный полюс, и тогда уже период полного оборота будет

длиннее. Рассмотрим относительные скорости крайних, северной и южной, точек круга с песком, имеющего радиус  $r$  (рис. 3.23). Южная точка находится дальше от оси вращения Земли, и поэтому она будет перемещаться в пространстве быстрее, чем северная точка. Если обозначить через  $\omega$  угловую скорость вращения Земли, а через  $R$  — радиус Земли, то скорость движения центра круга с песком равна  $\omega R \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — широта Парижа ( $48^\circ 51'$  сев. широты), отсчитываемая от экватора Земли. Как можно видеть на рис. 3.23, самая северная точка круга движется со скоростью

$$v_c = \omega R \cos \varphi - \omega r \sin \varphi, \quad (58a)$$

а самая южная точка — со скоростью

$$v_{ю} = \omega R \cos \varphi + \omega r \sin \varphi. \quad (58б)$$

Разность между каждой из этих скоростей и скоростью центра



круга равна

$$\Delta v = \omega r \sin \varphi. \quad (58\text{в})$$

Если маятник был выведен из состояния покоя в центре круга толчком в плоскости север — юг, то составляющая его скорости в направлении восток — запад всегда будет той же самой, что и в центре круга.

Длина окружности круга равна  $2\pi r$ , так что время  $T_0$  полного оборота плоскости движения маятника при условии, что величина  $\Delta v$  постоянна для всей окружности, равно

$$T_0 = \frac{2\pi r}{\omega r \sin \varphi} = \frac{2\pi}{\sin \varphi} (\omega). \quad (58\text{г})$$

На экваторе  $\sin \varphi = 0$  и время  $T_0$  обращается в бесконечность.

Что произойдет, когда плоскость движения маятника совпадет с плоскостью восток — запад, проходящей через центр круга? Почему величина  $\Delta v$  должна оставаться здесь такой же, что и в плоскости север — юг? Это легче представить себе, если произвести следующий опыт с глобусом. Возьмите кусочек картона или плотной бумаги и держите его около глобуса. Пусть он почти касается глобуса в точке, где обозначен Париж, и находится в плоскости восток — запад, располагаясь по нормали к поверхности глобуса. Направление нормали к поверхности глобуса — это линия, в которой расположен трос маятника. Одной рукой держите кусочек картона, чтобы его плоскость была неподвижной, и одновременно другой рукой медленно вращайте глобус. Заметьте, что один конец отрезка, которым картон почти соприкасается с глобусом, кажется движущимся на юг, а другой конец кажется движущимся на север. Как результат такого наблюдения или как итог подробного теоретического анализа получается та же величина  $\Delta v$ , что и найденная выше: действительно, плоскость движения маятника поворачивается относительно кольца ограды на полу Пантеона с угловой скоростью  $\omega \sin \varphi$ , где  $\omega$  — это угловая скорость вращения Земли, а  $\varphi$  — широта. Математический анализ уравнений движения маятника Фуко приводится во многих учебниках по теоретической механике для высшей школы.

### 3.9. Закон всемирного тяготения Ньютона

С целью подготовки к изучению последующих глав желательно рассмотреть закон всемирного тяготения. Этот закон гласит, что каждая масса  $M_1$  притягивается к каждой другой массе  $M_2$  во Вселенной с силой, равной

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (59)$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, идущий от  $M_1$  к  $M_2$ , а  $G$  — постоянная, имеющая величину  $6,67 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2/\text{г}^2$ , или  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ . Сила всемирного тяготения — центральная сила: она направлена по линии,

соединяющей две материальные точки. В учебниках для средней школы обычно описываются способы определения числовой величины  $G$ . Из них классическим является опыт Кэвендиша.

Экспериментально известно также, что с большой точностью гравитационная масса тела равна его инертной массе, т. е. величина массы  $M$ , которая входит в приведенное выше уравнение для силы всемирного тяготения, равна величине массы того же тела, входящей в уравнение второго закона Ньютона:  $F=Ma$ . Это равенство будет обсуждаться в гл. 14. Масса, входящая в уравнение закона

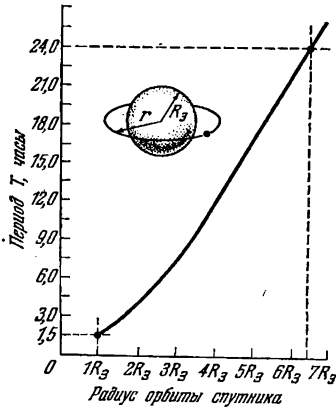


Рис. 3.24. Период обращения  $T=2\pi/\omega$  искусственного спутника, описывающего круговую орбиту вокруг Земли. Этот график построен по уравнению (61).

направление движения спутника по орбите — то же, что и направление вращения Земли.

Для круговой орбиты сила притяжения равна по величине и противоположна по направлению центробежной силе:

$$\frac{GM_3 M_c}{r^2} = M_c \omega^2 r, \quad (60)$$

где  $M_3$  — масса Земли, а  $M_c$  — масса спутника. Преобразуем уравнение (60) следующим образом:

$$r^3 = \frac{GM_3}{\omega^2} = \frac{GM_3 T^2}{(2\pi)^2}, \quad (61)$$

где  $T$  — период (рис. 3.24). В нашей частной задаче мы хотим получить для орбиты спутника величину  $\omega$ , равную угловой скорости  $\omega_3$  вращения Земли вокруг ее оси. Угловая скорость вращения Земли равна

$$\omega_3 = \frac{2\pi \text{ сек}^{-1}}{8,64 \cdot 10^4} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}. \quad (62)$$

При этом, если  $\omega = \omega_3$ , то из (61) следует:

$$r^3 = \frac{(6,67 \cdot 10^{-8}) \cdot (5,98 \cdot 10^{27})}{(7,3 \cdot 10^{-5})^3} \text{ см}^3 \approx 75 \cdot 10^{27} \text{ см}^3, \quad (63)$$

или

$$r \approx 4,2 \cdot 10^9 \text{ см}. \quad (64)$$

Радиус Земли равен  $6,38 \cdot 10^8 \text{ см}$ . Расстояние (64), грубо говоря, составляет одну десятую расстояния до Луны.

### Задачи

1. *Скорость движения Земли вокруг Солнца.* а) Какова скорость, с которой центр Земли движется по орбите вокруг Солнца? (Считать орбиту круговой. Радиус орбиты приведен в таблице физических постоянных в приложении к этому тому.)

О т в е т.  $3,0 \cdot 10^6 \text{ см/сек}$ .

б) Каково отношение этой скорости к скорости света?

О т в е т.  $10^{-4}$ .

2. *Скорость вращательного движения.* Какова скорость, с которой точка на экваторе поверхности Земли движется относительно центра Земли?

О т в е т.  $4,7 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$ .

3. *Падающее тело.* Массивное тело брошено с высоты 100 м. Сколько пройдет времени, пока оно достигнет поверхности Земли \*)?

4. *Ускорение при круговом движении.* а) Каково центростремительное ускорение (в  $\text{см/сек}^2$ ) тела с массой  $M=1 \text{ кг}=1000 \text{ г}$ , движущегося по кругу радиусом  $R=100 \text{ см}$  с угловой скоростью  $\omega=10 \text{ сек}^{-1}$ ?

О т в е т.  $1 \cdot 10^4 \text{ см/сек}^2$ .

б) Какова при этом центробежная сила (в динах)?

О т в е т.  $1 \cdot 10^6 \text{ дин}$ .

5. *Угловая частота и период.* Камертон колеблется с частотой  $f$ , равной 60 *гц*.

а) Какова угловая частота его колебаний  $\omega$  (в  $\text{рад/сек}$ )? Заметьте, что мы можем говорить об угловой частоте в связи с любым периодическим колебанием, а не только в связи с движением по окружности.

б) Каков период его колебаний  $T$  (в *сек*)? (Период — это время, за которое совершается полный цикл движения.)

6. *Ускорение Земли.* Предположим, что вся Земля покрыта слоем непрозрачных облаков. Опишите опыт, на основании которого можно было бы однозначно определить (имея в виду, что ускоренное движение может быть как вращательным, так и поступательным), является ли Земля инерциальной системой отсчета.

7. *Траектория движения относительно различных систем отсчета.* Некоторый предмет при  $t=0$  начинает движение в горизонтальном направлении со скоростью  $1000 \text{ см/сек}$  относительно системы отсчета, которая в свою очередь в тот же момент  $t=0$  начинает движение с поверхности Земли без начальной скорости и с ускорением, направленным вертикально вверх и равным  $300 \text{ см/сек}^2$ .

а) Каковы уравнения траектории этого предмета  $x=f(t)$ ,  $y=F(t)$  относительно такой инерциальной системы отсчета, начало координат которой неподвижно и находится на поверхности Земли в начальной точке движения (вращение Земли не учитывать)?

б) Изобразить траектории этого предмета в обеих системах отсчета.

8. *Ускорение при круговом движении.* Тело движется по окружности с постоянной по величине скоростью  $v=50 \text{ см/сек}$ . Вектор скорости  $v$  изменяет направление на  $30^\circ$  за 2 *сек*.

а) Найти абсолютную величину вектора изменения скорости  $\Delta v$ .

б) Найти абсолютную величину среднего ускорения в течение этого промежутка времени.

в) Найти центростремительное ускорение этого равномерного кругового движения?

О т в е т.  $13,1 \text{ см/сек}^2$ .

\*) Допустить, что падение является свободным. (Прим. ред.)

9. **Центробежная сила инерции.** Тело, неподвижное относительно поверхности планеты, масса и радиус которой соответственно равны массе и радиусу Земли, имеет на экваторе ускорение силы тяжести, равное нулю. Какова продолжительность суток на этой планете?

Ответ. 1,3 ч.

10. **Необходимые условия удара.** Две частицы находятся в следующих начальных положениях:  $x_1=5$  см,  $y_1=0$  и  $x_2=0$ ,  $y_2=10$  см, причем скорость первой частицы  $v_1=-4 \cdot 10^4 \hat{x}$  см/сек, а скорость второй частицы  $v_2$  имеет направление  $-\hat{y}$  (рис. 3.25).

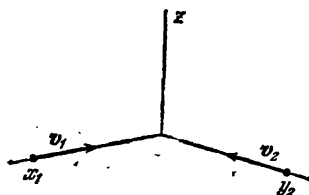


Рис. 3.25.

а) Какова должна быть величина  $v_2$ , чтобы между этими частицами произошел удар?

Ответ.  $8 \cdot 10^4 \hat{y}$  см/сек.

б) Какова величина относительной скорости  $v_{отн}$ ?

Ответ.  $4 \cdot 10^4(2\hat{y}-\hat{k})$  см/сек.

в) Определить общий критерий, выражающий необходимое условие для удара двух материальных точек через их радиусы-векторы  $r_1, r_2$  и скорости  $v_1, v_2$ .

11. **Кинематика удара.** Соударяются две частицы (материальные точки), которые могут двигаться только в горизонтальной плоскости. Начальные данные:  $M_1=85$  г,  $M_2=200$  г,  $v_1=6,4\hat{x}$  см/сек,  $v_2=(-6,7\hat{x}-2,0\hat{y})$  см/сек.

а) Найти скорость центра масс. Положение центра масс определяется как

$$R_{ц.м} = \frac{M_1 r_1 + M_2 r_2}{M_1 + M_2},$$

откуда получается скорость центра масс:

$$\dot{R}_{ц.м} = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}.$$

Ответ.  $(-2,3\hat{x}-1,4\hat{y})$  см/сек.

б) Найти общий импульс.

Ответ.  $(-796\hat{x}-400\hat{y})$  г·см/сек.

в) Найти скорости обеих частиц относительно системы отсчета, в которой центр масс остается неподвижным.

Ответ.  $v'_1=(9,2\hat{x}+1,4\hat{y})$  см/сек,

$$v'_2=(-3,9\hat{x}-0,6\hat{y}) \text{ см/сек.}$$

Пусть после удара  $w_1=9,2$  см/сек,  $w_2=-4,4\hat{x}+1,9\hat{y}$  см/сек.

г) Каково направление скорости  $w_1$ ?

Ответ. Под углом  $-84^\circ$  относительно оси  $x$ .

д) Какова величина относительной скорости  $w_{отн}=w_1-w_2$ ?

Ответ.  $(5,4\hat{x}-11\hat{y})$  см/сек.

е) Каковы начальное и конечное значения суммарной кинетической энергии в системе отсчета, неподвижной относительно лаборатории, и в системе отсчета, неподвижной относительно центра масс? Является ли удар упругим или неупругим при указанных значениях  $v_1, v_2, w_1, w_2$ ?

12. **Неупругий Удар.** Два тела ( $M_1=2$  г,  $M_2=5$  г) имеют скорости  $v_1=10\hat{x}$  см/сек,  $v_2=(3\hat{x}+5\hat{y})$  см/сек непосредственно перед ударом, в результате которого они двигаются дальше как одно целое.

а) Какова скорость центра масс (определение центра масс см. в задаче 11)?

б) Каков конечный импульс этих двух тел относительно лабораторной системы отсчета?

в) Каков их конечный импульс в системе отсчета, неподвижной относительно центра масс?

г) Каково отношение конечной кинетической энергии к начальной?

13. Движение в неинерциальных системах отсчета. Две неинерциальные системы отсчета  $S'$  и  $S''$  совпадают в момент  $t=0$  с инерциальной системой  $S$ . В этот момент система  $S''$  обладает начальной скоростью  $v_0$  вдоль оси  $x$ , а система  $S'$  не движется. При  $t \neq 0$  обе системы отсчета  $S'$  и  $S''$  получают одинаковое ускорение  $a$  вдоль оси  $x$  (рис. 3.26).

а) Как меняются положения  $O'$  и  $O''$  относительно  $O$  в зависимости от времени?  
 б) Указать, как положения  $x'$ ,  $x''$  материальной точки в системах отсчета  $S'$ ,  $S''$  связаны с ее положением  $x$  в системе отсчета  $S$ .

в) Написать относительно системы отсчета  $S$  уравнение движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы  $F$ . Преобразовать это уравнение для систем  $S'$  и  $S''$ . Появляются ли в преобразованных уравнениях силы инерции?

г) Будут ли приложенная сила и сила инерции соответственно одинаковыми в обеих движущихся системах отсчета? Какова скорость системы  $S''$  относительно системы  $S'$ ?

д) Что можно сказать о приложенных силах и силах инерции в обеих системах в общем случае, когда две неинерциальные системы отсчета движутся с постоянной относительной скоростью?

14. Гравитационное притяжение между Землей и Луной. Рассчитать (в динах) силу тяготения между Землей и Луной. Ответ.  $2 \cdot 10^{26}$  дин.

15. Орбита спутника. Доказать, что период  $T$  обращения спутника по круговой орбите, расположенной непосредственно над экватором однородной планеты, имеющей форму шара с плотностью  $\rho$ , зависит только от плотности этой планеты (вывести уравнение).

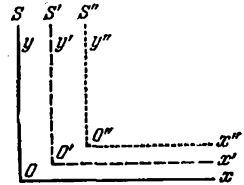


Рис. 3.26.

**Д о п о л н е н и е.** Скорость и ускорение во вращающихся системах координат \*)

Рассмотрим движение относительно неинерциальной системы отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $z$  инерциальной системы отсчета. Постановка этой задачи обусловлена тем фактом, что Земля вращается,

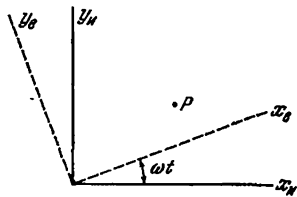


Рис. 3.27.

и поэтому система отсчета, закрепленная относительно поверхности Земли, не является инерциальной системой. Рассматривая движение относительно системы отсчета, неподвижно связанной с поверхностью Земли, надо ввести дополнительные слагаемые в уравнение  $F=Ma$ , чтобы учесть ускорение этой системы отсчета. Помимо уже известного нам центростремительного ускорения мы обнаружим при анализе наличие ускорения Кориолиса, которое играет важную роль при движении больших потоков морских вод и воздуха \*\*).

Можно вывести простое соотношение между координатами  $(x_B, y_B, z_B)$  точки  $P$ , определенными относительно вращающейся системы отсчета, и координатами  $(x_H, y_H, z_H)$  той же точки относительно инерциальной системы. Анализируя геометрические соотношения между координатами (рис. 3.28), мы видим, что

$$x_H = x_B \cos \omega t - y_B \sin \omega t, \quad (65a)$$

$$y_H = x_B \sin \omega t + y_B \cos \omega t, \quad (65б)$$

$$z_H = z_B. \quad (65в)$$

\*) Этот раздел с последующими пятью примерами можно не проходить в курсе по минимальной программе.

\*\*) Оно также играет роль при движении речных вод (подмывание берегов рек в северном полушарии — западных, в южном — восточных). Действию ускорения Кориолиса подвергаются все тела, движущиеся относительно вращающейся системы координат. (Прим. ред.)

Соотношения между составляющими скорости в двух системах отсчета мы находим посредством дифференцирования уравнений (65) по времени (для экономии места мы здесь обозначаем дифференцирование по времени точкой над дифференцируемой величиной; таким образом,  $\dot{x} \equiv dx/dt \equiv v_x$ ;  $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2 \equiv \dot{v}_x \equiv dv_x/dt$ ). Получаем

$$\dot{x}_H = \dot{x}_B \cos \omega t - \omega x_B \sin \omega t - \dot{y}_B \sin \omega t + \omega y_B \cos \omega t, \quad (66a)$$

$$\dot{y}_H = \dot{x}_B \sin \omega t + \omega x_B \cos \omega t + \dot{y}_B \cos \omega t - \omega y_B \sin \omega t, \quad (66b)$$

$$\dot{z}_H = \dot{z}_B. \quad (66a)$$

Ради простоты мы приняли величину  $\omega$  постоянной. Для материальной точки, неподвижной относительно вращающейся системы отсчета ( $\dot{x}_B = \dot{y}_B = \dot{z}_B = 0$ ), уравнения (66) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_H &= -\omega x_B \sin \omega t - \omega y_B \cos \omega t, \\ \dot{y}_H &= \omega x_B \cos \omega t - \omega y_B \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Подобным образом мы получаем уравнения для материальной точки, неподвижной относительно инерциальной системы отсчета ( $\dot{x}_H = \dot{y}_H = \dot{z}_H = 0$ ):

$$\dot{x}_B - \omega y_B = 0, \quad \dot{y}_B + \omega x_B = 0, \quad \dot{z}_B = 0. \quad (68)$$

Составляющие ускорения определяются дифференцированием уравнений (66) по времени:

$$\ddot{x}_H = \ddot{x}_B \cos \omega t - 2\omega \dot{x}_B \sin \omega t - \omega^2 x_B \cos \omega t - \ddot{y}_B \sin \omega t - 2\omega \dot{y}_B \cos \omega t + \omega^2 y_B \sin \omega t, \quad (69a)$$

$$\ddot{y}_H = \ddot{x}_B \sin \omega t + 2\omega \dot{x}_B \cos \omega t - \omega^2 x_B \sin \omega t + \ddot{y}_B \cos \omega t - 2\omega \dot{y}_B \sin \omega t - \omega^2 y_B \cos \omega t, \quad (69b)$$

$$\ddot{z}_H = \ddot{z}_B. \quad (69a)$$

Рис. 3.28. Положение точки  $P$  можно описать координатами  $x_H, y_H, z_H$  инерциальной системы отсчета или координатами  $x_B, y_B, z_B$  вращающейся системы отсчета. Вращение совершается вокруг оси  $z$ .

$$\begin{aligned} x_H &= x_B \cos \omega t - y_B \sin \omega t, \\ y_H &= x_B \sin \omega t + y_B \cos \omega t, \\ z_H &= z_B. \end{aligned}$$

Заметим, что для материальной точки, неподвижной относительно вращающейся системы отсчета, уравнения (69) приводятся с помощью соотношений (65) к следующему виду:

$$\ddot{x}_H = -\omega^2 (x_B \cos \omega t - y_B \sin \omega t) = -\omega^2 x_H, \quad (70a)$$

$$\ddot{y}_H = -\omega^2 (x_B \sin \omega t + y_B \cos \omega t) = -\omega^2 y_H. \quad (70b)$$

Уравнения (70) выражаются в векторной форме таким образом:

$$\mathbf{a}_H = -\omega^2 \mathbf{r}_H, \quad (71)$$

где  $\mathbf{a}_H \equiv \ddot{\mathbf{r}}_H$  — это ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета, а  $\mathbf{r}_H = x_H \hat{x}_H + y_H \hat{y}_H$  (см. уравнение (54)). Уравнение (71) представляет собой формулу для определения обычного центростремительного ускорения.

В уравнениях (69) содержатся принципиальные физические результаты. Целесообразно перевести эти уравнения в векторную форму. После кропотливых алгебраических преобразований, которые мы воспроизводим ниже, получается следующий важный результат:

$\mathbf{a}_H$	$=$	$\mathbf{a}_B$	$+$	$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B$	$+$	$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B)$ ,	(72)
Ускорение в инерциальной системе отсчета		Ускорение во вращающейся системе отсчета		Ускорение Кориолиса		Центростремительное ускорение	

где индексом «в» обозначены ускорение, скорость и радиус-вектор во вращающейся системе отсчета. Угловая скорость  $\omega$  принята постоянной. Под дополнительными слагаемыми правой части приведены их обычные названия.

Можно убедиться, что уравнение (72) перейдет в уравнения (69), если  $\omega = \omega \hat{z}$ ; взяв проекции обеих частей уравнения (72) на ось  $x_n$ , получаем

$$(a_v)_{x_n} = (a_v)_{x_n} + 2(\omega \times v_v)_{x_n} + [\omega \times (\omega \times r_B)]_{x_n}. \quad (72a)$$

В уравнении (72a) специальные индексы показывают, что берутся проекции векторов на ось  $x_n$ . Например, проекция вектора  $a_v$  на ось  $x_n$  равна

$$(a_v)_{x_n} = \ddot{x}_v \cos \omega t - \dot{y}_v \sin \omega t, \quad (72b)$$

потому что все векторы, выраженные через величины во вращающейся системе отсчета, должны проектироваться на направление  $x_n$  одинаковым образом. Уравнение (65a) показывает, как проектируется на направление  $x_n$  вектор  $r_B$ , и мы следуем

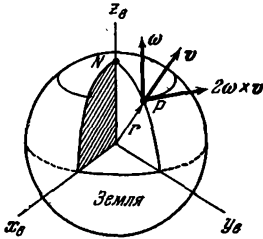


Рис. 3.29. Ускорение Кориолиса во вращающейся системе координат. Вращающаяся система  $(x_B, y_B, z_B)$  закреплена неподвижно на Земле; угловая скорость  $\omega$  параллельна оси  $z_B$ . Предмет, движущийся вертикально вверх от точки  $P$  на поверхности Земли, имеет начальную скорость  $v$ . Ускорение Кориолиса  $2\omega \times v$  направлено по касательной к линии широты (параллели), проходящей через  $P$ , как показано на схеме;  $N$  — Северный полюс. Если бы предмет свободно падал с какой-то высоты над поверхностью Земли, то ускорение Кориолиса было бы направлено в противоположную сторону. Почему?

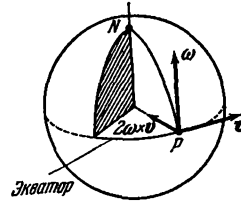


Рис. 3.30. Другой пример, относящийся к ускорению Кориолиса. Если предмет  $P$  находится на экваторе и имеет относительно поверхности Земли скорость  $v$ , касательную к экватору, то дополнительно к ускорению силы тяжести  $g$  он будет иметь ускорение, направленное к центру Земли и имеющее величину  $2\omega v$ . А что будет, если скорость  $v$  направлена на запад, а не на восток?

по тому же пути, проецируя на направление  $x_n$  вектор  $a_v$ . Это приводит нас к уравнению (72b). Второе слагаемое правой части уравнения (72a) преобразуется так:

$$2(\omega \times v_v)_{x_n} = 2\omega_{y_n}(v_v)_{z_n} - 2\omega_{z_n}(v_v)_{y_n} = -2\omega(\dot{x}_v \sin \omega t + \dot{y}_v \cos \omega t), \quad (72b)$$

где мы использовали равенство  $\omega = \omega_{z_n} \hat{z}$  и проецировали  $v_v$  на направление оси  $y_n$ , пользуясь уравнением (65b). Последнее слагаемое правой части (72a) равно

$$[\omega \times (\omega \times r_B)]_{x_n} = -\omega(\omega \times r_B)_{y_n} = -\omega^2(r_B)_{x_n} = -\omega^2(x_B \cos \omega t - y_B \sin \omega t). \quad (72c)$$

Складывая почленно (72b), (72c) и (72a), мы получаем следующее уравнение, совпадающее с уравнением (69a):

$$\ddot{x}_n = (a_v)_{x_n} - 2\omega(v_v)_{y_n} - \omega^2(r_B)_{x_n} = \ddot{x}_v \cos \omega t - \dot{y}_v \sin \omega t - 2\omega \dot{x}_v \sin \omega t - 2\omega \dot{y}_v \cos \omega t - \omega^2 x_B \cos \omega t + \omega^2 y_B \sin \omega t. \quad (73)$$

Этим подтверждается, что векторное уравнение (72) равносильно уравнениям (69) для составляющих.

Уравнения (69) и (72) имеют важное значение. Они связывают ускорение  $a_v$ , наблюдаемое во вращающейся системе отсчета, с ускорением  $a_n$  относительно

инерциальной системы отсчета. Для того чтобы применять второй закон Ньютона, нам нужна величина  $a_n$ . Все слагаемые правой части уравнения (72) состоят из величин, наблюдаемых во вращающейся системе отсчета. Первое слагаемое  $a_B$  — ускорение относительно вращающейся системы отсчета; второе слагаемое  $2\omega \times v_B$  называется *ускорением Кориолиса*; третье слагаемое  $\omega \times (\omega \times r_B)$  — это обычное центростремительное ускорение материальной точки, движущейся по окружности. С целью упрощения мы исключили слагаемое  $(d\omega/dt) \times r_B$ , которое появилось бы, если бы при движении изменялась угловая скорость  $\omega$ .

Суммарная сила инерции  $F_0$  для равномерного вращения ( $\dot{\omega}=0$ ) определяется по формулам (50) и (72): из уравнения  $F_0 = -Ma_0$  мы получаем

$$F_0 = -2M\omega \times v_B - M\omega \times (\omega \times r_B). \quad (74)$$

Кориолисова                      Центробежная  
сила инерции                      сила инерции

Центробежная сила инерции уже известна нам; если материальная точка неподвижна относительно вращающейся системы отсчета ( $v_B=0$ ), то эта центробежная сила является единственной силой инерции. Мы можем переписать выражение для центробежной силы инерции в таком виде:

$$-M\omega \times (\omega \times \rho) = M\omega^2 \rho, \quad (74a)$$

где  $\rho$  — вектор, проведенный от оси вращения к данной точке перпендикулярно к этой оси. Это совпадает с нашим прежним определением центробежной силы инерции по формуле (55).

Кориолисова сила — это сила инерции, которая действует на материальную точку только в том случае, когда она движется относительно вращающейся системы отсчета.

**Пример.** *Равномерное прямолинейное движение в инерциальной системе отсчета.* Тело движется относительно инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно

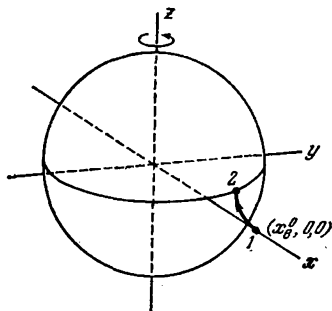


Рис. 3.31. 1 — начальная точка движения; 2 — точка падения на Землю.

по траектории, заданной следующими уравнениями:

$$x_n = v_0 t, \quad y_n = 0, \quad z_n = 0. \quad (75)$$

Какой будет эта траектория в системе отсчета, вращающейся против часовой стрелки вокруг оси  $z_n$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ ? Подставляя  $x_n, y_n, z_n$  из (75) в (65), получаем

$$\left. \begin{aligned} v_0 t &= x_B \cos \omega t - y_B \sin \omega t, \\ 0 &= x_B \sin \omega t + y_B \cos \omega t, \\ 0 &= z_B. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Решая систему уравнений (76), находим

$$x_B = v_0 t \cos \omega t, \quad y_B = -v_0 t \sin \omega t, \quad z_B = 0. \quad (77)$$

**Пример.** *Свободное падение тел с башни.* Пусть какое-то тело, находившееся в начальный момент  $t=0$  в точке  $(x_B^0, 0, 0)$  в состоянии покоя относительно Земли ( $v_B=0$ ), стало падать под действием силы тяжести. Пусть эта исходная точка движения расположена непосредственно над экватором Земли, а начало координат вращающейся системы отсчета  $x_B, y_B, z_B$  находится в центре Земли. Ось  $z_B$  совпадает с осью вращения Земли. Требуется рассчитать ординату  $y_B$  той точки на поверхности Земли, куда упадет это тело.

Истинное ускорение тела относительно инерциальной системы отсчета (ускорение силы тяжести) имеет величину  $g$  и направление  $-\hat{x}_B$ , т. е. оно направлено противоположно начальному положению оси  $x_B$  вращающейся системы отсчета, неподвижной относительно Земли. Сила тяжести, действующая на тело, не имеет составляющей в направлении  $\hat{y}_B$ . Поэтому, если взять проекции обеих частей



уравнения (72) на направление  $\hat{y}_B$ , то получится следующее соотношение:

$$0 = \ddot{y}_B + 2\omega \dot{x}_B - \omega^2 y_B, \quad (78)$$

в котором можно подставить  $\dot{x}_B = -gt$  во второе слагаемое и опустить третье слагаемое  $-\omega^2 y_B$ , потому что в начальный момент  $y_B$  равно нулю. В результате получается

$$\ddot{y}_B \cong 2\omega gt, \quad \dot{y}_B \cong \omega gt^2, \quad (79)$$

а искомое смещение  $y_B$  равно

$$y_B \cong \frac{1}{3} \omega gt^3. \quad (80)$$

Оно направлено к востоку. При нашем выборе осей координат угловая скорость вращения Земли  $\omega$  положительна.

Это смещение нетрудно наблюдать. Пусть начальная точка находится на верхушке башни высотой 100 м над поверхностью Земли. Тогда мы получаем из соотношения  $\Delta x_B \cong -\frac{1}{2} gt^2$  для свободного падения тела:

$$t^2 \cong -\frac{2\Delta x_B}{g} \approx \frac{2 \cdot 10^4}{10^8} \text{сек}^2 \approx 20 \text{сек}^2, \quad (81)$$

откуда следует согласно уравнению (80) (если подставить в него  $t^2$  и угловую скорость вращения Земли  $\omega \approx 0,7 \cdot 10^{-4} \text{сек}^{-1}$ ):

$$y_B \cong \frac{1}{3} \omega gt^3 \approx \frac{(10^{-4}) \cdot (10^8) \cdot (10^2) \text{ см}}{3} \approx 3 \text{ см}. \quad (82)$$

Подумайте, каким образом можно было бы определить проходящую через верхушку башни истинную вертикаль, относительно которой наблюдается смещение на расстояние  $y_B$ .

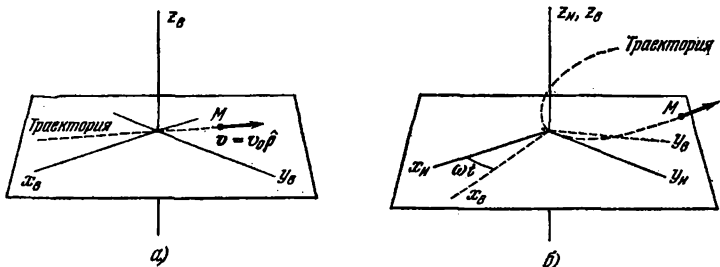


Рис. 3.32. а) Материальная точка  $M$  движется относительно равномерно вращающейся системы отсчета в плоскости  $x_B y_B$  по прямой линии, пересекающей ось вращения. б) Движение той же точки  $M$  относительно инерциальной системы отсчета.

**Пример.** *Равномерное прямолинейное движение во вращающейся системе отсчета.* Какая необходима сила, чтобы под ее действием тело массы  $M$  двигалось относительно системы отсчета, равномерно вращающейся вокруг некоторой оси, с постоянной скоростью, направленной по прямой линии, перпендикулярной к этой оси?

Соотношение между ускорениями:

$$a_N = a_B + 2\omega \times v_B + \omega \times (\omega \times r_B). \quad (83)$$

По условиям задачи  $a_B = 0$  и  $v_B = v_0 \hat{\rho}_B$ , где  $\hat{\rho}_B$  — единичный вектор, проведенный от оси вращения к данной материальной точке и перпендикулярный к этой оси.

Тогда, если обозначить через  $\hat{\varphi}_B$  единичный вектор, направленный по касательной к окружности, то

$$a_n = 2\omega v_0 \hat{\varphi}_B - \omega^2 v_0^2 \hat{\rho}_B \quad (84)$$

и

$$F = 2M\omega v_0 \hat{\varphi}_B - M\omega^2 v_0^2 \hat{\rho}_B. \quad (85)$$

Таким образом, для того чтобы характер движения соответствовал поставленным условиям, необходимы: постоянная по величине сила, направленная по касательной к окружности, и обычная центростремительная сила, обращенная внутрь по радиусу  $\rho_B$ , т. е. перпендикулярно к оси вращения.

**П р и м е р.** Поправка к  $g$  на действие центробежной силы. Пусть  $g_B$  — кажущееся ускорение силы тяжести на экваторе, определенное в системе отсчета, вращающейся вместе с Землей. Чему равна истинная величина ускорения силы тяжести  $g_n$  после введения поправки на центробежную силу инерции?

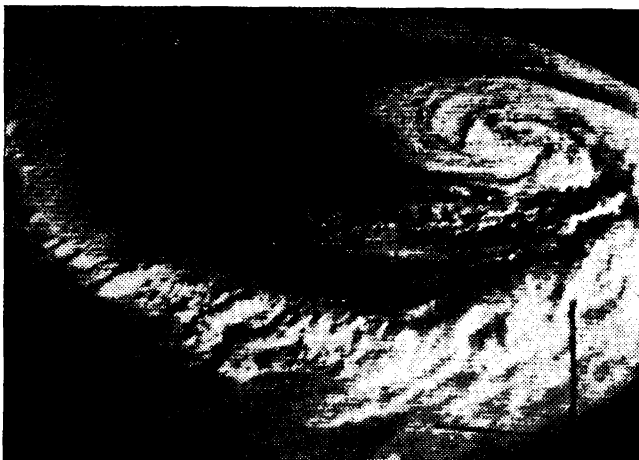


Рис. 3.33. Атмосферный вихрь вблизи Новой Шотландии, сфотографированной с искусственного спутника «Тайрос-VI» 29 мая 1963 г. (Фото д-ра Ф. Зингера)

Если единичный вектор  $\hat{z}_B$  направлен вверх нормально к поверхности Земли, то для определения ускорения  $g_B$  во вращающейся системе отсчета мы получаем следующее уравнение:

$$F_n + F_0 = -Mg_B \hat{z}_B, \quad (86)$$

но  $F_0 = -Ma_0$ , где  $a_0 = -\omega^2 \rho$ , так что в тот момент, когда  $\hat{z}_B$ ,  $z_n$  и  $\hat{\rho}$  совпадают,

$$(F_n)_{z_B} = -Mg_n = -M(g_B + \omega^2 \rho) \quad (87)$$

На экваторе  $\rho = R$ , и, следовательно,

$$g_n = g_B + \omega^2 R. \quad (88)$$

**П р и м е р.** *Направление ветров.* Неодинаковое нагревание земной атмосферы в экваториальной и полярной зонах приводит к возникновению горизонтального перепада давления вдоль меридианов; однако основная составляющая скорости ветров направлена вдоль параллелей. Это объясняется вращением Земли. Как показать, что установившееся движение вязкого газа вдоль поверхности Земли совершается параллельно изобарам (линиям постоянного атмосферного давления)? Каково будет распределение ветров вокруг местной зоны высокого атмосферного давления (антициклона) в северном полушарии?

Сила, обусловленная градиентом давления, действует в направлении с севера на юг перпендикулярно к изобарам. Благодаря вращению Земли поток с севера на юг приобретает относительно вращающейся Земли составляющую в направлении с востока на запад. Эту задачу можно сразу понять, сопоставив ее с данным выше анализом движения маятника Фуко.

В северном полушарии ветры дуют вокруг зоны высокого атмосферного давления по направлению часовой стрелки, так как воздух, движущийся радиально от центра этой зоны, отклоняется вправо, если смотреть вдоль его направления движения.

### Математическое дополнение 1. Дифференцирование произведений векторов

В гл. 2 мы рассматривали дифференцирование векторов, в частности, напомним, что если

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad (89)$$

то

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} \quad (90)$$

при условии, что направления основных координатных векторов постоянны.

Теперь выведем следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}. \quad (91)$$

Обозначим  $\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)$  через  $\mathbf{P}(t)$  и рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t) &= \mathbf{A}(t + \Delta t) \times \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \cong \\ &\cong \left[ \mathbf{A}(t) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Delta t \right] \times \left[ \mathbf{B}(t) + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \Delta t \right] - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) = \\ &= \Delta t \left[ \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] + (\Delta t)^2 \left[ \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (92)$$

Отсюда следует:

$$\dot{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}. \quad (93)$$

Помните, что в векторных произведениях важен порядок сомножителей.

Подобным же способом можно доказать:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}}. \quad (94)$$

### Математическое дополнение 2. Угловая скорость как векторная величина

В гл. 2 мы видели, что повороты на конечный угол не являются векторами, потому что при сложении двух таких поворотов не сохраняются свойства сложения векторов. Эта трудность не возникает при переходе к пределу для бесконечно малых поворотов, так как порядок, в котором производятся два бесконечно малых поворота, не влияет на конечное положение предмета (за исключением слагаемых одного порядка малости с квадратом величины бесконечно малых поворотов, а эти слагаемые в пределе исчезают). Если повернуть тело на бесконечно малый угол  $\Delta\phi_1$  вокруг оси  $\hat{e}_1$  и на бесконечно малый угол  $\Delta\phi_2$  вокруг оси  $\hat{e}_2$ , то при достаточно малых  $\Delta\phi_1$  и  $\Delta\phi_2$  последовательность, в которой совершаются эти повороты, не влияет на результат (мы предполагаем, что обе оси проходят через общую точку). Существует один поворот вокруг оси  $\hat{e}_3$  на угол  $\Delta\phi_3$ , который в пределе для бесконечно малых  $\Delta\phi$  равносильен сумме поворотов 1 и 2. Этот поворот определяется следующим векторным уравнением (рис. 3.34):

$$\Delta\phi_3 \hat{e}_3 = \Delta\phi_1 \hat{e}_1 + \Delta\phi_2 \hat{e}_2. \quad (95)$$

Если эти бесконечно малые повороты совершаются за бесконечно малое время  $\Delta t$ , то мы можем дать следующее определение вектору угловой скорости:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi \hat{e}}{\Delta t}, \quad (96)$$

причем  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Этим равенством определяется вектор угловой скорости, направленный вдоль мгновенной оси вращения и имеющий абсолютную величину, выраженную в радианах на единицу времени.

Чтобы определить направление вращения (т. е. направление  $\hat{e}$ ), мы опять применим правило правой руки: когда четыре пальца правой руки охватывают ось в направлении вращения, большой палец показывает направление вектора  $\omega$ . Скорость любой фиксированной точки вращающегося твердого тела можно просто выразить через угловую скорость  $\omega$ . Охарактеризуем положение данной точки  $O$ , находящейся на оси вращения. Через малый промежуток времени той же точке из-за вращения тела будет соответствовать другой радиус-вектор, а ее скорость  $v = \dot{r}$  будет иметь следующую абсолютную величину:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho |\omega| = |\mathbf{r}| |\omega| \sin \theta, \quad (97)$$

где  $\theta$  — полярный угол между  $\omega$  и  $\mathbf{r}$ . Направление скорости  $\mathbf{v}$  перпендикулярно к  $\omega$  и к  $\mathbf{r}$ . Вся эта информация содержится в следующем векторном уравнении:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{r}, \quad (98)$$

относящемся к любой фиксированной точке вращающегося твердого тела.

### Из истории физики. Опыт с жидкостью во вращающемся сосуде и представления Ньютона об абсолютном и относительном движении

Ниже приводится отрывок из «Математических начал натуральной философии» Ньютона, впервые опубликованных в 1686 г.\*).

«Проявления, которыми различаются абсолютное и относительное движения, состоят в силах стремления удалиться от оси вращательного движения, ибо в чисто относительном вращательном движении эти силы равны нулю; в истинном же и абсолютном они больше или меньше, сообразно количеству движения.

Если на длинной нити подвесить сосуд и, вращая его, закрутить нить, пока она не станет совсем жесткой, затем наполнить сосуд водой и, удержав сперва вместе с водой в покое, пустить, то под действием появляющейся силы сосуд начнет вращаться и это вращение будет поддерживаться достаточно долго раскручиванием нити. Сперва поверхность воды будет оставаться плоской, как было до движения сосуда. Затем силой, постепенно действующей на воду, сосуд заставит и ее участвовать в своем вращении. По мере возрастания вращения вода будет постепенно отступать от середины сосуда и возвышаться по краям его, принимая впалую форму поверхности (я сам это пробовал делать)...

Вначале, когда относительное движение воды в сосуде было наибольшее, оно совершенно не вызывало стремления удалиться от оси — вода не стремилась к ок-

\*) Русский перевод акад. А. Н. Крылова, «Известия Николаевской морской академии», 1915, вып. 4, стр. 33—35. (Прим. ред.)

ружности и не повышалась у стенок сосуда, поверхность оставалась плоской и ее истинное вращательное движение еще не начиналось. Затем, когда относительное движение уменьшилось, повышение воды у стенок сосуда обнаруживало стремление удалиться от оси, и это стремление показывало постепенно возрастающее истинное вращательное движение, и когда оно стало наибольшим, вода установилась в покое относительно сосуда...

Распознавание истинных движений отдельных тел и точное их разграничение от кажущихся весьма трудно, ибо части того неподвижного пространства, о котором говорилось и в котором совершаются истинные движения тел, не ощущаются нашими чувствами. Однако это дело не вполне безнадежно. Основания для суждений можно заимствовать частью из кажущихся движений, представляющих разности истинных, частью из сил, представляющих причины и проявления истинных движений. Так, если два шара, соединенные нитью на данном друг от друга расстоянии, будут обращаться около их общего центра тяжести, то по натяжению нити можно будет узнать стремление шаров к удалению от оси вращения и по нему вычислить их угловую скорость. Если затем на противоположные стороны шаров заставить так действовать равные силы, чтобы они или ускоряли, или замедляли вращательное движение, то по увеличившемуся или по уменьшившемуся натяжению нити может быть обнаружено увеличение или уменьшение скорости движения, а таким образом можно будет найти те стороны шаров, к которым надо приложить силы, чтобы увеличение скорости движения стало наибольшим, т. е. найти те стороны шаров, которые обращены по направлению движения или по направлению, ему обратному. Когда эти передние и задние стороны будут найдены, то и движение будет вполне определено.

Таким образом могло бы быть определено количество и направление кругового движения внутри огромного пустого пространства, где не существовало бы никаких внешних, доступных чувствам признаков, к которым можно было бы относить положения шаров...»

## ГЛАВА 4

### ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Эта глава посвящена трем вопросам: динамике материальной точки, основы которой изучались в курсе физики средней школы, применению элементов математического анализа к физике и применению начал векторного исчисления, изложенных в гл. 2. Мы составим и решим уравнения движения для некоторых простых случаев, имеющих отношение к теории лабораторных работ по физике. Эти уравнения описывают движение заряженных частиц в однородных

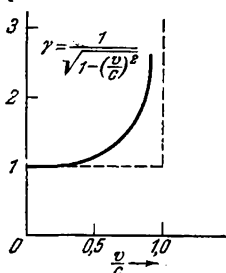


Рис. 4.1. Нерелятивистская механика дает точное описание движения материальной точки со скоростью  $v$ , если мы можем пренебречь разностью между  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  и 1. Буквой  $c$  обозначена скорость света.

электрических и магнитных полей, т. е. явления, нашедшие исключительно широкое применение в экспериментальной физике. Глава заканчивается подробным анализом различных преобразований от одной системы отсчета к другой.

Мы основываемся на предположении, что скорость материальной точки (частицы) всегда во много раз меньше скорости света; это означает, что в данной главе мы разбираем только нерелятивистские задачи и производим только нерелятивистские преобразования систем отсчета. Полученные здесь результаты правильны при том условии, что  $v \ll c$ . Влияние специальной теории относительности на эти результаты будет детально рассмотрено в гл. 12 и 13. Мы считаем также, что для изучаемых явлений законы классической механики представляют собой достаточно хорошее приближение к более общим законам квантовой физики, которым посвящен т. IV.

#### 4.1. Сила, действующая на заряженную частицу. Гауссова система единиц

Согласно гл. 3 второй закон Ньютона выражается следующим уравнением:

$$\mathbf{F} = M \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (1)$$

если мы считаем массу  $M$  постоянной. В физике известно множество различных сил: силы всемирного тяготения, электростатические силы, магнитные силы, а также разные ядерные силы, очень интенсивные, но действующие на коротких расстояниях. Элементарная механика окажется совсем неинтересной, если ограничиться при ее изучении рассмотрением примеров действия сил всемирного тяготения. Как здесь, так и в лабораторных работах мы рассмотрим задачи, связанные с действием электрических и магнитных сил на заряженные частицы. Для устранения пробела в знаниях лучше всего прочесть о магнитных и электрических силах в вашем школьном учебнике или в учебнике, выпущенном комитетом содействия изучению физики \*), те главы, которые посвящены электричеству и магнетизму.

Для сравнения действия электрических и магнитных сил с действием силы тяжести надо вспомнить, что на материальную точку массой  $M$ , находящуюся у поверхности Земли, действует сила тяжести, равная  $F = -Mg\hat{z}$ , где  $\hat{z}$  — единичный вектор, направленный от центра Земли. Вспомните также, что одноименные точечные электрические заряды, согласно закону Кулона, отталкиваются друг от друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и направленной вдоль линии, соединяющей заряды. Величина этой силы равна

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — величины зарядов. Уравнение (2) выражает закон Кулона в гауссовой системе единиц. Именно в таком виде он будет применяться во всем нашем курсе.

С помощью уравнения (2) определяется размерность электрического заряда. Произведение  $q_1 q_2$  должно иметь ту же размерность, что и  $r^2 F$ , т. е.  $[см]^2 \cdot [дин]$  или  $[длина]^2 \cdot [масса] \cdot [длина] / [время]^2$ . Следовательно,

$$[q]^2 = [масса] \cdot [длина]^3 / [время]^2,$$

так что размерность величины заряда

$$[q] = [масса]^{1/2} \cdot [длина]^{3/2} / [время].$$

Мы видим, что в системе СГС электрический заряд измеряется в единицах с размерностью  $г^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot сек^{-1}$ . Про два равных точечных заряда, которые отталкивают друг друга с силой в одну дину, когда они находятся на расстоянии в один сантиметр, можно сказать, что они имеют величину заряда 1  $г^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot сек^{-1}$ .

Но такую неуклюжую размерность единицы заряда неудобно ни произносить, ни писать, так что эту единицу предпочитают называть электростатической единицей заряда СГСЭ<sub>q</sub>. Это означает, что два равных точечных заряда, каждый в одну единицу СГСЭ<sub>q</sub>, отталкивают друг друга с силой в одну дину, когда расстояние

\*) «Физика», пер. с англ. под ред. А. С. Ахматова, «Наука», 1965.

между ними равно одному сантиметру. Единица СГСЭ<sub>q</sub> — это единица электростатического заряда в гауссовой системе единиц СГС \*). Можно также сказать, что это единица электрического заряда в электростатической системе единиц.

Заряд  $q_p$  протона обозначается здесь и дальше во всем курсе символом  $e$ :  $e = +4,8022 \cdot 10^{-10}$  ед. СГСЭ<sub>q</sub>. Мы называем  $e$  *элементарным зарядом*. Экспериментально доказано, что заряд  $q_e$  электрона равен  $-e$ .

Из уравнения (2) следует, что величина силы, действующей между двумя протонами, находящимися на расстоянии  $10^{-13}$  см друг от друга, равна

$$F \cong \frac{(4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q)^2}{(10^{-13} \text{ см})^2} = \frac{23 \cdot 10^{-20} \text{ дин}}{10^{-26}} \cong 2,3 \cdot 10^6 \text{ дин.} \quad (3)$$

Между двумя протонами действует сила отталкивания. Величина силы, действующей между протоном и электроном, отстоящими друг от друга на то же расстояние  $10^{-13}$  см, также определяется из расчета (3), но это будет уже сила притяжения, потому что заряды имеют противоположные знаки.

Очень удобно, особенно при решении задач со сложным расположением многих зарядов, определять силу, действующую на единичный положительный заряд. Для этого представим себе положительный пробный заряд величиной в 1 ед. СГСЭ<sub>q</sub>. Предположим, далее, что этот пробный заряд можно перемещать в пространстве от точки к точке, оставляя все остальные заряды неподвижными, а сила, действующая на пробный заряд, может быть измерена в любой заданной точке; измерение должно производиться в условиях, когда пробный заряд неподвижно находится в данной точке. Как и любая сила, измеряемая силой, действующая на единичный положительный заряд, является векторной величиной; она называется *напряженностью электрического поля E* в данной точке.

Размерность единицы  $E$  — это сила, приходящаяся на единичный заряд. Сила измеряется в динах, а заряд — в единицах СГСЭ<sub>q</sub>, так что размерность электростатической единицы напряженности электрического поля — это дина на единицу СГСЭ<sub>q</sub>. Обычно размерность единицы напряженности электрического поля выражают иначе. Мы определяем единицу напряженности электрического поля как такую величину:

$$1 \frac{\text{единица потенциала СГСЭ}}{\text{см}} \equiv 1 \frac{\text{дин}}{\text{единица заряда СГСЭ}}.$$

Здесь введена размерность единицы напряженности, равная единице потенциала СГСЭ на сантиметр, потому что (как мы подробно узнаем в гл. 5) целесообразно дать специальное название (единица потенциала СГСЭ) единице произведения электрической напряжен-

---

\*) Имея в виду студентов, ранее не встречавшихся с гауссовой системой единиц, мы ниже подробно разбираем эти единицы на ряде примеров.



ности на длину. Если единица этого произведения называется единицей потенциала СГСЭ, то единица напряженности получает размерность: единица потенциала СГСЭ/см (ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см). Мы могли бы обойтись и без специальных наименований для единиц электрического заряда и напряженности, но удобнее, когда они есть. Следует всегда помнить, что точечный заряд величиной в 1 ед. СГСЭ<sub>q</sub> создает на расстоянии 1 см электрическое поле напряженностью в 1 ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см.

Можно построить трехмерную схему электрического поля, созданного системой неподвижных зарядов. Каждой точке пространства мы приписываем вектор, имеющий абсолютную величину и направление напряженности электрического поля  $E$ . Может быть, будет яснее, если сказать, что мы приписываем каждой точке тройку чисел, представляющих собой величины составляющих этого вектора  $E_x, E_y, E_z$ . Такая схема называется векторным полем.

Предположим, что в некоторой части пространства имеется электрическое поле, характеризуемое вектором напряженности  $E$ . Тогда можно написать, что сила, действующая в какой-то точке данной части пространства на любой электрический заряд величиной  $q$ , равна

$$F = qE. \quad (4)$$

Здесь  $F$  зависит от того, в какой точке находится заряд  $q$ , потому что  $E$  следует брать для этой точки. Если поле  $E$  создается одиночным зарядом  $Q$ , находящимся в точке с радиусом-вектором  $r_Q$ , то согласно уравнению (2) мы можем написать, что вектор  $E$  в любой точке с радиусом-вектором  $r$  равен

$$E(r) = \frac{Q}{|r - r_Q|^3} (r - r_Q). \quad (5)$$

Здесь в знаменателе находится куб величины  $|r - r_Q|$ , потому что в числитель входит вектор с абсолютной величиной  $|r - r_Q|$ . Если поместить начало координат в точку, где находится заряд  $Q$ , то  $r_Q = 0$ , и можно переписать уравнение (5) в следующем виде:

$$E(r) = \frac{Q}{r^3} r = \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (6)$$

Здесь в правую часть входит единичный вектор  $\hat{r}$ , направленный из начала координат в ту точку с радиусом-вектором  $r$ , в которой измеряется величина напряженности. Пользуясь уравнением (6), можно определить силу, действующую на заряд  $q$ , находящийся

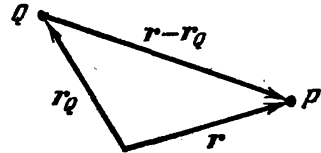


Рис. 4.2. Напряженность электрического поля, создаваемого в точке с радиусом-вектором  $r$  зарядом  $Q$ , находящимся в точке с радиусом-вектором  $r_Q$ , равна

$$E(r) = \frac{Q}{|r - r_Q|^3} (r - r_Q).$$

$P$  — точка наблюдения.

в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (7)$$

и это согласуется с уравнением (2).

Электростатическая сила

$$\mathbf{F}_{эл} = q\mathbf{E} \quad (8)$$

— это та составляющая всей силы, действующей на заряд  $q$ , которая возникает из-за действия электрического поля. Если заряд неподвижен относительно наблюдателя, то может быть, что на этот заряд не действуют никакие силы (мы не говорим о действии сил тяготения, потому что они обычно очень слабы по сравнению с электростатическими силами). Но если пробный заряд или заряд  $q$  движется, то, как экспериментально установлено, может быть еще одна составляющая силы, действующей на заряд. Это дополнительная сила прямо пропорциональна скорости  $\mathbf{v}$ , с которой заряд движется относительно наблюдателя, если движение совершается с постоянной скоростью. Из опыта известно, что для этой дополнительной динамической или магнитной силы мы можем написать следующее уравнение:

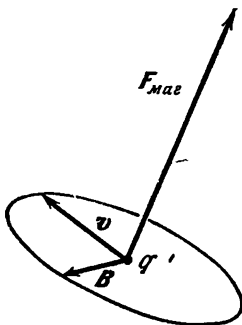


Рис. 4.3.  $\mathbf{F}_{\text{маг}} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

$$\mathbf{F}_{\text{маг}} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (9)$$

где  $c$  — скорость света,  $\mathbf{v}$  — скорость движения заряда, а  $\mathbf{B}$  — векторная величина, называемая индукцией магнитного поля (рис. 4.3). С помощью уравнения (9) можно дать определение величины  $\mathbf{B}$ . Этот вопрос подробно обсуждается в т. II, а на данном этапе появление  $c$  в уравнении (9) связано только с удобством определения магнитной индукции  $\mathbf{B}$ ; при таком определении величина  $\mathbf{B}$  имеет ту же размерность, что и напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ . Мы получили одинаковые размерности для  $\mathbf{B}$  и для  $\mathbf{E}$  именно потому, что разделили  $v$  на  $c$ . Сила  $\frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , действующая на электрический заряд в магнитном поле, — это та сила, которая заставляет двигаться провод с током в магнитном поле, перпендикулярном к проводу. Для единицы индукции магнитного поля имеется в гауссовой системе единиц СГС специальное название: *гаусс* ( $гс$ ).

Определим величину силы, действующей на электрон, движущийся в магнитном поле с индукцией  $10\,000$   $гс$ , которое может быть создано небольшим лабораторным электромагнитом. Если скорость электрона равна  $3 \cdot 10^8$   $см/сек$  и направлена перпендикулярно к индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ , то согласно уравнению (9) величина

этой силы равна

$$F = (4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q) \cdot \frac{(3 \cdot 10^9 \text{ см/сек})}{(3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек})} \cdot (1 \cdot 10^4 \text{ эс}) = 4,8 \cdot 10^9 \text{ дин.}$$

Из приведенного расчета видно, что индукция магнитного поля имеет размерность: [сила]/[заряд], как и напряженность электрического поля. Однако удобно иметь отдельное название для единицы индукции магнитного поля — и вот почему мы говорим «гаусс» для магнитного поля и «единица СГСЭ<sub>v/см</sub>» для электрического поля.

Источником магнитного поля может быть петля с током, соленоид или постоянный магнит. Магнитная сила  $F_{\text{маг}}$  направлена по нормали к плоскости, образованной векторами  $v$  и  $B$ . Ниже в этой главе мы покажем, что заряженная частица, движущаяся только в магнитном поле, будет описывать окружность (или, в более общем случае, спираль) вокруг оси, образуемой направлением магнитного поля. Проведя лабораторный опыт, легко можно убедиться, что магнитное поле, направленное перпендикулярно к движению электронного пучка в трубке осциллографа, отклонит этот пучок в направлении, перпендикулярном как к  $v$ , так и к  $B$ . Магнитная сила, соленоиды и магниты подробно разбираются в т. II.

Результирующая сила, действующая на равномерно движущуюся частицу с зарядом  $q$ , представляет собой сумму электростатической и магнитной сил (8) и (9). Эта результирующая сила или только одна сила (9) называется силой Лоренца:

$$F = qE + \frac{q}{c} v \times B. \quad (10)$$

Многие положения физики выводятся из уравнения второго закона Ньютона  $F = Ma$ , применяемого совместно с уравнением (10), и значительная часть истории физики связана со способами, которыми были установлены и подтверждены эти уравнения. То, что мы написали здесь уравнение (10) как экспериментальный факт, вовсе не освобождает нас от необходимости глубоко проанализировать его в т. II.

В этой главе мы предполагаем, что кинетическая энергия частицы равна  $\frac{1}{2}Mv^2$ , и разбираем только такие задачи, в которых электрическое и магнитное поля однородны (под словом о д н о р о д н ы й мы подразумеваем — не зависящий от положения частицы, под словом п о с т о я н н ы й — не зависящий от времени наблюдения). Обсуждение электростатического потенциала и напряжения мы откладываем до гл. 5.

Нам потребуются следующие числовые величины: скорость света

$$c = 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ см/сек,}$$

масса электрона  $m$

$$m = 0,9107 \cdot 10^{-27} \text{ г,}$$

масса протона  $M_p$

$$M_p = 1,6724 \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

Оперируя с силой Лоренца (10), мы выражаем в гауссовой системе единиц  $F$  в динах,  $E$  в ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см,  $v$  в см/сек и  $B$  в гауссах. Для перевода числовых значений этих величин из единиц системы СИ (или МКСА) в единицы системы СГС применяются следующие пересчетные множители: величина  $F$  в динах получается умножением на  $10^6$  величины  $F$  в ньютонах; величина  $E$  в ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см получается умножением величины  $E$  в в/м или в н/к на  $10^6/c \cong 1/3 \cdot 10^{-4}$ . Если же величина  $E$  дана в в/см, то для перевода в единицы системы СГС надо умножить ее на значение на  $10^6/c \cong 1/300$ . Величина  $B$  в гауссах получается умножением этой величины в веберах/м<sup>2</sup> (в тесла) на  $10^4$ . Не следует задумываться над числовыми значениями приведенных пересчетных множителей, их только надо применять, где это необходимо.

#### 4.2. Заряженная частица в однородном постоянном электрическом поле

Сила, действующая на частицу с зарядом  $q$  и массой  $M$  в электрическом поле  $E$ , однородном в пространстве и постоянном во времени, определяется следующим соотношением:

$$F = Ma = qE. \quad (11)$$

Из (11) следует уравнение для определения ускорения заряженной частицы:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{q}{M} E. \quad (12)$$

Этот результат очень похож на уравнение движения материальной точки в однородном гравитационном поле у поверхности Земли:  $F = -Mg\hat{z}$ , где  $\hat{z}$  — единичный вектор, направленный наружу от центра Земли. Уравнение движения в гравитационном поле имеет вид  $Ma = -Mg\hat{z}$ , или  $a = -g\hat{z}$ . Если вам сначала будет трудно наглядно представить себе движение заряженной частицы в электрическом поле, вообразите вместо этого движение материальной точки в гравитационном поле, действующем в том же направлении. Движение в гравитационном поле уже было исчерпывающе разобрано в школьном курсе физики.

Выполнив интегрирование, можно показать, что уравнение (12) имеет следующее общее решение:

$$r(t) = \frac{qF}{2M} t^2 + v_0 t + r_0. \quad (13)$$

Напомним правило дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}. \quad (14)$$

Возникает естественный вопрос: откуда берутся в решении (13) слагаемые  $v_0 t + r_0$ ? Очевидно, что выражение

$$r(t) = \frac{qE}{2M} t^2 \quad (15)$$

само удовлетворяет уравнению (12). Мы называем уравнение (12) *дифференциальным уравнением*, потому что в это уравнение входит производная, в данном случае вторая производная от  $r$  по времени  $t$ . Согласно уравнению (15)  $r=0$  при  $t=0$ . Но из дифференциального уравнения (12) вовсе не следует, что в момент  $t=0$  частица должна

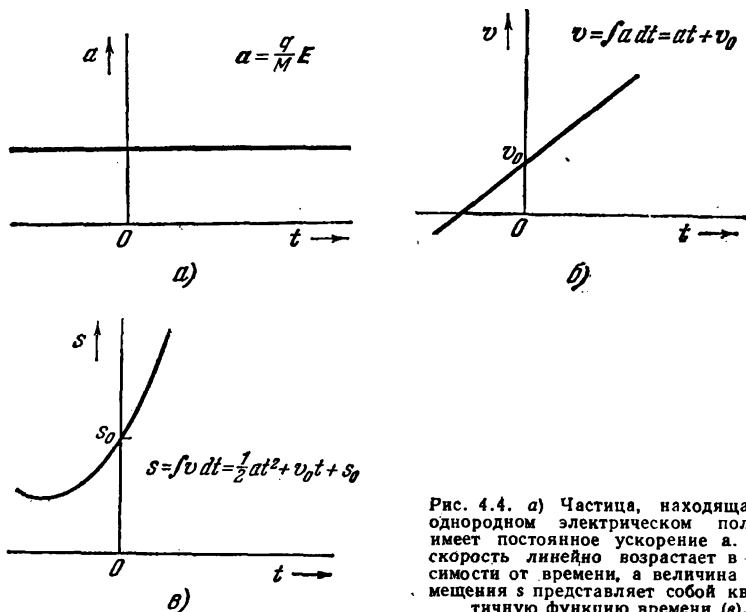


Рис. 4.4. а) Частица, находящаяся в однородном электрическом поле  $E$ , имеет постоянное ускорение  $a$ . б) Ее скорость линейно возрастает в зависимости от времени, а величина перемещения  $s$  представляет собой квадратичную функцию времени ( $\theta$ ).

находиться в начале координат. Заряженная частица может быть в любом начальном положении  $r_0$ . Чтобы получить данное начальное положение, мы вводим в решение для  $r$  постоянное слагаемое  $r_0$ :

$$r(t) = \frac{qE}{2M} t^2 + r_0. \quad (16)$$

Поскольку  $r_0$  — постоянная величина, мы можем прибавить ее к решению, а дифференциальное уравнение (12) все-таки будет выполняться.

Скорость  $v$  получается дифференцированием  $r$  по времени. Если бы  $r$  определялось из уравнения (16), то мы получили бы для скорости следующее уравнение:

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{qE}{2M} t^2 \right) = \frac{qE}{M} t, \quad (17)$$

т. е. скорость обращалась бы в нуль при  $t=0$ . Однако из дифференциального уравнения (12) не следует также, что скорость должна быть равна нулю при  $t=0$ ; скорость может иметь любое заданное начальное значение  $v_0$ . Мы учитываем эту заданную начальную скорость, добавляя слагаемое  $v_0 t$  к решению (16) для  $g$ . Введение этого слагаемого не противоречит дифференциальному уравнению, а также не изменяет начального положения частицы, потому что  $v_0 t=0$  при  $t=0$ . Слагаемое  $v_0 t$  удовлетворяет начальному условию для скорости, и теперь  $g$  задается уравнением (13), из которого следует:

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{qE}{2M} t^2 + v_0 t + r_0 \right) = \frac{qE}{M} t + v_0. \quad (18)$$

Мы видим, что  $v=v_0$  при  $t=0$ , что и требовалось. Решение (13) удовлетворяет дифференциальному уравнению (12) и начальным или граничным условиям для положения и скорости заряженной частицы.

**Пример.** Ускоренное движение протона в направлении электрического поля. Пусть в течение одной наносекунды ( $10^{-9}$  сек) протон ускоряется, начиная с состояния покоя, электрическим полем напряженностью  $E_x=1$  ед. СГСЭ<sub>v/см</sub>. Какова его конечная скорость?

Скорость частицы определяется из уравнения (18):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e}{M} Et + v_0; \quad (19)$$

для нашей задачи это векторное уравнение \*) сводится к следующей системе числовых уравнений:

$$v_x(t) = \frac{e}{M} E_x t, \quad v_y = v_z = 0, \quad (20)$$

потому что мы имеем условие, что  $v=0$  при  $t=0$ . Следовательно, конечная скорость при  $t=10^{-9}$  сек приближенно равна

$$v_x \approx \frac{(5 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q) \cdot (1 \text{ ед. СГСЭ}_{v/см}) \cdot 10^{-9} \text{ сек}}{2 \cdot 10^{-24} \text{ г}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ см/сек.} \quad (21)$$

Мы приняли массу протона приближенно равной  $2 \cdot 10^{-24}$  г. Заметьте, что  $(1 \text{ ед. СГСЭ}_q) \cdot (1 \text{ ед. СГСЭ}_{v/см}) \equiv 1 \text{ дин} \equiv 1 \text{ г} \cdot \text{см/сек}^2$ .

**Пример.** Ускоренное движение электрона в направлении электрического поля. Электрон, который вначале был неподвижным, ускоряется на пути в 1 см электрическим полем напряженностью 1 ед. СГСЭ<sub>v/см</sub>. Какова конечная скорость электрона?

\*) Уравнение (19) — векторное; если  $E=(E_x, 0, 0)$ , а  $v_0=0$ , то оно сводится к трем числовым уравнениям относительно составляющих:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{M} E_x t, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Подставив в уравнение (18) заряд электрона  $-e$  и его массу  $m$ , получаем

$$v_x(t) = -\frac{e}{m} E_x t, \quad x(t) = -\frac{e}{2m} E_x t^2. \quad (22)$$

Нам надо исключить  $t$  и выразить  $v_x$  как функцию от  $x$ . Удобно сначала найти выражение для  $v_x^2$ , а затем преобразовать его, используя вторую формулу (22):

$$v_x^2 = \left(\frac{e}{m} E_x t\right)^2 = \left(\frac{2e}{m} E_x\right) \left(-\frac{e}{2m} E_x t^2\right) = -\frac{2e}{m} E_x x \approx \\ \approx \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-10}}{10^{-27}} \cdot 1 \cdot 1 \text{ см}^2/\text{сек}^2 \approx 10^{-9} \cdot 10^{27} \text{ см}^2/\text{сек}^2 \approx 10^{18} \text{ см}^2/\text{сек}^2. \quad (23)$$

Отсюда следует, что конечная скорость электрона равна

$$|v_x| \approx 10^9 \text{ см/сек}. \quad (24)$$

Из рис. 4.1, приведенного в начале этой главы, видно, что для многих практических целей можно считать эту скорость нерелятивистской (с точностью 1%).

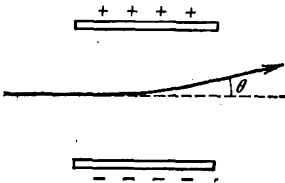


Рис. 4.5. Отклонение электронного пучка поперечным электрическим полем.

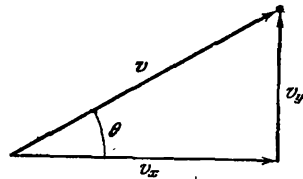


Рис. 4.6. Вектор скорости  $v = \hat{x}v_x + \hat{y}v_y$   
 $\theta = \text{arctg} \frac{v_y}{v_x}$

**Пример.** Ускорение в направлении, перпендикулярном к начальной скорости частиц. Пройдя через ускоряющее поле  $E_x$  (см. предыдущий пример), пучок электронов попадает в зону длиной  $L=1 \text{ см}$ , где действует поперечно направленное отклоняющее электрическое поле напряженностью  $E_y = -0,1 \text{ ед. СГСЭ}_v/\text{см}$ . Какой угол с осью  $x$  образует скорость пучка электронов, прошедшего эту зону поперечного отклонения?

Ввиду того, что теперь нет составляющей напряженности поля по оси  $x$ , составляющая скорости вдоль этой оси останется постоянной. Время  $\tau$ , в течение которого электрон будет находиться в зоне действия отклоняющего поля, определяется из уравнения:

$$v_x \tau = L \quad (25)$$

или, если  $v_x = 10^9 \text{ см/сек}$ ,

$$\tau = \frac{L}{v_x} = 10^{-9} \text{ сек}. \quad (26)$$

Скорость в поперечном направлении, приобретенная за это время,

определяется так:

$$v_y = -\frac{e}{m} E_y \tau \approx \frac{5 \cdot 10^{-10}}{10^{-27}} \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-9} \text{ см/сек} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ см/сек.} \quad (27)$$

Угол  $\theta$ , который образует с осью  $x$  вектор конечной скорости, можно определить из равенства  $\operatorname{tg} \theta = v_y/v_x$ , т. е.

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x} \approx \operatorname{arctg} \frac{5 \cdot 10^7}{10^8} = \operatorname{arctg} 0,05. \quad (28)$$

Для малых значений угла  $\theta$  мы можем использовать приближенное равенство

$$\theta \cong \operatorname{arctg} \theta, \quad (29)$$

где  $\theta$  выражено в радианах. Из (28) следует, что  $\theta \approx 0,05 \text{ рад}$ .

Определив числовое значение следующего слагаемого в разложении  $\operatorname{arctg} x$ , мы можем оценить величину ошибки из-за применения приближенного равенства (29). В математических справочниках \*) дается разложение тригонометрических функций в ряды. В частности, следующее разложение  $\operatorname{arctg} x$  в ряд:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (30)$$

выполняется при  $x^2 < 1$ .

При  $x = 0,05$  слагаемое  $x^3/3$ , которое меньше основного слагаемого  $x$  в  $x^2/3$  раза, составляет  $(0,05)^2/3 \cong 10^{-3}$  долю его, или 0,1%. Эту ошибку можно не учитывать, если она меньше, чем экспериментальная ошибка при измерении  $\theta$ . Для малых углов применимы также следующие приближенные равенства:  $\sin \theta \cong \theta$  и  $\cos \theta \cong 1 - \theta^2/2$ .

### 4.3. Заряженная частица в однородном переменном электрическом поле

Пусть

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_x = \hat{x} E_x^0 \sin \omega t, \quad (31)$$

где  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота, а  $E_x^0$  — амплитуда вектора напряженности электрического поля. Часто значок нуль (0) при букве  $E$  не пишется, если это не приводит к недоразумению. Согласно (12) уравнение движения заряженной частицы примет в этом случае следующий вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{q}{M} E_x = \frac{q}{M} E_x^0 \sin \omega t. \quad (32)$$

При решении дифференциальных уравнений мы часто будем пользо-

\*) Здесь авторы рекомендуют книгу Н. В. Д w i g h t, Tables of integrals and other mathematical data, 4th ed., Macmillan, New York, 1961 (русский перевод: Г. Б. Д в а й т, Таблицы интегралов и другие математические формулы, пер. с англ. под ред. К. А. Семидяева, 2-е изд., «Наука», 1966) как математический справочник и книгу: Handbook of Chemistry and Physics (Chemical Rubber Publishing Company) как справочник по химии и физике.

Из отечественной литературы можно указать, например, М. Я. Выгодский, Справочник по высшей математике, «Наука», 1964. (Прим. ред.)



ваться широко применимым методом проб и ошибок, исходя при этом из понимания физического смысла явления. Будем искать решение уравнения (32) в следующем виде \*):

$$x(t) = x_1 \sin \omega t + v_0 t + x_0. \quad (33)$$

Продифференцировав (33) дважды, находим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_1 \sin \omega t. \quad (34)$$

Производные синуса и косинуса определяются по формулам:

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \sin \theta = -\sin \theta,$$

$$\frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \cos \theta = -\cos \theta.$$

Следовательно, (33) представляет собой решение уравнения движения (32) при том условии, что

$$-\omega^2 x_1 \sin \omega t = \frac{q}{M} E_x^0 \sin \omega t, \quad (35)$$

$$x_1 = -\frac{q E_x^0}{M \omega^2}. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (33), получаем следующий результат:

$$x(t) = -\frac{q E_x^0}{M \omega^2} \sin \omega t + v_0 t + x_0. \quad (37)$$

Скорость частицы равна

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{q E_x^0}{M \omega} \cos \omega t + v_0, \quad (38)$$

\*) Здесь мы встречаемся с одним из общих приемов решения физических задач — нахождением решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Это своего рода искусство, в котором важную роль играют интуитивные предположения. Иногда помогают и строго сформулированные математические правила, но обычно физик спрашивает себя: «Что могло бы произойти?» или «Чего еще можно было бы ожидать?» Получив решение, надо подставить предполагаемый результат в исходное уравнение, чтобы убедиться, является ли этот результат правильным. Если же исходные предположения оказались неверными, то надо делать новые попытки. Разумное построение предположений помогает сэкономить время, но иногда даже неверные предположения могут навести на правильный путь решения задачи.

Согласно уравнению (32) ускорение заряженной частицы должно быть синусоидальной функцией времени, если действующая сила изменяется по синусоидальному закону. Поскольку ускорение имеет колебательный характер, перемещение должно быть хотя бы частично колебательным. По этой причине мы вводим в уравнение (33) слагаемое, пропорциональное  $\sin \omega t$  или  $\cos \omega t$ . Мы выбираем  $\sin \omega t$ , потому что два последовательных дифференцирования функции синуса дают опять синус. Слагаемое  $x_0$  надо внести как начальное смещение. Поскольку мы должны предусмотреть также начальную скорость, то мы добавляем слагаемое  $v_0 t$ , которое дает возможность учесть любую величину начальной скорости, в том числе нулевую. Слагаемое  $v_0 t$  остается и позже, как постоянная скорость, наложенная на скорость, величина которой колеблется. Единственно возможной формой этого слагаемого является  $v_0 t$ ; более высокая степень  $t$  не согласуется с (32).

П р и м е ч а н и е. Из уравнения (38) видно, что для этого примера, в отличие от рассмотренных ранее, скорость при  $t=0$  не равна одной только величине  $v_0$ .

откуда следует, что при  $t=0$

$$v_x(0) = -\frac{qE_x^0}{M\omega} + v_0. \quad (39)$$

Не надо смешивать величину  $v_x(0)$ , равную скорости частицы при  $t=0$ , с величиной  $v_0$ , представляющей собой постоянную, подбираемую для того, чтобы начальная скорость  $v_x(0)$  приобрела заданное значение.

Если мы примем начальную скорость частицы равной нулю, то получим

$$v_0 = \frac{qE_x^0}{M\omega}. \quad (40)$$

Подстановка этого выражения в (37) приводит к следующему соотношению:

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2} \sin \omega t + \frac{qE_x^0}{M\omega} t + x_0. \quad (41)$$

Нами получен несколько неожиданный результат: если начальное условие имеет вид  $v_x=0$  при  $t=0$ , то движение частицы складывается из колебания и поступательного движения, совершаемого в одном и том же направлении с постоянной скоростью  $qE_x^0/M\omega$  (рис. 4.7). Это происходит потому, что в данной частной задаче скорость частицы никогда не изменяет знака. Частица непрерывно перемещается в одном и том же направлении. Заметьте, что для этой задачи  $v_0$  не равно  $v_x(t=0)$ , но  $x_0$  равно  $x(t=0)$ .

#### 4.4. Заряженная частица в постоянном магнитном поле

Уравнение движения частицы, имеющей массу  $M$  и заряд  $q$ , в постоянном магнитном поле с

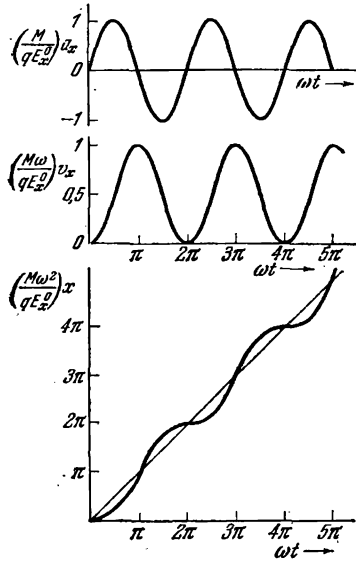


Рис. 4.7. Если заряд  $q$  находится в электрическом поле напряженностью  $E = \hat{x} E_x^0 \sin \omega t$ , то

$$a_x = \frac{q}{M} E_x^0 \sin \omega t$$

и

$$v_x(t) = \int \dot{a}_x dx = -\frac{qE_x^0}{M\omega} \cos \omega t + v_0.$$

Если  $v_x(0)=0$ , то

$$v_0 = \frac{qE_x^0}{M\omega}.$$

или

$$v_x(t) = \frac{qE_x^0}{M\omega} (1 - \cos \omega t), \dots$$

Тогда

$$x(t) = \int v_x(t) dt = \frac{qE_x^0}{M\omega^2} \int (1 - \cos \omega t) dt + x(0).$$

Если также  $x(0)=0$ , то

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2} \sin \omega t + \frac{q}{M\omega} E_x^0 t.$$

индукцией  $\mathbf{B}$  имеет следующий вид:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (42)$$

Пусть индукция магнитного поля направлена вдоль оси  $z$ :

$$\mathbf{B} = \hat{z}B. \quad (43)$$

Отсюда следует согласно правилу определения составляющих векторного произведения:

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_x = v_y B, \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_y = -v_x B, \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_z = 0, \quad (44)$$

и, таким образом, уравнение (42) приводится к следующей системе дифференциальных уравнений:-

$$\dot{v}_x = \frac{q}{Mc} v_y B, \quad \dot{v}_y = -\frac{q}{Mc} v_x B, \quad \dot{v}_z = 0. \quad (45)$$

Мы видим, что остается постоянной составляющая скорости, параллельная оси, вдоль которой направлено магнитное поле, т. е. оси  $z$ . Можно непосредственно обнаружить и другую особенность данного движения: остается постоянной также кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} M\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad (46)$$

так как

$$\frac{dK}{dt} = \frac{M}{2} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = M\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = M\dot{\mathbf{v}} \cdot \left( \frac{q}{Mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \equiv 0, \quad (47)$$

потому что векторное произведение  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  перпендикулярно к  $\mathbf{v}$ . Следовательно, *магнитное поле не изменяет кинетическую энергию свободной частицы*. Будем искать решение \*) системы уравнений движения (45) в следующем виде:

$$v_x(t) = v_1 \sin \omega t, \quad v_y(t) = v_1 \cos \omega t. \quad (48)$$

Это — уравнения кругового движения. Из них следует:

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_1 \cos \omega t, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_1 \sin \omega t, \quad (49)$$

и после подстановки решений (48) система уравнений (45) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega v_1 \cos \omega t &= \frac{qB}{Mc} v_1 \cos \omega t, \\ -\omega v_1 \sin \omega t &= -\frac{qB}{Mc} v_1 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Уравнения (50) тождественно выполняются при условии, что

$$\omega = \frac{qB}{Mc} \equiv \omega_H, \quad (51)$$

\*) Из уравнения (47) следует, что кинетическая энергия  $K$  постоянна; мы должны отсюда сделать вывод, что величина  $|\mathbf{v}|$  также постоянна. Этот результат и наводит на мысль испробовать решение, выражающее равномерное круговое движение, при котором составляющие скорости по осям  $x$  и  $y$  изменяются по синусоидальному закону с разностью фаз  $\pi/2$ . Удобно выразить дробь  $qB/Mc$  в виде одной постоянной, имеющей размерность времени в минус первой степени; эту размерность легко можно обнаружить, пользуясь уравнениями (45). Мы предполагаем, что решение задачи представляет собой вращательное движение, угловая скорость которого как-то связана с этой постоянной.

а из этого соотношения определяется так называемая *циклотронная частота* (или *гироскопическая частота*)  $\omega_{\text{ц}}$ , т. е. частота движения заряженной частицы в магнитном поле. Уравнения (50) удовлетворяются при любом значении  $v_1$ .

Можно вывести уравнение для циклотронной частоты также элементарным способом. Направленная внутрь траектории частицы магнитная сила  $qBv_1/c$  создает центростремительное (направленное внутрь) ускорение, необходимое для кругового движения этой частицы. Величина центростремительного

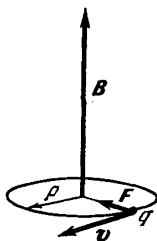


Рис. 4.8. Положительный заряд  $q$ , движущийся с начальной скоростью  $v$ , перпендикулярной к индукции  $B$  однородного магнитного поля, описывает окружность радиусом  $\rho = cMv/qB$  с постоянной по абсолютной величине скоростью  $v$ .

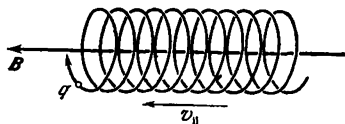


Рис. 4.9. Положительный заряд  $q$  описывает в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  спираль с постоянным шагом. При этом  $v \parallel B$ , т. е. параллельная  $B$  составляющая скорости заряда, остается постоянной.

ускорения равна  $v_1^2/r$ , или  $\omega_{\text{ц}}^2 r$ , потому что  $\omega_{\text{ц}} r = v_1$ . Следовательно,

$$\frac{qBv_1}{c} = M\omega_{\text{ц}}^2 r, \quad (52)$$

откуда получаем

$$\omega_{\text{ц}} = \frac{qB}{Mc}.$$

Какой вид имеет эта траектория? Изменение положения частицы в зависимости от времени можно определить, интегрируя уравнения (48), положив в них  $\omega$  равным  $\omega_{\text{ц}}$ :

$$x(t) = x_0 - \rho \cos \omega_{\text{ц}} t = x_0 - \frac{v_1}{\omega_{\text{ц}}} \cos \omega_{\text{ц}} t, \quad (53)$$

$$y(t) = y_0 + \rho \sin \omega_{\text{ц}} t = y_0 + \frac{v_1}{\omega_{\text{ц}}} \sin \omega_{\text{ц}} t, \quad (54)$$

$$z(t) = z_0 + v_1 t. \quad (55)$$

Мы видим, что проекция траектории частицы на плоскость  $xy$  представляет собой окружность с центром в точке  $x_0, y_0$ . Радиус этой окружности равен

$$\rho = \frac{v_1}{\omega_{\text{ц}}} = \frac{cMv_1}{qB}. \quad (56)$$

Радиус  $\rho$  иногда называется *гироскопическим радиусом* или *циклотронным радиусом*. Траектория этой частицы представляет собой спираль, ось которой направлена параллельно магнитной индукции  $B$ ; составляющая скорости частицы, параллельная  $B$ , остается постоянной.

Заметим следующее:

$$B\rho = \frac{cMv_1}{q}, \quad (57)$$

где  $Mv_1$  — это импульс частицы в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{B}$ . Это важное соотношение; в одной из последующих глав мы



Рис. 4.10. Полученная в водородной пузырьковой камере фотография траектории электрона, движущегося с большой скоростью в магнитном поле. Электрон входит в поле зрения внизу слева. Теряя свою энергию на ионизацию водородных молекул, электрон замедляет движение. Когда уменьшается скорость электрона, уменьшается и радиус кривизны его траектории в магнитном поле. Поэтому траектория имеет форму спирали.  
(Радиационная лаборатория им. Лоуренса)

увидим, что оно выполняется и в релятивистской области скоростей, если вместо  $Mv_1$  подставить в него релятивистский импульс  $p$ . Поэтому можно применять соотношение (57) для определения импульсов частиц с очень высокой энергией.

#### 4.5. Размерности

Всегда целесообразно проверить, что размерности обеих частей полученного окончательного уравнения одинаковы. Это легкий способ обнаружить принципиальные ошибки. Для правой части уравнения (57) имеем

$$\left[ \frac{cMv_1}{q} \right] = \left[ \frac{L}{T} \right] [M] \left[ \frac{L}{T} \right] \left[ \frac{1}{q} \right] = \left[ \frac{ML^2}{qT^2} \right], \quad (58)$$

где  $T$  — время, а  $L$  — длина. Квадратные скобки означают размерность заключенной в них величины. Для левой части уравнения (57)

$$[B\rho] = \left[ \frac{F}{q} \right] [L] = \left[ \frac{ML^2}{qT^2} \right], \quad (59)$$

потому что согласно уравнению (9), определяющему силу Лоренца, индукция  $B$  имеет в гауссовой системе единиц размерность силы, деленной на заряд. Как показывают равенства (58) и (59), обе части уравнения (57) имеют одинаковую размерность.

**Пример. Гирскопическая частота.** Какова гирскопическая частота электрона в магнитном поле с индукцией  $10 \text{ кгс}$  ( $1 \cdot 10^4 \text{ гс}$ )? (Величина индукции  $10 \div 15 \text{ кгс}$  типична для магнитных полей обычных лабораторных электромагнитов с железным сердечником.)

Согласно формуле (51) получаем

$$\omega_{\text{ц}} = \frac{eB}{mc} \approx \frac{(5 \cdot 10^{-10}) \cdot (10^4)}{(10^{-29}) \cdot (3 \cdot 10^{10})} \text{ сек}^{-1} \approx \frac{5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-17}} \text{ сек}^{-1} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}. \quad (60)$$

Частота периодического движения, обозначаемая как  $f_{\text{ц}}$ , равна

$$f_{\text{ц}} = \frac{\omega_{\text{ц}}}{2\pi} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ гц}, \quad (61)$$

и ей соответствует следующая длина электромагнитной волны в свободном пространстве:

$$\lambda_{\text{ц}} = \frac{c}{f_{\text{ц}}} \approx \frac{3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10}} \text{ см} \approx 1 \text{ см}. \quad (62)$$

Гирскопическая частота  $\omega_{\text{ц}}(p)$  протона относится к гирскопической частоте электрона в том же самом магнитном поле, как  $1/1836$ , т. е. так же, как масса электрона к массе протона. В магнитном поле с индукцией  $10 \text{ кгс}$  гирскопическая частота протона равна

$$\omega_{\text{ц}}(p) = \frac{m}{M_p} \omega_{\text{ц}}(e) \approx \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^3} \text{ сек}^{-1} \approx 10^8 \text{ сек}^{-1}. \quad (63)$$

Направление кругового движения электрона в магнитном поле противоположно направлению движения протона, потому что их заряды имеют противоположные знаки.

**Пример. Гирскопический радиус.** Каков радиус траектории электрона, движущегося в циклотроне со скоростью  $10^8 \text{ см/сек}$  в плоскости, перпендикулярной к вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , величина которого равна  $10 \text{ кгс}$ ?

Применяя уравнения (56) и (60), получим следующую величину гирскопического радиуса:

$$\rho = \frac{v_1}{\omega_{\text{ц}}} \approx \frac{10^8}{2 \cdot 10^{11}} \text{ см} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}. \quad (64)$$

Гирскопический радиус протона, движущегося с той же скоростью, больше в  $M_p/m$  раз:

$$\rho \approx (5 \cdot 10^{-4}) \cdot (2 \cdot 10^3) \text{ см} \approx 1 \text{ см}. \quad (65)$$

#### 4.6. Магнитная фокусировка при повороте на угол $180^\circ$

Представим себе пучок заряженных частиц, попадающий в ту часть пространства, где действует однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной перпендикулярно к движению пучка. Частицы будут отклоняться, и радиусы кривизны их траекторий можно определить из соотношения  $B\rho = (c/q)Mv_t$ , где  $v_t$  — составляющая их скорости в плоскости, перпендикулярной к  $B$ . Если мы исследуем пучок в какой-то момент, например после поворота на  $180^\circ$ , то обнаружим, что он рассеялся в плоскости движения (т. е. в плоскости чертежа на рис. 4.11), потому что у разных частиц с разными массами и скоростями будут различны и радиусы кривизны траекторий.

На принципе поворота в однородном магнитном поле основано действие *селектора импульсов* — прибора, в котором образуется пучок частиц с почти одинаковыми импульсами при условии, что одинаковы заряды  $q$  всех частиц.

Преимущество использования поворота именно на  $180^\circ$  состоит в том, что частицы с одинаковыми по абсолютной величине импульсами, поступающие во входную щель под несколько различными

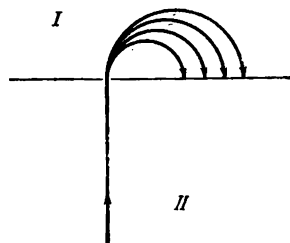


Рис. 4.11. Действие магнитного поля как селектора импульсов (показан пучок ионов с различными импульсами  $P$ ). I — область однородного магнитного поля; вектор  $B$  перпендикулярен к плоскости рисунка; II — область, где индукция магнитного поля равна нулю.

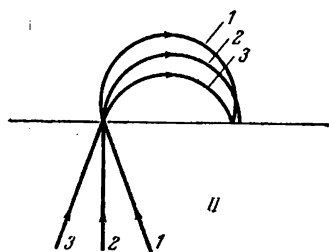


Рис. 4.12. Фокусировка пучка ионов в магнитном поле при повороте на  $180^\circ$ . Ионы с импульсами, равными по величине, но различающимися по направлению, фокусируются, попадая почти в одну точку. Пучок состоит из ионов, имеющих одинаковую абсолютную величину импульса  $|P|$ , но поступающих в щель под разными углами. I — область однородного магнитного поля; вектор  $B$  перпендикулярен к плоскости рисунка; II — область, где индукция магнитного поля равна нулю.

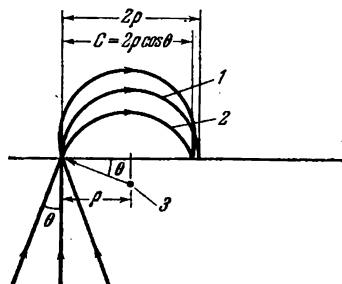


Рис. 4.13. Схема, показывающая подробности фокусировки в селекторе скоростей с поворотом пучка на  $180^\circ$ . I — траектория частицы, входящей под углом  $\theta = 0$ ; 2 — траектория частицы, входящей под углом  $\theta \neq 0$ ; 3 — центр кривизны траектории частицы, входящей при  $\theta \neq 0$ .

$$2q(1 - \cos \theta) \cong q\theta^2.$$

углами, после поворота на  $180^\circ$  проходят приблизительно через один общий фокус.

Расчет точности фокусировки представляет собой чисто геометрическую задачу. Рассмотрим траекторию частицы, проходящей через входную щель под углом  $\theta$  к идеальной траектории (рис. 4.13). Расстояние между входной щелью и точкой, в которой эта траектория пересечет поверхность мишени, равно длине хорды круга с радиусом  $\rho$ . Разность длин диаметра и хорды равна

$$2\rho - C = 2\rho(1 - \cos \theta) \approx \rho\theta^2, \quad (66)$$

где для малых  $\theta$  мы ограничились первыми двумя слагаемыми разложения косинуса в степенной ряд:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots, \quad (67)$$

которое приводится в математических справочниках. Если мы примем в качестве меры четкости угловой фокусировки следующую величину:

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx \frac{1}{2} \theta^2, \quad (68)$$

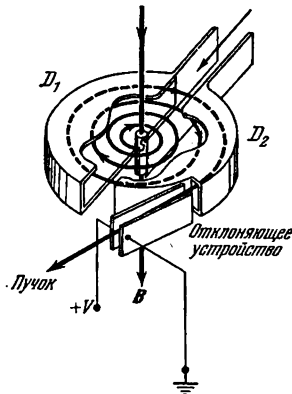
то для  $\theta = 0,1$  получаем такое ее значение:

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx 5 \cdot 10^{-3}. \quad (69)$$

Эта величина выражает фокусирующее действие селектора импульсов.

#### 4.7. Принцип ускорения заряженных частиц в циклотроне

Рис. 4.14. Вид в разрезе обычного циклотрона низких энергий, состоящего из источника ионов  $S$ , полюсов ускоряющих электродов в форме  $D$ -образных колец ( $D_1$ ,  $D_2$ ) и отклоняющего устройства. Весь прибор находится в однородном вертикальном магнитном поле, вектор индукции которого  $B$  направлен вниз. Плоскость траектории частицы горизонтальна и находится посередине между  $D$ -образными кольцами. Ускоряющее высокочастотное электрическое поле приложено в промежутке между  $D$ -образными кольцами.



В обычном циклотроне заряженные частицы движутся в постоянном магнитном поле по почти спиральным орбитам, как это описано в отрывке «Из истории физики», приводимом в конце главы. После каждого полуоборота частицы ускоряются электрическим полем, изменяющимся по закону колебаний. Для периодического

ускорения необходимо, чтобы частота электрического поля была строго равна циклотронной частоте ускоряемых частиц.

Циклотронная частота протонов в магнитном поле с индукцией  $10 \text{ кэс}$  равна

$$\omega_{\text{ц}} = \frac{eB}{M_p c} \approx \frac{(5 \cdot 10^{-10}) \cdot 10^4}{(2 \cdot 10^{-24}) \cdot (3 \cdot 10^{10})} \text{ сек}^{-1} \approx 1 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}, \quad (70)$$

или  $f_{\text{ц}} = \omega_{\text{ц}}/2\pi \approx 10 \text{ Мгц}$ . До тех пор, пока скорость частицы остается нерелятивистской, эта частота не зависит от энергии частицы.



При каждом обороте частица получает энергию от переменного электрического поля. По мере увеличения энергии частицы увеличивается и эффективный радиус ее траектории, так как

$$\rho = \frac{v}{\omega_{ц}} = \frac{\sqrt{2E/M_p}}{\omega_{ц}}, \quad (71)$$

где через  $E$  обозначена энергия. Предельная энергия протона с

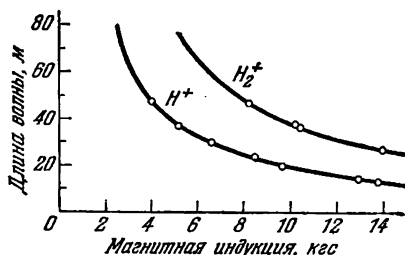


Рис. 4.15. Условия резонанса в первом циклотроне (диаметр 279 мм). По оси ординат отложена величина длины волны в вакууме высокочастотного напряжения, подаваемого на ускоряющие электроды. Кривые построены по теоретическим соотношениям для ионов  $H^+$  и  $H_2^+$ ; кружки соответствуют экспериментальным данным (Лоуренс и Ливингстон, Phys. Rev. 40, 19 (1932)).

нерелятивистской скоростью в постоянном магнитном поле определяется величиной внешнего радиуса циклотрона  $r_{ц}$ : при  $\omega_{ц} = 10^8 \text{ сек}^{-1}$  и  $r_{ц} = 50 \text{ см}$  получаем, что  $v = \omega_{ц} r_{ц} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ см/сек}$ , или

$$E = \frac{1}{2} M_p v^2 \approx (10^{-24}) \cdot (5 \cdot 10^9)^2 \text{ эрг} \approx 25 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}. \quad (72)$$

На практике для обычного циклотрона эту скорость можно считать нерелятивистской.

### Задачи

**Внимание:** всегда указывайте в ответе единицы измерения; ответ без единиц измерения — это вообще не ответ.

1. *Сила, действующая на протон в электрическом поле.* Какова величина силы (в динах), действующей на протон с зарядом  $e$  в электрическом поле, напряженность которого  $E = 100$  ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см?

Ответ.  $4,8 \cdot 10^{-8}$  дин.

2. *Сила, действующая на протон в магнитном поле.* Какова величина (в динах) и направление силы, действующей на протон с зарядом  $e$  в магнитном поле, индукция которого  $B$  равна 100 гс и направлена вдоль оси  $z$ , при следующих условиях:

а) Когда протон неподвижен?

Ответ. Нуль.

б) Когда протон движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v = 10^8 \hat{x}$  см/сек?

Ответ.  $-1,6 \cdot 10^{-10} \hat{y}$  дин.

3. *Кинетическая энергия электрона.* а) Каковы значения импульса (в г·см/сек) и кинетической энергии (в эргах) электрона со скоростью  $v = 10^8 \hat{x}$  см/сек (вспомнить, что кинетическая энергия частицы с массой  $M$  равна  $\frac{1}{2} M v^2$ )?

б) Электрон ускоряется, начиная от состояния покоя, электрическим полем в 0,01 ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см. Какова (в эргах) конечная кинетическая энергия этого электрона, когда он пройдет путь 5 см?

О т в е т.  $2,4 \cdot 10^{-11}$  эрг.

4. Свободное движение электрона. При  $t=0$  скорость электрона  $v=10^8 \hat{x}$  см/сек, а его радиус-вектор  $r=100\hat{y}$  см; определить его радиус-вектор при  $t=0,1$  сек. Внешние силы отсутствуют.

О т в е т.  $(10^7 \hat{x} + 10^2 \hat{y})$  см.

5. Ускоренное движение электрона в электрическом поле. Данные — те же, что в задаче 4 при  $t=0$ , но действует еще электрическое поле  $E=10^{-2}$  ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см; определить радиус-вектор и вектор скорости при  $t=1 \cdot 10^{-8}$  сек.

6. Ускоренное движение электрона в магнитном поле. Данные — те же, что в задаче 4 при  $t=0$ , но в этом случае  $B=100\hat{z}$  гс, а  $E=0$ .

а) Определить радиус-вектор при  $t=1 \cdot 10^{-8}$  сек.

б) Найти векторы импульса при  $t=0$  и при  $t=1 \cdot 10^{-8}$  сек; указать их абсолютную величину и направление.

7. Электрическое поле, уравновешивающее поле земного притяжения. Какова величина напряженности электрического поля, сообщаемого электрону ускорение, равное 980 см/сек, т. е. ускорение силы тяжести?

О т в е т.  $1,86 \cdot 10^{-15}$  ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см.

8. Отношение электростатической и гравитационной сил между двумя электронами. Величина электростатической силы между двумя электронами равна  $e^2/r^2$ ; величина гравитационной силы равна  $Gm^2/r^2$ , где  $G=6,67 \cdot 10^{-8}$  дин·см<sup>2</sup>/г<sup>2</sup>. Каков порядок величины отношения электростатической и гравитационной сил между двумя электронами?

О т в е т.  $10^{42}$ .

9. Взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля (см. Дополнение 1). Заряженная частица движется в направлении  $x$  в пространстве, где имеется

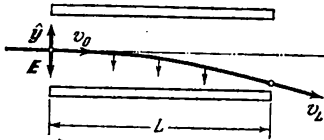


Рис. 4.16.

электрическое поле  $E_y$  и перпендикулярное к нему магнитное поле  $B_z$ . При каком условии результирующая сила, действующая на эту частицу, равняется нулю? Покажите векторы  $v$ ,  $E$ ,  $B$  на графике. Какова должна быть величина  $v_x$ , если  $E_y=10$  ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см, а  $B_z=300$  гс?

О т в е т.  $v_x=1 \cdot 10^9$  см/сек.

10. Отклонение заряженной частицы между пластинами конденсатора. Частица с зарядом  $q$  и массой  $M$ , имеющая начальную скорость  $v_0 \hat{x}$ , попадает в электрическое поле  $-E \hat{y}$ . Предположим, что это поле однородно, т. е. что величина напряженности  $E$  одинакова во всех точках пространства между пластинами длиной  $L$  (за исключением небольших изменений у краев пластин, чем мы пренебрегаем).

а) Какие силы действуют соответственно в направлениях  $x$  и  $y$ ?

О т в е т.  $F_x=0$ ;  $F_y=-qE$ .

б) Будет ли сила, действующая в направлении  $y$ , влиять на составляющую скорости в направлении  $x$ ?

в) Написать решения для  $v_x$  и  $v_y$  и полное векторное выражение для  $v(t)$  в виде функций времени.

О т в е т.

$$v(t) = v_0 \hat{x} - \frac{qE}{M} t \hat{y}.$$

г) Выбрав точку входа частицы в поле конденсатора за начало координат, выразить радиус-вектор частицы как функцию времени, в течение которого она находится между пластинами.

11. Продолжение предыдущей задачи. Найти следующие величины, если частица, о которой говорилось в задаче 10, — это электрон с начальной энергией  $10^{-10}$  эрг, напряженности электрического поля равна 0,01 ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см, а  $L=2$  см:

а) Вектор скорости в момент, когда электрон выходит из пространства между пластинами.

б) Угол  $(v, \hat{x})$  в момент выхода частицы из пространства между пластинами.

в) Точку пересечения оси  $x$  с направлением движения частицы, выходящей из пространства между пластинами.

12. *Электрическое поле точечного заряда.* Напряженность  $E$  электрического поля на расстоянии  $r$  от точечного заряда  $q$  имеет в гауссовой системе единиц величину  $q/r^2$  и направлена по радиусу наружу, если  $q$  положительно, и внутрь, если  $q$  отрицательно.

а) Написать векторное выражение для  $E$ .

б) В точку  $A(1, 2, 3)^*$  помещен заряд  $q=2e$ , равный заряду двух протонов. Найти напряженность электрического поля в точке  $B(4, 5, 10)$ . Единицей длины является сантиметр.

13. *Время пробега ионов.* Пучок одновалентных ионов цезия  $Cs^+$  ускоряется, начиная от состояния покоя, электрическим полем в 1 ед. СГСЭ $_v$ /см, действующим на расстоянии 0,33 см, и после этого проходит 1 мм за  $87 \cdot 10^{-9}$  сек в вакууме, где отсутствует электрическое поле.

а) Исходя из этих данных, определить величину массы иона  $Cs^+$ .

О т в е т.  $2,4 \cdot 10^{-22}$  г.

Сравните ответ со значением, которое вы найдете в таблице, справочнике или учебнике по химии.

б) Какое потребовалось бы время, чтобы при этих же условиях пробег протона был равен 1 мм?

О т в е т.  $7,2 \cdot 10^{-9}$  сек.

в) То же — для дейтрона (дейтрон — это частица, состоящая из протона и нейтрона,  $M_d \cong 3,2 \cdot 10^{-24}$  г).

г) Можно ли в этом опыте отличить дейтрон от альфа-частицы? Заряд  $\alpha$ -частицы равен  $2e$ .

14. *Заряженные частицы в однородном магнитном поле.* Электрон и протон ускоряются электрическим полем напряженностью в 1 ед. СГСЭ $_v$ /см, действующим на протяжении 10 см; затем они попадают в однородное магнитное поле с индукцией 10 000 гс, действующее в плоскости, перпендикулярной к электрическому полю.

а) Какова циклотронная частота каждой частицы?

б) Каков радиус круговой орбиты каждой частицы?

О т в е т.  $R_e=1,8 \cdot 10^{-2}$  см;  $R_p=0,77$  см.

15. *Магнитные монополи.* Магнитные монополи или свободные магнитные полюсы никогда (до настоящего времени) не наблюдались экспериментально. Дирак доказал, что интенсивность свободного магнитного полюса (обозначаемая обычно через  $g$ ), если таковой существует, должна быть целым кратным произведения величины  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar c}{e^2}$  или  $\frac{137}{2}$  на элементарный электрический заряд  $e$ . Если мы примем это целое число равным единице, то

$$g = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar c}{e^2} \cdot e \cong 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}_q.$$

Мы предполагаем, что если магнитные монополи могут возникать при столкновениях частиц высоких энергий, то будут образовываться равные количества северных и южных монополей.

а) Какова величина силы (в динах)  $F=gB$ , действующей на покоящийся монополю Дирака в магнитном поле  $B=5 \cdot 10^4$  гс?

О т в е т.  $1,6 \cdot 10^{-3}$  дин.

\*) Обозначение  $A(1, 2, 3)$  означает точку  $A$  с декартовыми координатами соответственно 1, 2 и 3.

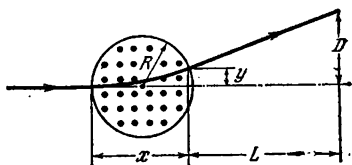


Рис. 4.17.

б) Сравнить эту силу с электрической силой  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ , действующей на покоящийся протон в электрическом поле  $E = 5 \cdot 10^4$  в/см. Не забудьте перевести  $E$  в единицы системы СГСЭ ( $E \cong 5 \cdot 10^4 / 300$  ед. СГСЭ $_{\sqrt{c}}$ ).

О т в е т.  $8,0 \cdot 10^{-8}$  дин.

16. Отклонение пучка электронов магнитным полем. Отклонение пучка электронов в электронно-лучевой трубке может производиться как магнитным, так и электростатическим полем. Пусть пучок электронов, имеющих энергию  $W$ , поступает в область, где существует поперечное однородное магнитное поле с индукцией  $B$  (краевыми эффектами пренебрегаем).

а) Показать, что (см. рис. 4.17)

$$y = r \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{x}{r} \right)^2} \right],$$

причем  $x$  — расстояние от точки, где электрон входит в магнитное поле, до точки, где электрон выходит из него, а  $r$  — радиус кривизны траектории электрона в поперечном магнитном поле. Радиусом кривизны называется радиус круга, соприкасающегося с искривленной частью траектории (т. е. наиболее близко прилегающего к ней).

б) Если  $R$  — радиус поверхности магнитных полюсов, то  $x \cong 2R$ , когда  $r \gg R$ . Пользуясь разложением в ряд по формуле бинома Ньютона, доказать, что при этом  $y \approx 2R^2/r$ .

17. Ускорение заряженных частиц в циклотроне. Предположим, что в циклотроне  $\mathbf{V} = \hat{z}B$  и

$$E_x = E \cos \omega_{\text{ц}} t, \quad E_y = -E \sin \omega_{\text{ц}} t, \quad E_z = 0,$$

причем величина  $E$  постоянна (в реальном циклотроне электрическое поле не является пространственно однородным). Очевидно, что при этих условиях вектор напряженности электрического поля описывает круг, вращаясь с угловой скоростью  $\omega_{\text{ц}}$ . Показать, что движение заряженной частицы определяется следующими уравнениями:

$$x(t) = \frac{qE}{M\omega_{\text{ц}}^2} (\omega_{\text{ц}} t \sin \omega_{\text{ц}} t + \cos \omega_{\text{ц}} t - 1),$$

$$y(t) = \frac{qE}{M\omega_{\text{ц}}^2} (\omega_{\text{ц}} t \cos \omega_{\text{ц}} t - \sin \omega_{\text{ц}} t),$$

если в момент  $t = 0$  эта частица находилась в начале координат, а ее скорость равнялась нулю. Изобразить первые несколько циклов движения частицы.

#### Д о п о л н е н и е 1. Движение протона во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях

Эту важную задачу можно довольно легко решить. Пусть  $\mathbf{V} = B\hat{z}$ ; если поле  $\mathbf{E}$  перпендикулярно к  $\mathbf{V}$ , то из уравнения силы Лоренца (10) и определения  $\omega_{\text{ц}}$ , согласно уравнению (51), мы получаем следующие уравнения движения протона:

$$\dot{v}_x = \frac{e}{M_p} E_x + \omega_{\text{ц}} v_y, \quad \dot{v}_y = \frac{e}{M_p} E_y - \omega_{\text{ц}} v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad (73)$$

где  $\omega_{\text{ц}} = eB/M_p c$ . Индукция магнитного поля параллельна оси  $z$ . Система уравнений (73) допускает следующее частное решение, имеющее наиболее простой вид, если направить ось  $x$  параллельно напряженности электрического поля, т. е. так, чтобы  $\mathbf{E} = \hat{x}E$ :

$$v_y = -\frac{cE}{B}, \quad v_x = 0, \quad v_z = \text{const}. \quad (74)$$

Мы можем найти это решение, если зададим себе вопрос, имеется ли такое частное решение системы уравнений (73), для которого  $\dot{\mathbf{v}} \equiv 0$ , т. е. движение частицы происходит без ускорения. В этом случае сочетание взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей действует как селектор скорости, отбирая

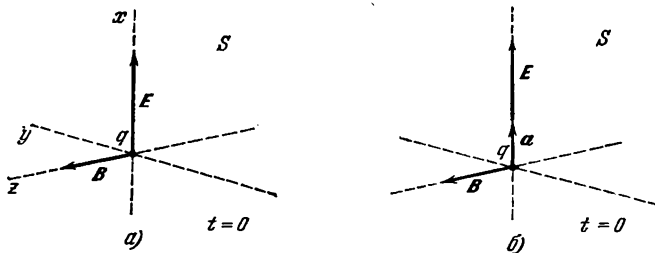


Рис. 4.18. а) Представим себе положительный заряд  $q$ , находящийся при  $t=0$  в начале координат и не имеющий начальной скорости. На этот заряд действуют взаимно перпендикулярные поля: электрическое  $E$  и магнитное  $B$ . (Система отсчета  $S$ .) б) Начальное ускорение этого заряда  $q$  равно  $a = qE/M$ .

частицы со скоростью  $v_y$ , определяемой из уравнений (74); эти частицы проходят через прибор без отклонений. Рассмотрение частного решения (74) наводит нас на

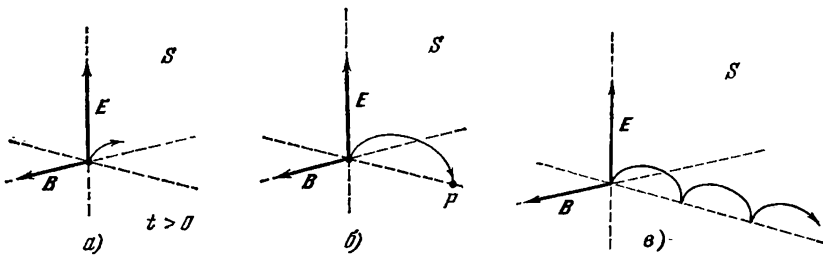


Рис. 4.19. а) Как только заряд  $q$  приобретает скорость в направлении  $E$ , на него станет действовать сила  $F = (q/c) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Вследствие этого траектория заряда искривляется в направлении  $(-y)$ . б) Заряд  $q$  в конце концов попадает в точку  $P$  на оси  $y$ , где его скорость обращается в нуль. Затем он начинает новый период движения. в) Траектория заряда  $q$  представляет собой обычную циклоиду (если в начальном положении он был неподвижен), и заряд  $q$  движется со средней скоростью  $V$ , направленной вправо;  $V = cE/B$ .

мысль искать общее решение системы дифференциальных уравнений (73) в следующем виде:

$$v_x(t) = \eta_x(t), \quad v_y(t) = \eta_y(t) - \frac{cE}{B}. \quad (75)$$

Подставляя (75) в (73), получаем

$$\dot{\eta}_x = \omega_c \eta_y, \quad \dot{\eta}_y = -\omega_c \eta_x. \quad (76)$$

Система уравнений (76) равносильна системе (45), решение которой приведено выше. Поэтому

$$v_x(t) = v_1 \sin \omega_c t, \quad (77a)$$

$$v_y(t) = v_1 \cos \omega_c t - \frac{cE}{B}, \quad (77б)$$

$$v_z(t) = \text{const}. \quad (77в)$$

Движение протона, описываемое системой уравнений (77), будет круговым (или движением по спирали, если  $v_z \neq 0$ ) в системе отсчета, движущейся в

направлении  $y$  со следующей постоянной скоростью:

$$\mathbf{v} = \left( 0, -\frac{cE}{B}, 0 \right). \quad (78)$$

В этой движущейся системе отсчета протон ведет себя так, как если бы на него действовало магнитное поле, а электрическое поле равнялось нулю. Сравните (78) с (74).

**Пример. Аналогия с циклоидой.** Движение протона относительно лабораторной системы отсчета подобно движению точки на окружности колеса, катящегося без скольжения в направлении  $y$  (т. е. движению по обычной циклоиде), если расстояние

$$V \frac{2\pi}{\omega_{ц}} = \left( \frac{cE}{B} \right) \left( \frac{2\pi M c}{qB} \right), \quad (79)$$

пройденное за период  $2\pi/\omega_{ц}$ , равно длине окружности  $2\pi r$ . Согласно (57) эта длина окружности равна

$$2\pi r = 2\pi \frac{cMv_1}{qB}. \quad (80)$$

Приравняв правые части уравнений (79) и (80), получаем

$$\frac{2\pi c^2 E M}{qB^2} = \frac{2\pi c M v}{qB}, \quad (81)$$

или

$$\frac{cE}{B} = v_1. \quad (82)$$

Но  $V = cE/B$ , так что условие (82) можно переписать как  $V = v_1$ . Этот результат, полученный для движения заряженной частицы с начальной скоростью, равной нулю, в точности соответствует условию движения точки на окружности при качении без скольжения. Однако только в частном случае, когда  $v_1 = cE/B$ , обе величины  $v_x(t)$  и  $v_y(t)$  могут быть равны нулю в один и тот же момент времени. Та точка

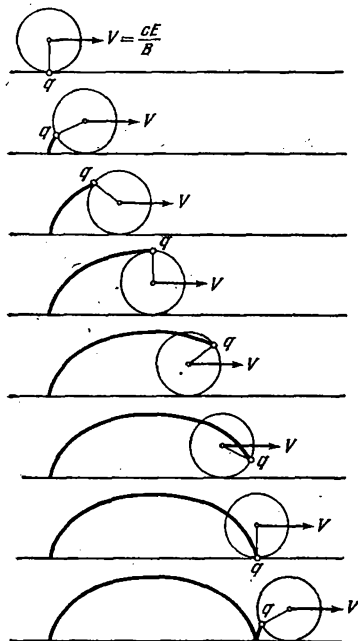


Рис. 4.20. Обычная циклоида описывается материальной точкой  $q$ , находящейся на окружности, которая «катится» по прямой.

колеса, которая касается плоскости, является при качении без скольжения единственной его точкой, неподвижной в данный момент.

## Дополнение 2. Преобразования систем отсчета

Когда разбиралась задача о траектории протона \*) во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях, мы видели, что описание его движения оказывалось особенно простым, если выбрать систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью

$$\mathbf{v} = \left( 0, -\frac{cE}{B}, 0 \right) \quad (83)$$

относительно лабораторной системы отсчета [см. уравнение (78)]. Для наблюдателя, связанного с этой новой системой отсчета, частица движется по спирали, а в

\*) Протон был взят как пример частицы только для того, чтобы определенным образом выбрать знак заряда.

системе отсчета, имеющей постоянную скорость, равную

$$\mathbf{V} = \left( 0, -\frac{cE}{B}, v_z \right). \quad (84)$$

движение наблюдается как круговое движение с постоянной абсолютной величиной скорости. Мы прибавили здесь к (83) скорость вдоль оси  $z$  (т. е. вдоль направления вектора  $\mathbf{B}$ ), равную постоянной составляющей скорости частицы в этом направлении. Перейдя к движущейся системе отсчета, мы сильно упростили описание движения частицы. В лабораторной системе отсчета проекция траектории частицы на плоскость  $xy$  является циклоидой — обыкновенной, удлиненной или укороченной\*), в зависимости от того, будет ли  $cE/B$  равно, меньше или больше проекции  $v_z$  скорости частицы на плоскость  $xy$ . Такая система отсчета, в которой движение является круговым, очевидно, представляет собой наиболее пригодную систему для анализа этого движения.

*Преобразование системы отсчета, относительно которой мы наблюдаем процесс, является одним из наиболее эффективных приемов теоретического анализа,*

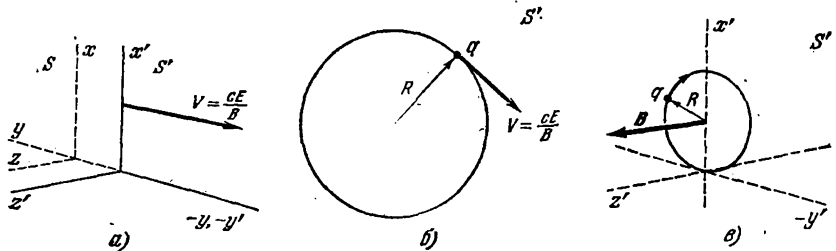


Рис. 4.21. а) Будем наблюдать движение заряда  $q$  относительно системы отсчета  $S'$ , полученной из системы  $S$  преобразованием Галилея. б) Относительно системы отсчета  $S'$  заряд  $q$  движется со скоростью  $V$  по окружности с радиусом  $R = \frac{Mv_z}{EB}$ . в) Таким образом, в системе отсчета  $S'$  поле  $\mathbf{E} = 0$  и на заряженную частицу действует только магнитное поле  $\mathbf{B}$ .

*применяемых в физике.* Физическая сущность и принципиальная простота процесса зачастую обнаруживаются только после подходящего преобразования системы отсчета. Обычно преобразование сводится к простому переносу системы отсчета. Студент встретит трудности, только если он забудет, что именно надо преобразовать: описание явления\*\*) или систему отсчета, относительно которой мы наблюдаем явление. Почти всегда, приступая к анализу явления, надо произвести преобразование системы отсчета. Процесс или явление совершается независимо от системы отсчета: когда меняется система отсчета, меняется только о п и с а н и е этого процесса относительно системы отсчета. В гл. 3 подробно обсуждалось, что имеется в виду при преобразовании системы отсчета. Сейчас же мы разберем некоторые технические приемы для подбора простых преобразований.

Рассмотрим конкретный пример того, как можно изменить описание процесса посредством изменения системы отсчета. В общем виде движение заряженной частицы во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях опре-

\*) Обыкновенная циклоида — это кривая, описываемая точкой на окружности круга, катящегося по прямой линии; удлиненная циклоида описывается точкой, находящейся на продолжении радиуса вне окружности, а укороченная циклоида описывается точкой, лежащей на радиусе, но внутри окружности.

\*\*) Совсем легко определить, когда нужно преобразовать описание явления (процесса); например, когда мы говорим: «изменим знак всех зарядов, заменив  $e$  на  $-e$ », или «изменим направление всех магнитных полей на обратное, заменив  $\mathbf{B}$  на  $-\mathbf{B}$ », или «изменим направление всех скоростей на обратное, заменив  $\mathbf{v}$  на  $-\mathbf{v}$ ».

деляется уравнениями (77):

$$v_x(t) = v_1 \sin \omega_{\text{ц}} t, \quad (85a)$$

$$v_y(t) = v_1 \cos \omega_{\text{ц}} t - \frac{cE}{B}, \quad (85b)$$

$$v_z(t) = \text{const} \equiv v_z. \quad (85b)$$

Это — движение относительно лабораторной системы отсчета, т. е. относительно системы отсчета, в которой неподвижны магниты и конденсаторы, создающие поля **E** и **B**.

Теперь заменим систему отсчета на другую систему, движущуюся с постоянной скоростью относительно лаборатории и находящаяся в ней приборов. Перейдем к системе отсчета, имеющей скорость (84) относительно лаборатории. В обычной векторной системе обозначений уравнение (84) запишется так:

$$\mathbf{V} = -\frac{cE}{B} \hat{y} + v_z \hat{z}. \quad (86)$$

Мы предполагаем, что  $V/c \ll 1$ , т. е. рассматриваемая задача является нерелятивистской.

Прежде всего нам необходимо ввести четкую систему обозначений, чтобы всегда знать, о какой системе отсчета говорится. Если нужно перейти от скорости частицы  $\mathbf{v}'$ , измеренной в движущейся системе отсчета, к скорости  $\mathbf{v}$ , измеренной в лабораторной системе отсчета, мы прибавляем **V** к  $\mathbf{v}'$ :

$$\mathbf{v}' + \mathbf{V} = \mathbf{v}. \quad (87)$$

Нетрудно ясно представить себе, с каким знаком входит вектор **V** в равенство (87). Предположим, что частица неподвижна относительно движущейся системы отсчета; тогда  $\mathbf{v}' = 0$ . Но при наблюдении в лабораторной системе отсчета частица имеет, согласно уравнению (87), скорость **V** движущейся системы отсчета. Этот способ проверки полезен при уточнении знаков в уравнениях преобразования.

Применив к уравнениям (85) преобразование (87), получаем

$$v'_{x'}(t) = v_1 \sin \omega_{\text{ц}} t, \quad (88a)$$

$$v'_{y'}(t) = v_1 \cos \omega_{\text{ц}} t, \quad (88b)$$

$$v'_{z'}(t) = 0. \quad (88b)$$

Следует обратить внимание на то, что в величинах  $v'_{x'}$  и т. п. штрихами снабжены как  $v$ , так и  $x$ . Однако при замене систем отсчета не было поворота, и оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  соответственно параллельны осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Уравнения (88) описывают круговое движение с точно такой же угловой частотой  $\omega_{\text{ц}}$ , как если бы в движущейся системе отсчета на частицу действовало только магнитное поле. В т. II мы будем часто обращаться к свойствам электрического и магнитного полей в движущихся системах отсчета.

Рассмотрим дополнительно также координаты частицы. Проинтегрируем систему уравнений (85), чтобы получить уравнения траектории частицы в лабораторной системе отсчета:

$$x(t) = x_0 - \frac{v_1}{\omega_{\text{ц}}} \cos \omega_{\text{ц}} t, \quad (89a)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_1}{\omega_{\text{ц}}} \sin \omega_{\text{ц}} t - \frac{cE}{B} t, \quad (89b)$$

$$z(t) = z_0 + v_z t. \quad (89b)$$

Для получения уравнений траектории в движущейся системе отсчета интегрируем уравнения (88):

$$x'(t) = x'_0 - \frac{v_1}{\omega_{\text{ц}}} \cos \omega_{\text{ц}} t, \quad (90a)$$

$$y'(t) = y'_0 + \frac{v_1}{\omega_{\text{ц}}} \sin \omega_{\text{ц}} t, \quad (90b)$$

$$z'(t) = z'_0. \quad (90b)$$



В штрихованной системе отсчета траектория частицы представляет собой окружность с радиусом  $\rho = v_1/\omega_{II}$ . Чтобы определить зависимость  $x'_0, y'_0, z'_0$  от  $x_0, y_0, z_0$ , нам надо знать расстояние между началами координат  $O'$  и  $O$  двух систем отсчета при  $t = 0$ . Если при  $t = 0$  начала координат совпадают, то

$$(x'_0, y'_0, z'_0) = (x_0, y_0, z_0).$$

Мы рассмотрели один и тот же процесс в двух системах отсчета. В лабораторной системе отсчета протон, находящийся под действием взаимно перпендикулярных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , движется по сложной циклоидальной орбите, определяемой следующим уравнением:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (91)$$

В системе отсчета, обозначенной одним штрихом, которая движется с данной постоянной скоростью  $\mathbf{V}$  относительно лабораторной системы отсчета, описание движения протона выглядит так, как если бы на него действовало только магнитное поле:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{e}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'. \quad (92)$$

При этом мы предположили, что в нерелятивистской области скоростей  $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$ .

#### Математическое дополнение. Комплексные числа

Математическая трактовка колебательных процессов и особенно процессов, происходящих в цепях переменного тока, упрощается, если пользоваться комплексными числами. Комплексное число — это такое число

$$z = a + ib, \quad (93)$$

где  $a$  и  $b$  — обычные вещественные числа, а  $i$  — квадратный корень из минус единицы:

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1. \quad (94)$$

Вещественная часть  $z$  обозначается как  $\text{Re}(z)$  и равна  $a$ . Коэффициент при  $i$  в

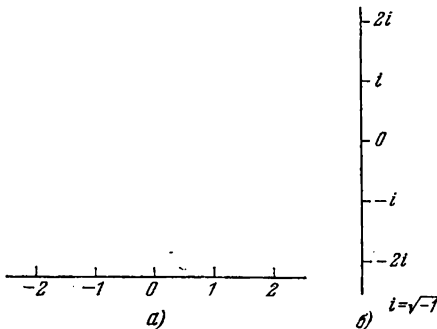


Рис. 4.22. Вещественные числа удобно изображать точками на горизонтальной оси (а), а мнимые числа — точками на вертикальной оси (б).

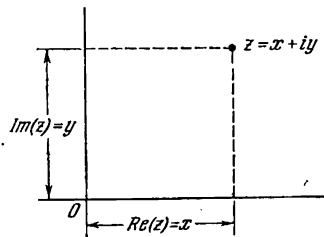


Рис. 4.23. Комплексное число  $z = x + iy$  изображается точкой на «комплексной» плоскости или плоскости  $z$ . Заметим, что точка, изображающая число  $+1$ , находится от начала координат на расстоянии  $+1$  в направлении  $y$ .

мнимой части  $z$  обозначается как  $\text{Im}(z)$  и равен  $b$ . Это зависит от соглашения: мы говорим, что  $\text{Im}(z) = b$ , и не нужно говорить, что  $\text{Im}(z) = ib$ . Таким образом,  $z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z)$ .

Сложить два комплексных числа — это значит образовать число

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \quad (95)$$

Перемножить два комплексных числа — это значит образовать число

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 + i^2 b_1 b_2. \quad (96)$$

Подставив  $i^2 = -1$ , получаем

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad (97)$$

При делении комплексных чисел мы обычно стремимся так преобразовать частное, чтобы его знаменатель был вещественным:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (98)$$

При изменении знака перед  $i$  в любом комплексном числе  $z$  получается число  $z^*$ , комплексно сопряженное с данным. Если  $z = a + ib$ , то

$$z^* = a - ib. \quad (99)$$

Произведение комплексного числа на число, сопряженное с ним, является положительным вещественным числом

$$z z^* = a^2 + b^2. \quad (100)$$

По определению модуль числа  $z$  равен

$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Эти определения становятся более наглядными, если мы представим комплексное число  $z = x + iy$  геометрически. Пусть ось  $x$  будет вещественной осью, а ось  $y$  — мнимой осью. Тогда  $|z|$  будет равен расстоянию от начала координат  $O$  до точки

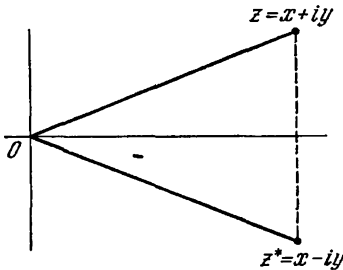


Рис. 4.24. Комплексно сопряженным числу  $z = x + iy$  является число  $z^* = x - iy$ . Очевидно, что  $|z| = |z^*|$ .

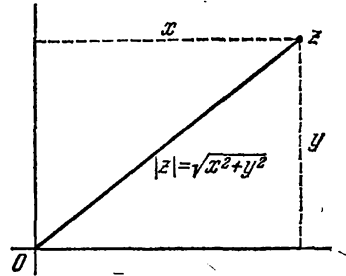


Рис. 4.25. Абсолютная величина  $|z|$  комплексного числа соответствует расстоянию от начала координат до точки  $z$ . Согласно теореме Пифагора  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$z$ , а  $\text{Re}(z)$  и  $\text{Im}(z)$  — это проекции отрезка  $Oz$  на обе оси (см. рис. 4.23). При графическом представлении видно, что сложение комплексных чисел совершается по правилу параллелограмма; этот вывод подтверждается аналитически. Комплексные числа обладают некоторыми свойствами векторов в двумерном пространстве.

Обозначим через  $\varphi$  угол между отрезком  $Oz$  и вещественной осью (рис. 4.27). Тогда мы можем представить любое комплексное число  $z = x + iy$  в таком виде:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (101)$$

где

$$x = |z| \cos \varphi \quad \text{и} \quad y = |z| \sin \varphi. \quad (102)$$

Введем следующее важное соотношение, связывающее показательную функцию,

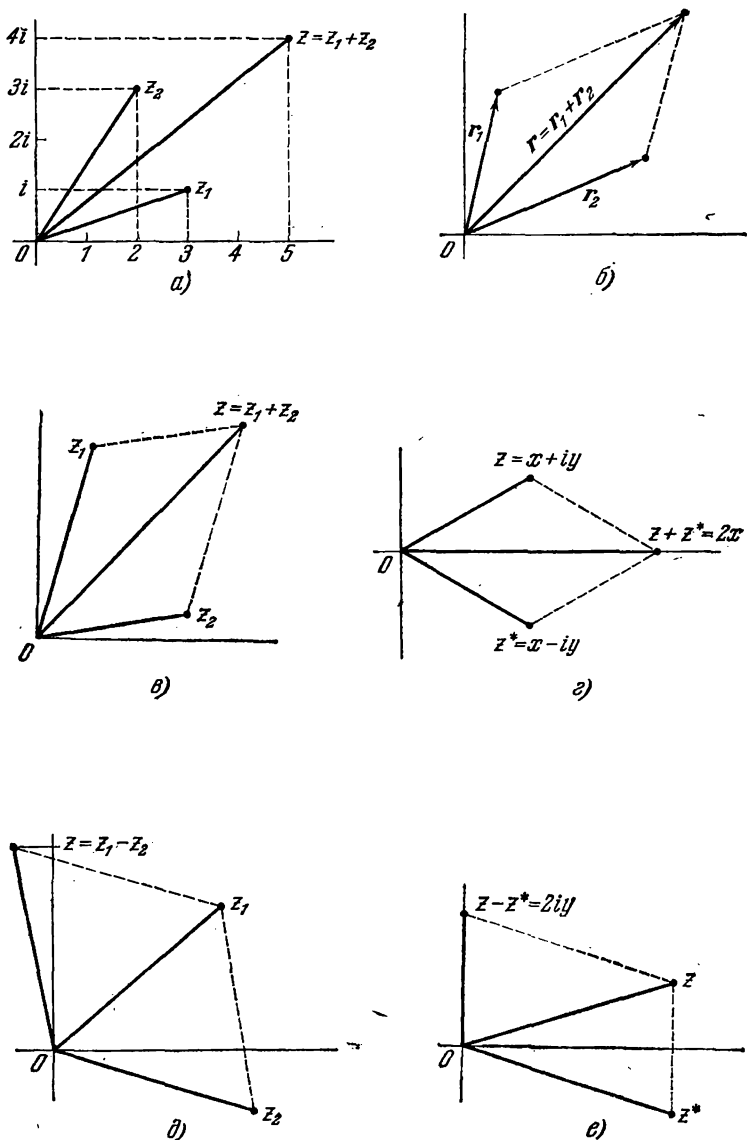


Рис. 4.26. Сложение комплексных чисел:

если  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ ,  
то  $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ .

Убедитесь, что это подтверждается графиком (а). Сложение векторов. Векторы тоже складываются по правилу «составляющая с составляющей» (б). Следовательно, если правило параллелограмма выполняется для сложения векторов, то оно выполняется также и для сложения комплексных чисел (в). Например,  $z + z^* = 2x$ , т. е. равно вещественному числу (г). Подобным же образом вычитание комплексных чисел легко выполняется с помощью правила параллелограмма (д). Например,  $z - z^* = 2iy$ , т. е. равно мнимому числу (е).

косинус и синус и доказываемое разложением этих трех функций в степенные ряды:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (103)$$

Тогда можно переписать уравнение (101) таким образом:

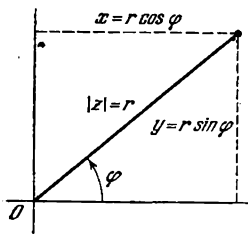
$$z = |z| e^{i\varphi}. \quad (104)$$

Мы называем *аргументом*  $z$ , а  $|z|$  — *модулем*  $z$ . Эта форма записи особенно удобна для выражения амплитуды и фазы колебаний. Умножение и деление комплексных чисел выглядит теперь гораздо проще:

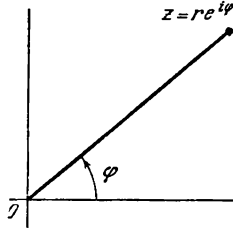
$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (105)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (106)$$

Формулы (105) и (106) очень удобны для числовых расчетов. Из графического представления комплексного числа в виде вектора видно, что умножение на другое комплексное число равносильно растяжению вектора с поворотом его. Результат умножения не зависит от порядка этих операций.



а)



б)

Рис. 4.27. Полярная форма записи комплексных чисел. Из графика (а) ясно, что  $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Поскольку  $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ , то мы можем записать любое комплексное число в *полярной форме* (б):  $z = r e^{i\varphi}$ .

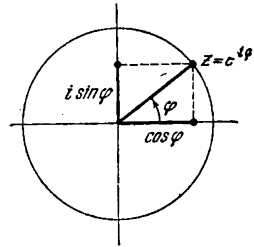


Рис. 4.28. В частности, если  $|z| = r = 1$ , то число  $z$  изображается точкой на окружности единичного радиуса. Полярная форма записи очень удобна.

Точки комплексной плоскости  $z = x + iy$ , изображающие комплексные числа с модулем, равным единице ( $|z| = 1$ ), находятся на окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Такие комплексные числа могут быть выражены формулой (103). Пользуясь формулами (103) и (105), мы можем вывести уравнение Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad (107)$$

которое дает нам непосредственно уравнения для синуса и косинуса кратных углов, если отдельно приравнять друг другу вещественные и мнимые части из выражений слева и справа.

При  $n = 2$  выведем уравнения для  $\sin 2\varphi$  и  $\cos 2\varphi$ . Из уравнения Муавра получаем при  $n = 2$

$$(e^{i\varphi})^2 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi, \quad (108)$$

или

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi. \quad (109)$$

Приравнивая вещественные и мнимые части выражений, соединенных в (109) знаком равенства, получаем следующие результаты:

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi, \quad (110)$$

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi. \quad (111)$$

С помощью уравнения Муавра можно получить естественным и легким путем значительную часть тригонометрических тождеств.

В качестве упражнения используйте уравнение (103) для вывода следующих важных тождеств:

$$\cos \varphi \equiv \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi \equiv \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (112)$$

При равенстве двух комплексных чисел должны быть в отдельности равны друг другу их вещественные и мнимые части. Пользуясь этим свойством, мы можем выразить функцию колебаний  $\psi = \cos \omega t$  как вещественную часть комплексной функции  $\psi = e^{-i\omega t}$ , а по окончании преобразований опять отделить вещественную

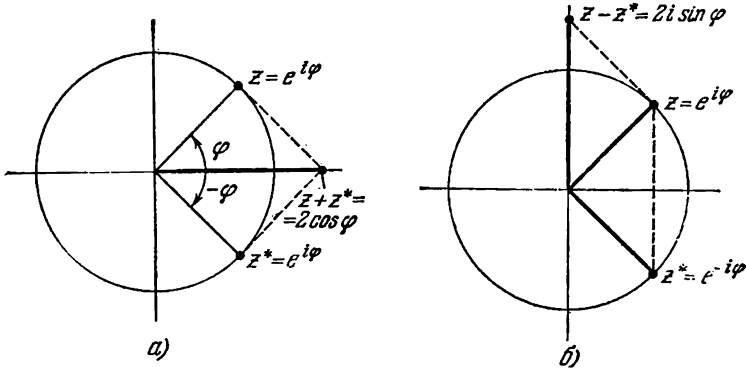


Рис. 4.29. а) Как мы видели выше,  $z + z^* = 2x$ . Следовательно,  $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$ , или

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

б) Подобным же образом  $z - z^* = 2iy$ , так что

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

часть. Мы можем свободно делать это, если в преобразования не входят произведения комплексных чисел, т. е. если уравнения в комплексных числах линейны. Но с произведениями необходимо оперировать очень осторожно. Предположим, что нас интересует произведение  $x_1 x_2$  двух вещественных величин. Если мы напишем

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad (113)$$

то вещественная часть произведения этих комплексных чисел будет

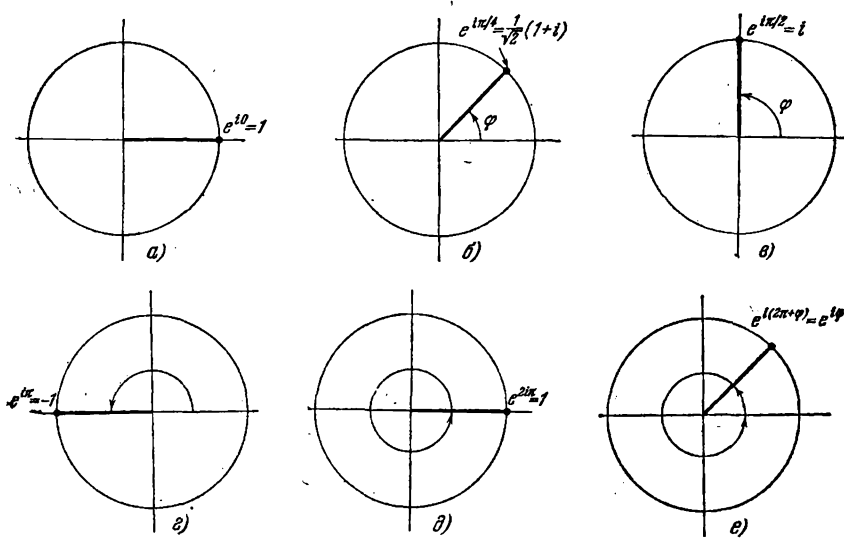
$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad (114)$$

т. е. она не равна произведению вещественных частей сомножителей:

$$\operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) = x_1 x_2. \quad (115)$$

Хотя система записи в виде комплексных величин очень удобна при решении линейных дифференциальных уравнений и при анализе процессов в линейных цепях, применяя ее, следует соблюдать осторожность, если рассчитываются биллинейные количества, как, например, поглощение энергии и поток энергии. По указанной причине в руководстве по лабораторным работам к этому курсу относительно редко употребляются комплексные числа. Однако без комплексных величин квантовая физика выглядела бы довольно громоздко.

**Пример.** Найти результат сложения двух колебаний, описываемых уравнениями  $\psi_1 = \cos \omega t$  и  $\psi_2 = \cos(\omega + \Delta\omega)t$ . В комплексной форме, применяя тождество



Фиг. 4.30. Рассмотрим комплексные числа, изображаемые точками на окружности единичного радиуса. а)  $\varphi=0$ ; б)  $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ; в)  $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ; г)  $\varphi=\pi$ . д) Теперь  $\varphi=2\pi$ . Мы вернулись к исходной точке. е) Для значений  $\varphi > 2\pi$  мы получаем  $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$ .

Таким образом,  $e^{i\varphi}$  является периодической функцией с периодом  $2\pi$ .

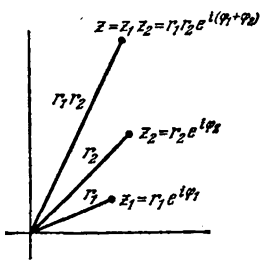
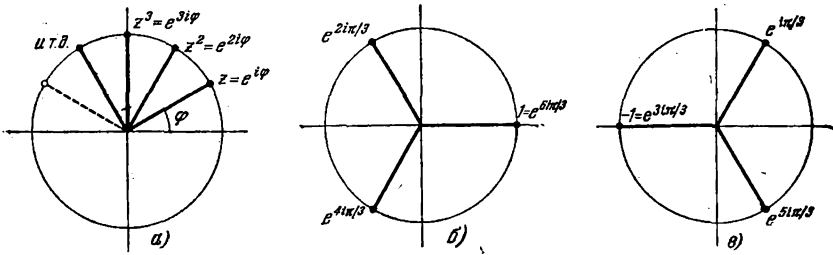


Рис. 4.31. Если  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ , то  $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ .



Фиг. 4.32. а) Здесь в качестве примера показаны последовательные степени числа  $z = e^{i\varphi}$  (окружность единичного радиуса). б) Другой пример: три корня двучлена  $f(z) = z^3 - 1$  и в) три корня двучлена  $f(z) = z^3 + 1$ . Проверьте эти два примера.

(112), получаем

$$\begin{aligned} \psi_1 + \psi_2 &= e^{-i\omega t} + e^{-i(\omega + \Delta\omega)t} = [e^{i(\Delta\omega t/2)} + e^{-i(\Delta\omega t/2)}] e^{-i(\omega + \Delta\omega/2)t} = \\ &= 2 \cos(\Delta\omega t/2) e^{-i(\omega + \Delta\omega/2)t}. \end{aligned} \quad (116)$$

Следовательно,

$$\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t = \operatorname{Re}(\psi_1 + \psi_2) = 2 \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t. \quad (117)$$

Если отношение  $\Delta\omega/\omega$  мало по сравнению с единицей ( $\Delta\omega/\omega \ll 1$ ), то в результате сложения этих двух колебаний получается модулированное колебание, основная частота которого приближенно равна  $\omega$ , а амплитуда относительно медленно изменяется с частотой  $\Delta\omega/2$ .

**Пример.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_x = \omega_{\text{ц}} v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega_{\text{ц}} v_x. \quad (118)$$

Эта система описывает движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси  $z$ . Помножим второе из уравнений (118) на  $-i$  и прибавим к первому. Мы получим

$$\dot{v}_x - i\dot{v}_y = \omega_{\text{ц}}(v_y + iv_x). \quad (119)$$

По определению

$$v^+ \equiv v_x + iv_y, \quad v^- \equiv v_x - iv_y. \quad (120)$$

Тогда уравнение (119) принимает такой вид:

$$\frac{dv^-}{dt} = i\omega_{\text{ц}} v^-, \quad (121)$$

и имеет следующее решение:

$$v^- = A e^{i(\omega_{\text{ц}} t + \varphi)}, \quad (122)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — постоянные величины. Отделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \operatorname{Re}(v^-) = A \cos(\omega_{\text{ц}} t + \varphi), \\ v_y &= -\operatorname{Im}(v^-) = -A \sin(\omega_{\text{ц}} t + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

### Задачи на комплексные числа.

1. а) Если  $z_1 = 5 + 3i$ , а  $z_2 = 5i$ , то чему равно  $z_1 + z_2$ ? б) Чему равно  $z_1 z_2$ ?
- в) Чему равно  $z_1 + z_1^*$ ? г) Чему равно  $z_1 - z_1^*$ ? д) Чему равно  $z_1 z_1^*$ ?
2. Выразить все ответы к задаче 1 в полярной форме:  $z = |z| e^{i\varphi}$ .
3. Доказать, что  $\sqrt{-i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , возведя обе части равенства в квадрат.
4. Чему равен квадратный корень из числа  $z = 4 + 9i$ ?

### Из истории физики. Изобретение циклотрона

По своему принципу действия большинство современных ускорителей частиц высоких энергий происходит от первого циклотрона для протонов на 1 Мэв, построенного Лоуренсом и Ливингтоном в Беркли. Идея циклотрона принадлежит Лоуренсу; ее основные положения были впервые опубликованы Лоуренсом и Эдлесеном в форме беседы, кратко изложенной в журнале «Science» («Наука») 72, 376—377 (1930). Первые экспериментальные результаты были опубликованы в 1932 г. в изящной статье, напечатанной в «Physical Reviews» («Физическое обозрение»),

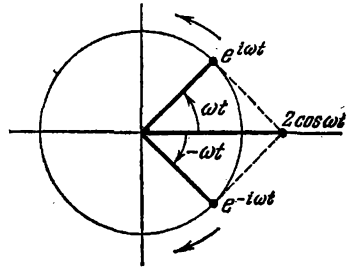


Рис. 4.33. Комплексные числа играют важную роль в теории колебаний: колебание вида  $\cos \omega t$  можно выразить как линейную комбинацию двух комплексных переменных, которым соответствуют векторы одинаковой длины, вращающиеся в противоположных направлениях:

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

основном физическом журнале Американского физического общества. Для опубликования статей в этом журнале требуется давать к ним содержательные резюме, однако немногие из таких резюме настолько ясно выражают сущность

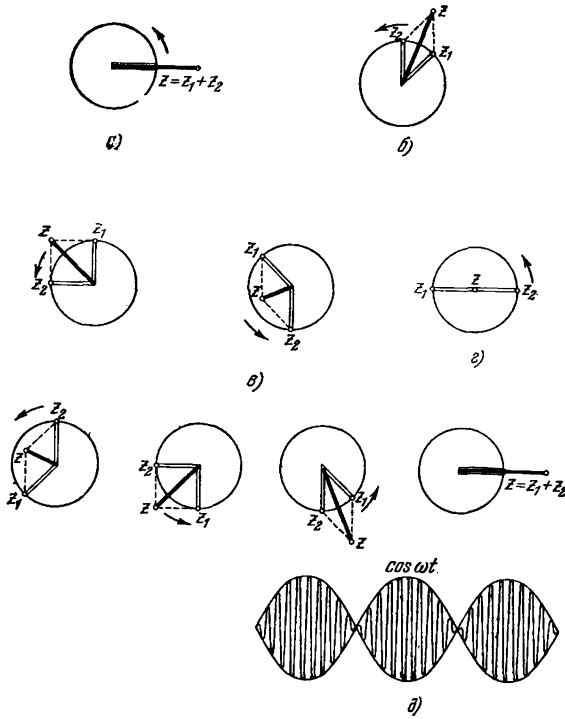


Рис. 4.34. а) В качестве другого примера возьмем два комплексных переменных:

$$z_1 = e^{i(\omega - \Delta\omega/2)t} \text{ и } z_2 = e^{i(\omega + \Delta\omega/2)t},$$

которые совпадают по фазе при  $t=0$ . Однако вектор, соответствующий  $z_2$ , вращается быстрее, чем вектор, соответствующий  $z_1$ . б) По мере возрастания времени все больше увеличивается разность фаз между  $z_1$  и  $z_2$ . Их сумме  $z = z_1 + z_2$  соответствует вектор, вращающийся с частотой  $\omega$ :

$$z = z_0 e^{i\omega t}.$$

в) Амплитуда этого вектора  $z_0$  изменяется со временем. г) Когда  $\Delta\omega t = \pi$ , получаем  $z_0 = 0$ . д) Таким образом, так как

$$z = z_1 + z_2 = e^{i(\omega - \Delta\omega/2)t} + e^{i(\omega + \Delta\omega/2)t} = 2 \left( \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right) e^{i\omega t},$$

получаем

$$z_0 = 2 \cos \frac{\Delta\omega t}{2}.$$

Следовательно, если  $\omega \gg \Delta\omega$ , то график  $\text{Re}(z) = 2 \cos \frac{\Delta\omega t}{2}$  выглядит так.

$$\text{Огибающая} = 2 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$$

работы, как резюме этой классической статьи Лоуренса и Ливингстона, начало которой приводится здесь вместе с двумя рисунками оригинала. Профессор Ливингстон работает в настоящее время в Массачусетском технологическом институте, профессор Лоуренс умер в 1958 г.

Первоначально использовавшийся магнит диаметром 279 мм почти сразу оказался слишком маленьким для применения в ускорителях; он был реконструи-



рован и до настоящего времени применяется в Беркли для различных исследовательских целей. С этим магнитом, в частности, были проведены первые успешные опыты по циклотронному резонансу носителей заряда в кристаллах.

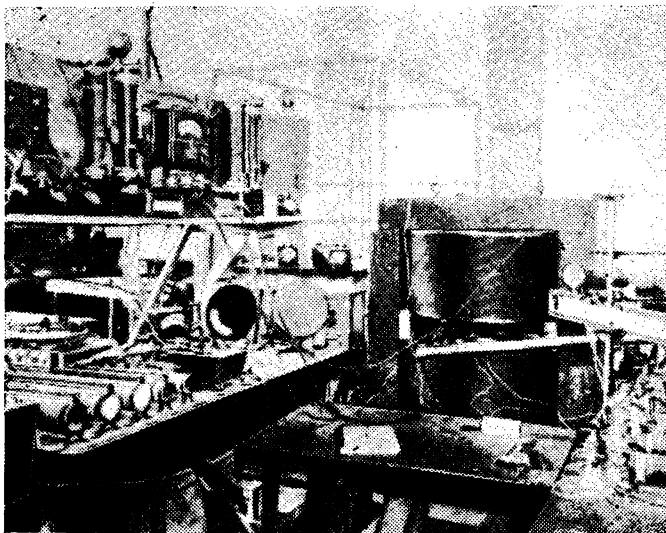


Рис. 4.35. Один из первых циклотронов.

Интересный обзор ранних этапов истории применения циклотронов был сделан Лоуренсом в его речи по случаю получения Нобелевской премии (в сборнике «Les Prix Nobel en 1951», Stockholm, 1952, Imprimerie Royale).

Начало статьи в «Физическом обозрении» (том 40, выпуск от 1 апреля 1932 г.):

ПОЛУЧЕНИЕ ОБЛАДАЮЩИХ ВЫСОКИМИ СКОРОСТЯМИ ЛЕГКИХ ИОНОВ  
БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ  
Эрнест О. Лоуренс и М. Стенли Ливингстон,

Калифорнийский университет  
(получено 20 февраля 1932 г.)

#### Резюме

Разработка способов получения высокоскоростных ионов, особенно протонов и ионов гелия, обладающих кинетической энергией больше 1 млн. электрон-вольт, позволила бы сильно облегчить изучение атомных ядер, потому что такие быстро движущиеся частицы наиболее пригодны для возбуждения ядер. Прямой метод ускорения ионов требуемой разностью потенциалов создает большие экспериментальные трудности, связанные с необходимостью получения очень сильных электрических полей. В настоящей статье излагается метод, в котором эти трудности обходятся посредством процесса многократного ускорения ионов до высоких скоростей, не требующего применения высоких напряжений. Этот метод состоит в следующем. Полукруглые полые пластины, похожие на дуанты электрометра, установлены в вакууме в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости этих пластин, таким образом, что их диаметрально противоположные края находятся близко друг к другу. К этим пластинам, служащим электродами, подводится колеблющееся напряжение высокой частоты, создающее колеблющееся электрическое поле

в зазоре между их диаметрными краями. В результате этого в течение одной половины периода электрическое поле ускоряет ионы, образовавшиеся в диаметрном зазоре и направляющиеся во внутреннюю полость одного из электродов, где под действием магнитного поля они движутся по круговым траекториям и в конце концов опять попадают в зазор между электродами. Магнитное поле задается таким образом, чтобы время, необходимое для прохождения полуокружности по траектории внутри электродов, равнялось полупериоду колебаний. Вследствие этого, когда ионы возвратятся в зазор между электродами, электрическое поле изменит свое направление, и, таким образом, ионы, входя внутрь другого электрода, приобретут еще одно приращение скорости. Поскольку радиусы траекторий внутри электродов пропорциональны скоростям ионов, время, необходимое для прохождения таким ионом полуокружности, не зависит от его скорости. Поэтому, если ионы затрачивают точно половину периода на первую половину своего оборота, то они будут двигаться и дальше в таком же режиме и, таким образом, будут описывать спираль с периодом обращения, равным периоду колебаний электрического поля, до тех пор, пока они не достигнут наружного края прибора. Их кинетические энергии по окончании процесса ускорения будут больше энергии, соответствующей напряжению, приложенному к электродам, во столько раз, сколько они совершили переходов от одного электрода к другому. Этот метод предназначен главным образом для ускорения легких ионов, и в проведенных опытах особое внимание уделялось получению протонов, обладающих высокими скоростями, потому что предполагалось, что только протоны пригодны для экспериментальных исследований атомных ядер. При применении магнита с площадками полюсов, имеющими диаметр 11 дюймов \*), был получен в вакуумной трубке ток силой  $10^{-9}$  а из протонов, обладавших энергией  $1,22 \cdot 10^6$  эв, причем максимальное приложенное напряжение равнялось только 4000 в. Разработанный экспериментальный метод обладает двумя особенностями, которые в значительной степени обеспечили успех его применения. Во-первых, существует фокусирующее действие электрического и магнитного полей, предохраняющее от потери значительного числа ионов в процессе их ускорения. Вследствие этого сила тока высокоскоростных ионов, получаемого этим косвенным способом, сравнима с силами токов, обычно получаемых методами прямого ускорения и применением высокого напряжения. Более того, фокусирующее действие приводит к образованию очень узких ионных пучков (с диаметром поперечного сечения менее 1 мм), являющихся идеальными для экспериментального изучения процессов межатомных столкновений. Гораздо меньшее значение имеет вторая особенность метода, заключающаяся в применении простого и весьма эффективного способа корректировки магнитного поля вдоль траектории ионов. Это дает возможность легко добиться эффективной работы прибора с очень высоким коэффициентом усиления (т. е. отношением конечного эквивалентного напряжения ускоренных ионов к приложенному напряжению). Вследствие изложенного описываемый метод уже на его нынешней стадии развития представляет собой высоконадежный и экспериментально удобный способ получения высокоскоростных ионов, требующий относительно скромного лабораторного оснащения. Более того, проведенные опыты показывают, что этот косвенный метод многократного ускорения уже сейчас создает реальную возможность для получения в лабораторных условиях протонов с кинетическими энергиями свыше  $10^7$  эв. С этой целью в нашей лаборатории монтируется магнит с площадками полюсов диаметром 114 см.

## В в е д е н и е

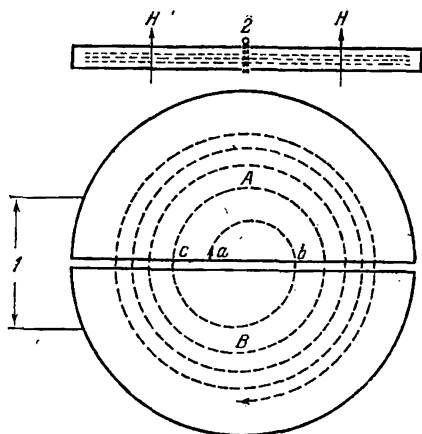
Классические опыты Резерфорда с сотрудниками <sup>1)</sup> и Позе <sup>2)</sup> по искусственной радиоактивности, а также опыты Боте и Беккера <sup>3)</sup> по возбуждению ядерного излучения подтверждают точку зрения о том, что атомное ядро поддается тем же общим методам исследования, которые так успешно применялись для определения

\* ) 279 мм. (Прим. ред.)

1) См. гл. 10 монографии Резерфорда, Чедвика и Эллиса «Излучение радиоактивных веществ».

2) Н. По се, Zeitschr. für Physik 64, 1 (1930).

3) W. B o t h e, Н. B e c k e r, Zeitschr. für Physik 66, 1289 (1930).



Схема, показывающая принцип экспериментального метода многократного ускорения ионов. 1—к генератору колебаний высокой частоты; 2—раскаленная нить

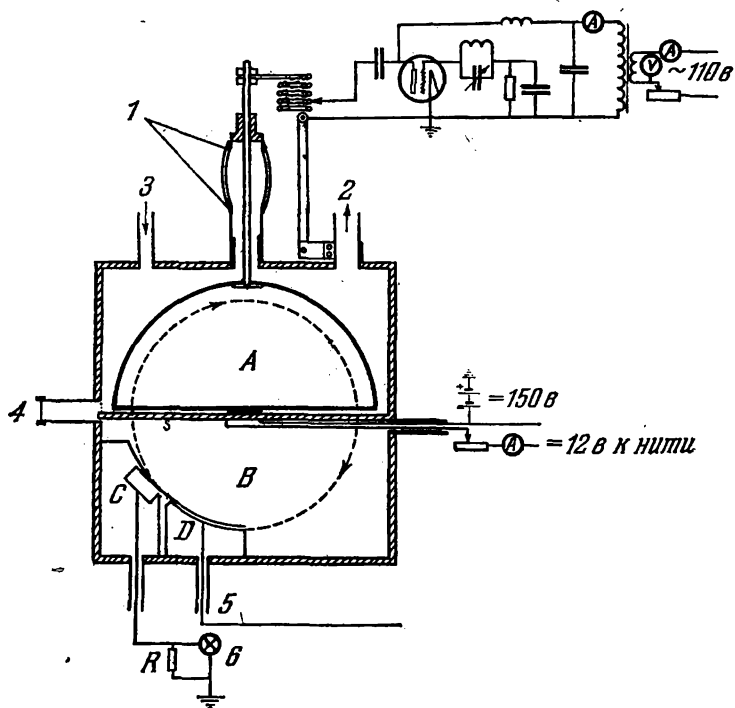


Схема установки для многократного ускорения ионов. 1—соединения медь—стекло 2—вакуумный насос; 3—водород; 4—окошко; 5—отклоняющий потенциал; 6—электрометр.

внеядерных свойств атома. Результаты этих работ показывают, что особенно полезны исследования ядерных переходов, искусственно возбужденных в лаборатории. Таким образом, широкая разработка методов возбуждения атомных ядер представляет собой очень интересную задачу; ее решение, вероятно, явится ключом к новому миру явлений, миру атомного ядра.

Но все это настолько же трудно, насколько интересно, так как атомное ядро сопротивляется таким экспериментальным атакам, противопоставляя им крепкую стену высоких энергий связи. Уровни внутриядерной энергии широко разделены друг от друга, и, как следствие этого, процессы ядерного возбуждения связаны с огромными количествами энергий — миллионами электрон-вольт.

Поэтому представляет интерес исследование наиболее многообещающих способов возбуждения атомных ядер. Имеются два основных метода: возбуждение в результате поглощения излучения (гамма-излучения) и возбуждение с помощью непосредственных столкновений частиц высоких энергий с атомными ядрами.

По поводу первого метода можно сказать, что недавние экспериментальные исследования <sup>1)</sup>, <sup>2)</sup> поглощения гамма-излучения веществом показывают для более тяжелых элементов изменения в зависимости от атомного номера, и эти факты свидетельствуют о наличии довольно значительного взаимодействия с ядрами. Все это наводит на мысль, что возбуждение ядер посредством поглощения излучения, может быть, не является редким процессом и что поэтому разработка способа получения мощных искусственных источников гамма-излучения с различными длинами волн могла бы иметь значительную ценность для ядерных исследований. В нашей лаборатории, как и в других местах, ставятся такие работы.

Однако в результате работ Резерфорда и других авторов, цитировавшихся выше, метод соударений представляется даже более перспективным. Основопологающие исследования этих авторов должны всегда рассматриваться как действительно крупные экспериментальные достижения, потому что в них были получены определенные и важные данные о весьма редких ядерных процессах, возбужденных исключительно слабыми пучками бомбардирующих частиц — альфа-частиц от радиоактивных источников. Более того, и это как раз следует здесь подчеркнуть, их работа поразительно ясно показала...\*)

---

<sup>1)</sup> G. Beck, Naturwiss. 18, 896 (1930).

<sup>2)</sup> C. Y. Chao, Phys. Rev. 36, 1519 (1930).

\*) На этом заканчивается отрывок из статьи Э. О. Лоуренса и М. С. Ливингстона. (Прим. ред.)

## ГЛАВА 5

### СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

#### 5.1. Законы сохранения в природе

В природе существует несколько законов сохранения; некоторые из них следует считать точными, другие — приближенными. Обычно законы сохранения являются следствием свойств симметрии во Вселенной. Существуют законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, заряда, числа барионов (протонов, нейтронов и тяжелых элементарных частиц), странности и различных других величин.

В этой главе мы рассмотрим закон сохранения энергии, а в следующих главах — законы сохранения импульса и момента импульса. Причем сейчас мы будем рассматривать этот закон для нерелятивистской области, в которой справедливы преобразования Галилея, скорости очень малы по сравнению со скоростью света и масса не зависит от скорости. В гл. 12, после того как мы познакомимся с преобразованием Лоренца и с основами специальной теории относительности, мы рассмотрим законы сохранения энергии, импульса и момента импульса для релятивистской области.

Если в какой-нибудь задаче известны все приложенные силы, и мы обладаем достаточными знаниями, а также располагаем вычислительными машинами, действующими с необходимой скоростью и имеющими надлежащую память для того, чтобы вычислить траектории всех частиц, то из законов сохранения мы не получим никакой дополнительной информации. Однако законы сохранения представляют собой мощное орудие, которым повседневно пользуются физики. Почему же законы сохранения являются столь мощным орудием?

1. Законы сохранения не зависят от вида траектории и от характера действующих сил. Поэтому законы сохранения позволяют получать весьма общие и существенные выводы из уравнений движения. Иногда из закона сохранения вытекает, что что-то оказывается невозможным. Мы, например, не тратим попусту время на разработку конструкции вечного двигателя, представляющего собой какую-нибудь замкнутую систему, состоящую из механических

и электрических компонентов, или на проектирование спутника, приводимого в движение одними лишь внутренними силами.

2. Законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда силы неизвестны; так, в частности, обстоит дело в физике элементарных частиц.

3. Законы сохранения тесно связаны с инвариантностью. Часто при исследовании новых и еще не понятных явлений законы сохранения являются самым поразительным из всех известных нам физических фактов. Они могут приводить к соответствующим представлениям об инвариантности. В гл. 3 мы видели, что закон сохранения импульса мог рассматриваться как непосредственное следствие из принципа инвариантности Галилея.

4. Даже в тех случаях, когда сила в точности известна, закон сохранения может оказать существенную помощь при решении задач о движении частиц. Для решения новых задач большинство физиков следует раз навсегда установленному порядку: прежде всего один за другим применяются соответствующие законы сохранения, и только после этого, если в задаче ничего не упущено, переходят к решению дифференциальных уравнений, использованию вариационного принципа или метода возмущений, применению вычислительных машин и других средств, имеющихся в нашем распоряжении или полагаются на интуицию. В гл. 7 и 9 мы используем таким путем законы сохранения энергии и импульса.

## 5.2. Определение понятий

Закон сохранения энергии включает в себя понятия кинетической и потенциальной энергии, а также понятие работы. Эти понятия, которые можно усвоить на простом примере, в дальнейшем мы обсудим более подробно. Сначала мы рассмотрим силы и движение только в одном измерении. Это существенно упростит дело. Некоторые вопросы в этой главе будут обсуждаться дважды, но такое повторение окажется только полезным.

Рассмотрим частицу массой  $M$ , движущуюся в межгалактическом пространстве и свободную от всех внешних воздействий. Эту частицу мы будем наблюдать в инерциальной системе координат. Пусть в момент времени  $t = 0$  к частице приложена сила  $F_{\text{прил}}$ , постоянная по величине и направлению, совпадающему с положительным направлением оси  $x$ . Под действием приложенной силы частица будет ускоряться. При  $t > 0$  движение описывается вторым законом Ньютона:

$$F_{\text{прил}} = M\ddot{x}. \quad (1)$$

Скорость в момент  $t$  будет равна

$$v(t) = \int_0^t \ddot{x} dt = v_0 + \frac{F_{\text{прил}}}{M} t, \quad (2)$$

где  $v_0$  — начальная скорость, направленная по оси  $x$ . Заметим, что (2) можно записать в виде

$$F_{\text{пряд}} t = Mv(t) - Mv_0. \quad (2a)$$

Правая часть этого равенства представляет собой изменение импульса частицы за промежуток времени от 0 до  $t$ ; левая часть называется импульсом силы за тот же промежуток времени. Уравнение (2a) говорит нам о том, что изменение импульса равно импульсу силы. Если начальное положение частицы характеризуется координатой  $x_0$ , то ее положение в момент времени  $t$  будет определяться так:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F_{\text{пряд}}}{M} t^2, \quad (3)$$

что получается в результате интегрирования уравнения (2). Решая (2) относительно  $t$ , находим

$$t = \frac{M}{F_{\text{пряд}}} (v - v_0). \quad (4)$$

Подставляя теперь (4) в (3), получаем

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{M}{F_{\text{пряд}}} (v_0 - v_0^2) + \frac{1}{2} \frac{M}{F_{\text{пряд}}} (v^2 - 2v_0 v + v_0^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{M}{F_{\text{пряд}}} (v^2 - v_0^2), \end{aligned} \quad (5)$$

откуда

$$\boxed{\frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = F_{\text{пряд}} \cdot (x - x_0).} \quad (6)$$

Если величину  $\frac{1}{2} Mv^2$  мы назовем *кинетической энергией* частицы, то левая часть (6) будет представлять собой изменение кинетической энергии. Это изменение вызывается силой  $F_{\text{пряд}}$  на пути  $(x - x_0)$ . Очевидно, мы можем теперь дать определение работе, назвав произведение  $F_{\text{пряд}} \cdot (x - x_0)$  *работой, совершаемой силой, приложенной к частице*. Из этих определений и из уравнения (6) следует, что работа, совершаемая приложенной силой, равна изменению кинетической энергии частицы. Все это относится к области определений. Однако подобные определения полезны, и они согласуются со вторым законом Ньютона. Говоря о работе, всегда следует помнить, что *работа совершается некоторой силой*.

Если  $M = 20$  г и  $v = 100$  см/сек, то кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}^2 = 1 \cdot 10^5 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}^2 = 1 \cdot 10^5 \text{ эрг}. \quad (7)$$

Эрг представляет собой единицу энергии в системе единиц СГС. Если сила в 100 дин действует на пути в  $10^3$  см, то

$$F_{\text{пряд}} \cdot (x - x_0) = 10^3 \text{ дин} \cdot 10^3 \text{ см} = 10^6 \text{ дин} \cdot \text{см} = 10^5 \text{ эрг}. \quad (8)$$

Один эрг равен работе, совершаемой силой в одну дину, действующей на пути в один сантиметр. Работа имеет размерность  
 $[работа] \sim [сила] \cdot [расстояние] \sim [масса] \cdot [ускорение] \cdot [расстояние] \sim$   
 $\sim \left[ M \frac{L}{T^2} L \right] \sim [ML^2T^{-2}] \sim [энергия].$

В системе МКС единицей работы является джоуль, равный работе, совершаемой силой в один ньютон, действующей на пути в один метр. Для того чтобы перевести джоули в эрги, нужно величину работы, выраженной в джоулях, умножить на  $10^7$ . Для того чтобы перевести ньютон в дин, нужно величину силы, выраженной в ньютон, умножить на  $10^5$ .

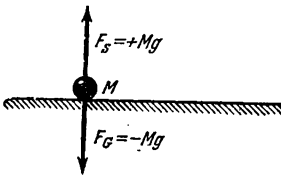


Рис. 5.1. К массе  $M$ , находящейся в состоянии покоя на поверхности земли, приложены две равные по величине и противоположно направленные силы:  $F_G$ —сила тяжести, притягивающая тело к земле, и  $F_S$ —сила, оказывающая давление на тело со стороны поверхности земли.

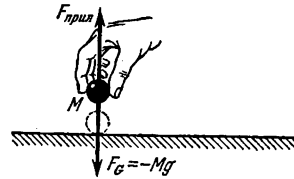


Рис. 5.2. Для того чтобы поднять массу  $M$  с постоянной скоростью, нужно приложить силу  $F_{\text{прил}} = +Mg$ .

Предположим теперь, что частица или какое-нибудь тело находится не в межгалактическом пространстве, а на высоте  $h$  от поверхности земли ( $x_0=h$ ,  $v_0=0$ ). Тогда на это тело действует по направлению к земле сила тяжести  $F_G = -Mg$ . Под действием этой силы тело падает по направлению к поверхности земли. Работа, совершаемая силой тяжести, равна приращению кинетической энергии тела:

$$W = F_G \cdot (x - x_0), \quad (9)$$

или на поверхности земли ( $x=0$ ):

$$W = (-Mg)(0 - h) = Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv^2, \quad (10)$$

где  $v$  — скорость, приобретаемая телом, достигшим поверхности земли, и  $v_0$  — начальная скорость (в этом частном случае  $v_0=0$ ). На основании уравнения (10) мы можем сказать, что на высоте  $h$  тело обладает *потенциальной энергией*, равной  $Mgh$  (т. е. возможностью совершить работу или приобрести кинетическую энергию), относительно поверхности земли.

Что произойдет с потенциальной энергией, когда частица из состояния покоя на поверхности земли (рис. 5.1) поднимется на высоту  $h$ ? Для того чтобы тело поднялось на какую-то высоту, мы должны приложить к нему силу  $F_{\text{прил}} (= -F_G)$ , направленную



вверх (рис. 5.2). В этом случае  $x_0=0$ . При этом мы совершаем над телом работу, равную

$$W = F_{\text{прил}} \cdot (x - x_0) = (Mg)(h) = Mgh, \quad (11)$$

и сообщаем этому телу потенциальную энергию  $Mgh$ , которой, как было указано ранее, оно обладает на высоте  $h$  (рис. 5.3).

Заметим, что работа, совершаемая силой тяжести над падающим телом и выражаемая соотношением (10), равна работе, которую мы совершаем против силы тяжести, поднимая тело вверх. Эта работа выражается соотношением (11).

Размерность потенциальной энергии совпадает с размерностью кинетической энергии:

$$[F] \cdot [L] = [M] \cdot [L^2]/[T^2].$$

Если  $F_{\text{прил}} = 10^3$  дин и  $h = 10^2$  см, то потенциальная энергия будет равна  $10^3$  дин  $\cdot$   $10^2$  см =  $10^5$  дин  $\cdot$  см =  $10^5$  эрг. Мы будем обозначать потенциальную энергию символом  $U$ .

Из уравнения (10) видно, что потенциальная энергия  $Mgh$  может полностью превращаться в кинетическую энергию. Мы должны всегда указывать ту точку, к которой относится потенциальная энергия. Величина потенциальной энергии введена с «бухгалтерской» целью, т. е. для учета; в этом примере

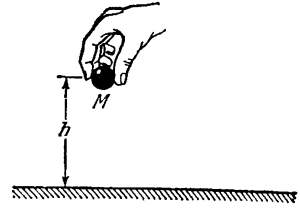


Рис. 5.3. Работа, которую нужно совершить, чтобы поднять массу  $M$  на высоту  $h$ , равна  $W = F_{\text{прил}} \cdot h = +Mgh$ . При этом потенциальная энергия  $U$  массы  $M$  увеличивается на величину  $Mgh$ .

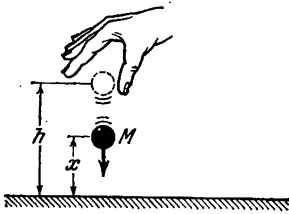


Рис. 5.4. Если отпустить шарик массы  $M$ , то потенциальная энергия  $U$  уменьшится, а кинетическая энергия  $K$  увеличится, но их сумма останется постоянной. На высоте  $x$   $U(x) = Mgx$  и

$$K(x) = \frac{1}{2} Mv^2 = Mg(h - x).$$

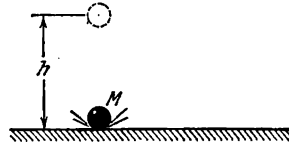


Рис. 5.5. Непосредственно перед тем, как шарик ударится о поверхность, вся потенциальная энергия, которой он обладал на высоте  $h$ , превратится в кинетическую энергию.

мы показали, что наша «бухгалтерия» не приводит к противоречиям. Изменение потенциальной энергии имеет определенный физический смысл и показывает нам, какая ее часть переходит в кинетическую энергию.

Если из (10) мы будем определять скорость  $v$ , причем не ту, которая приобретается при падении с высоты  $h$ , а скорость, приобретенную при падении с высоты  $(h-x)$  (рис. 5.4), то по аналогии

с уравнением (10) мы можем написать

$$\frac{1}{2} Mv^2 = Mg(h-x), \quad (12)$$

или

$$\frac{1}{2} Mv^2 + Mgx = Mgh = E, \quad (13)$$

где  $E$  — постоянная величина, равная  $Mgh$ . Так как  $E$  представляет собой постоянную величину, то уравнение (13) выражает закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} E = K + U = \\ = \text{кинетическая энергия} + \text{потенциальная энергия} = \text{const} = \\ = \text{полная энергия.} \end{aligned}$$

В соотношении (13) член  $Mgx$  представляет собой потенциальную энергию, обращающуюся в нуль при  $x=0$ . Величина  $E$  означает полную энергию, которая для изолированной системы сохраняет постоянное значение во времени.

Иногда удобно называть величину  $E=K+U$ , т. е. сумму кинетической и потенциальной энергии, функцией энергии. Кинетическая энергия  $K$  равна  $\frac{1}{2}Mv^2$ . Потенциальная энергия зависит от действующей силы. Потенциальная энергия обладает весьма важным свойством, выражающимся в том, что  $-\int F dx = U$ , или

$$F = -\frac{dU}{dx}, \quad (14)$$

где  $F$  — сила, действующая на частицу и являющаяся результатом внутренних взаимодействий, таких, как электрические или гравитационные взаимодействия. (В рассмотренном выше примере  $U = Mgx$  и  $F = F_G = -Mg$ .)

Перейдем теперь к более детальному и общему рассмотрению всех этих понятий.

### 5.3. Сохранение энергии

Закон сохранения энергии утверждает, что для системы частиц, взаимодействие между которыми неявно \*) зависит от времени, полная энергия системы постоянна. Этот результат мы считаем достоверно установленным экспериментальным фактом. Если выражаться точнее, то этот закон говорит нам о том, что существует некоторая скалярная функция [такая, как функция  $\frac{1}{2}Mv^2 + Mgx$  в (13)] положения и скорости частиц, которая не изменяется со временем при условии, что в течение рассматриваемого промежутка времени внешнее взаимодействие явно не изменяется. Например, элементарный заряд  $e$  не должен изменяться со временем. Помимо

\*) Рассматриваемая система состоит из частиц, как бы застывших на месте; тогда про силу, зависящую от времени, говорят, что такая сила я в н о зависит от времени.

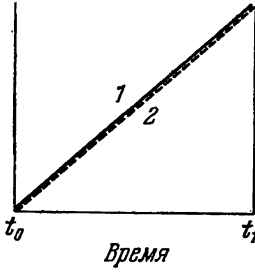
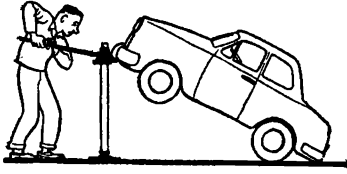


Рис. 5.6. Зависимость работы, производимой студентом при поднятии автомобиля домкратом для смены шины, от времени. (Работа, необходимая для поднятия небольшого автомобиля массой в 1000 кг на высоту 10 см равна  $F = Mgh \cong (10^3 \cdot 10^3 \text{ э}) \cdot (10^3 \text{ см/сек}^2) \times (10 \text{ см}) = 10^{10} \text{ эрг.}$ ) При этом работа переходит в потенциальную энергию сил тяжести.

1 — работа, производимая студентом; 2 — потенциальная энергия (гравитационная).

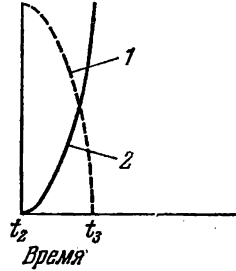
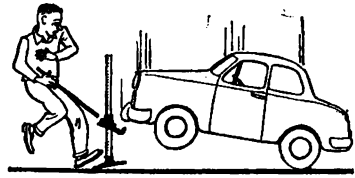


Рис. 5.7. Домкрат соскочил, и автомобиль падает вниз. Потенциальная энергия превращается в кинетическую энергию. После того, как автомобиль коснулся земли, кинетическая энергия превратилась в тепло в амортизаторах, пружинах и шинах.

1 — потенциальная энергия (гравитационная); 2 — кинетическая энергия.

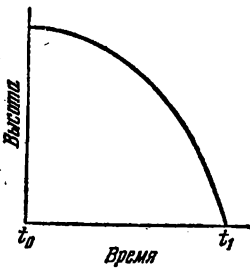


Рис. 5.8. Зависимость высоты от времени для тела, падающего на землю.

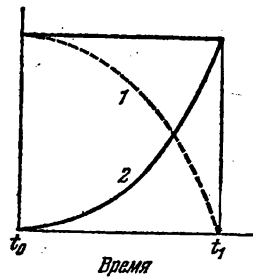


Рис. 5.9. Зависимость потенциальной и кинетической энергии от времени. Полная энергия представляет собой постоянную величину, равную сумме кинетической и потенциальной энергии.

1 — потенциальная энергия; 2 — кинетическая энергия.

функции энергии существуют также и другие функции, которые сохраняют постоянное значение в условиях, о которых только что было сказано. (Другие такие функции мы рассмотрим в гл. 6, в которой речь пойдет о сохранении импульса и момента импульса.) Энергия представляет собой скалярную величину, сохраняющую постоянное значение при движении. Когда мы говорим о внешнем взаимодействии, то имеем в виду, что в течение рассматриваемого промежутка времени физические законы и значения основных физических постоянных (таких, как  $g$ ,  $e$  или  $m$ ) не изменяются.

Отметим еще раз, что законы сохранения сами по себе не дают нам никакой новой информации по сравнению с той, которая может быть получена из уравнения движения  $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ .

Основная задача состоит в том, чтобы найти такое выражение для функции энергии, которое бы не зависело от времени и которое бы находилось в согласии с уравнением  $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ . Так, например, выражение

$$\frac{d}{dx} E \equiv \frac{d}{dx} (K + U) = \frac{dK}{dx} - F_x = 0$$

аналогично соотношению  $F_x = Ma_x$ . Это можно проверить, воспользовавшись (13), откуда следует, что

$$Mg = Mv \frac{dv}{dx} \equiv M \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} \equiv M \frac{dv}{dt}.$$

Это — фундаментальная задача классической механики, и ее правильное решение может быть получено несколькими способами, некоторые из которых весьма изящны. Так, в частности, формулировка задач механики с помощью функции Гамильтона (гамильтониан) позволяет интерпретировать их на языке квантовой механики. Однако в начале курса нам нужнее простое и непосредственное изложение, чем общность гамильтоновых и лагранжевых формулировок, обычно излагаемых в более поздних курсах \*).

*Работа.* Мы определяем работу  $W$ , совершаемую постоянной силой  $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ , приложенной к частице на пути  $\Delta \mathbf{r}$ , как произведение

$$W = \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot \Delta \mathbf{r} = F \Delta r \cos(\mathbf{F}_{\text{прил}}, \Delta \mathbf{r}), \quad (15)$$

согласно определению, которое было дано выше соотношением (6). Для удобства в двух следующих параграфах вместо  $\mathbf{F}_{\text{прил}}$  мы будем писать просто  $\mathbf{f}$ .

Предположим, что  $\mathbf{f}$  не постоянна, а зависит от  $\mathbf{r}$ , т. е. является функцией положения  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ . Если весь путь может быть разбит на  $N$  прямолинейных отрезков и в пределах каждого такого отрезка силу  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  можно считать постоянной, то мы можем написать

$$W = \mathbf{f}(\mathbf{r}_1) \cdot \Delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{f}(\mathbf{r}_2) \cdot \Delta \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{f}(\mathbf{r}_N) \cdot \Delta \mathbf{r}_N \equiv \sum_{j=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j, \quad (16)$$

\*) Решение лагранжевых уравнений движения требует знакомства с некоторыми основными выводами вариационного исчисления; поэтому сейчас мы не будем заниматься этим вопросом.

где символ  $\sum$  означает суммирование по всем отрезкам. Это соотношение выполняется строго лишь в пределе, для бесконечно малых перемещений  $d\mathbf{r}$ , так как криволинейный путь не может быть разбит на конечное число прямолинейных отрезков. Предел

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum f(r_j) \cdot \Delta r_j = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{f}(r) \cdot d\mathbf{r} \quad (17)$$

представляет собой интеграл от проекции  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  на направление внутри перемещения  $d\mathbf{r}$ . Этот интеграл называется *линейным интегралом функции  $\mathbf{f}$*  от точки  $A$  до точки  $B$ . Работа, совершаемая приложенной силой на всем перемещении, определяется соотношением

$$W(A \rightarrow B) \equiv \int_A^B \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (18)$$

#### 5.4. Кинетическая энергия

Вернемся теперь к свободной частице в межгалактическом пространстве. Напишем уравнение (6)

$$\frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = F_{\text{прил}} \cdot (x - x_0)$$

в более общей форме, включив в него приложенную силу, изменяющуюся по направлению и по величине. Подставив в (18) вместо  $\mathbf{F}_{\text{прил}}$  ее значение  $\mathbf{F}_{\text{прил}} = M\dot{\mathbf{v}}$ , получим следующее выражение для работы, совершаемой приложенной силой:

$$W(A \rightarrow B) = M \int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}. \quad (19)$$

Далее, так как

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{v} dt, \quad (20)$$

находим, что

$$W(A \rightarrow B) = M \int_A^B \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt. \quad (21)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}, \quad (22)$$

получим

$$2 \int_A^B \left( \frac{dv}{dt} \cdot v \right) dt = \int_A^B \frac{d}{dt} (v^2) dt = \int_A^B d(v^2) = v_B^2 - v_A^2. \quad (23)$$

Подставляя это выражение в (21), приходим к следующему важному результату для свободной частицы:

$$W(A \rightarrow B) = \int_A^B F_{\text{прил}} \cdot dr = \frac{1}{2} M v_B^2 - \frac{1}{2} M v_A^2. \quad (24)$$

Это уравнение представляет собой обобщение уравнения (6). Величину

$$K \equiv \frac{1}{2} M v^2 \quad (25)$$

мы будем называть *кинетической энергией* и обозначать символом  $K$ . Из (24) мы видим, что наши определения работы и кинетической энергии обладают тем свойством, что *работа, совершаемая над свободной частицей произвольной приложенной силой, равна изменению кинетической энергии частицы*:

$$W(A \rightarrow B) = K_B - K_A. \quad (25a)$$

**Пример. Свободное падение.** а) Если ось  $x$  направлена перпендикулярно к поверхности земли вверх, то сила тяжести  $F_G = -Mg\hat{x}$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести, равное приблизительно  $980 \text{ см/сек}^2$ . Вычислим работу, совершаемую силой тяжести при падении массы в  $100 \text{ г}$  с высоты  $10 \text{ см}$ .

В этом случае

$$r_A = 0, \quad r_B = -10\hat{x}, \quad \Delta r = r_B - r_A = -10\hat{x}.$$

Из (15) следует, что работа, совершаемая силой тяжести, равна

$$W = F_G \cdot \Delta r = (-Mg\hat{x}) \cdot (-10\hat{x}) \approx (10^2)(10^3)(10)\hat{x} \cdot \hat{x} \approx 10^6 \text{ эрг}.$$

В этом примере сила тяжести играет роль силы  $F_{\text{прил}}$ .

б) Если частица, о которой шла речь в а), первоначально находилась в покое, то чему будут равны ее кинетическая энергия и скорость в конце десятого сантиметра пути падения?

Начальное значение кинетической энергии  $K_A = 0$ . Конечное значение  $K_B$ , в соответствии с (25a), равно работе, совершаемой силой тяжести над частицей:

$$K_B = \frac{1}{2} M v_B^2 \approx 10^6 \text{ эрг}, \quad (26)$$

откуда для  $v_B^2$  находим  $v_B^2 \approx 2 \cdot 10^6 \text{ эрг}/100 \text{ г} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}^2$ . Этот результат совпадает с тем, который мы получим, если восполь-

зуется элементарным соотношением  $v^2 = 2gh$ , в котором ускорение постоянно и начальная скорость равна нулю:

$$v^2 = 2 \cdot 10^3 \text{ см/сек}^2 \cdot 10 \text{ см} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}^2.$$

Это совпадение может иллюстрировать высказанную выше идею о том, что результаты, полученные с помощью закона сохранения, должны совпадать с выводами, получаемыми из уравнений движения. В рассмотренном случае, применяя закон сохранения

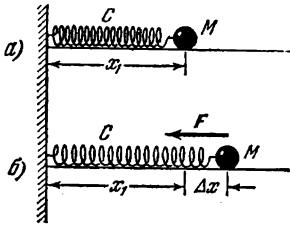


Рис. 5.10. Невесомая пружина связана с массой  $M$ . Если пружина растянута на малую величину  $\Delta x$ , то возникает восстанавливающаяся сила  $F = -C \Delta x$ , действующая на массу  $M$  в направлении, показанном стрелкой. Здесь  $C$  означает силовую постоянную пружины.  
а) Пружина в равновесии. б) Пружина растянута.

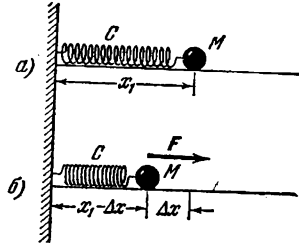


Рис. 5.11. Если пружина сжата на величину  $-\Delta x$ , то в ней возникает восстанавливающаяся сила  $-C(-\Delta x) = C \Delta x$ , действующая на массу  $M$  в направлении, указанном стрелкой.  
а) Пружина в равновесии. б) Пружина сжата.

энергии, мы получим тот же результат, что и при использовании соотношения  $v^2 = 2gh$ , получаемого из уравнения движения  $F = Ma$ .

**Пример. Линейная восстанавливающая сила.** Предположим, что на частицу действует линейная восстанавливающая сила в направлении оси  $x$ . Линейной восстанавливающей силой мы будем называть силу, прямо пропорциональную величине смещения, измеряемого от некоторой фиксированной точки, и действующую в направлении уменьшения смещения. Если мы примем эту фиксированную точку за начало, то

$$F = -Cx, \text{ или } F_x = -Cx, \quad (27)$$

где  $C$  — некоторая положительная величина, называемая *силовой постоянной*. Это соотношение выражает закон Гука. Для достаточно малых смещений  $\Delta x$  такая сила может возникнуть в растянутой или сжатой пружине (рис. 5.10—5.12). Для больших упругих смещений мы должны добавить в (27) члены, содержащие более высокие степени  $x$ , как это будет сделано в гл. 7. Знак силы должен быть таким, чтобы частица всегда притягивалась к точке, принятой за начало отсчета ( $x=0$ ).

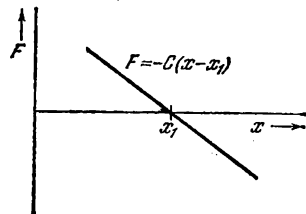


Рис. 5.12. Восстанавливающая сила в пределах малых смещений от  $x_1$  пропорциональна величине смещения.

1) Пусть к частице, прикрепленной к пружине, приложена внешняя сила, которая перемещает эту частицу из точки с координатой  $x_1$  в точку с координатой  $x_2$ . Чему равна работа, совершаемая силой, приложенной к частице на этом пути?

В этом случае сила, действующая на частицу, является функцией положения. Для того чтобы вычислить работу, совершаемую приложенной силой, мы используем определение, содержащееся в соотношении (18) для  $F_{\text{прил}} = -F = +Cx\hat{x}$ :

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{прил}} \cdot dr = C \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} C (x_2^2 - x_1^2). \quad (28)$$

(Здесь  $F_{\text{прил}}$  представляет собой силу, приложенную кем-то против силы самой пружины, а не ту силу, с которой сама пружина действует на массу. Масса не приобретает кинетическую энергию, если

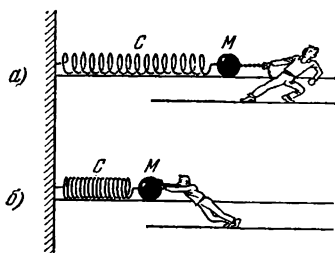


Рис. 5.13. Для того чтобы растянуть (а) или сжать (б) пружину, вы должны приложить силу в направлении, противоположном направлению действия восстанавливающей силы. При смещении пружины из положения равновесия  $x_1$  на величину  $\Delta x$  вы совершаете работу

$$W = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} C(x - x_1) dx = \frac{1}{2} C (\Delta x)^2.$$

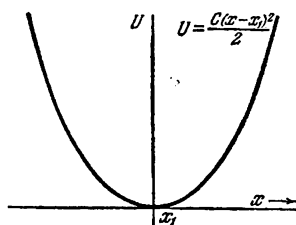


Рис. 5.14. Совершая работу, вы увеличиваете потенциальную энергию системы пружина — масса. Эта система, смещаясь из положения равновесия на величину  $\Delta x = x - x_1$  приобретает потенциальную энергию

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} C (x - x_1)^2.$$

на нее действуют две равные и противоположно направленные силы.) Если принять начальную точку с координатой  $x_1$  за начало отсчета и положить  $x_1 = 0$ , то из (28) следует, что

$$W(x_{\text{max}} \rightarrow 0) = \frac{1}{2} C x^2. \quad (29)$$

Это очень важный результат: работа, совершаемая над системой приложенной силой, пропорциональна квадрату смещения (рис. 5.13—5.16).

2) Частица массой  $M$  покоится в положении  $x_{\text{max}}$  и затем отпускается. Какова будет ее кинетическая энергия, когда она достигнет начала отсчета?



Мы получили ответ непосредственно из (24): работа, совершаемая пружиной при перемещении массы  $M$  из положения  $x_{\max}$  в положение, соответствующее началу отсчета, равна

$$W(x_{\max} \rightarrow 0) = \frac{1}{2} Mv_1^2, \quad (30)$$

так как при  $x=x_{\max}$   $v=0$ , потому что в этом положении мы считаем, что частица находится в состоянии покоя. Когда частица проходит

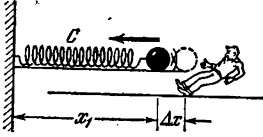


Рис. 5.15. Если система пружина — масса растянута на величину  $\Delta x$  и затем отпущена, то сначала  $U$  уменьшается, а  $K$  увеличивается.

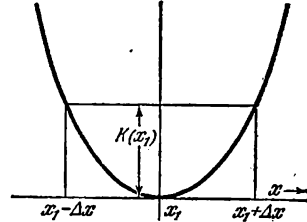


Рис. 5.16. При  $x=x_1$   $U=0$  и  $K(x_1) = \frac{1}{2} C (\Delta x)^2$ , как это показано на рисунке.

через начало отсчета, ее скорость  $v_1$  может быть найдена из соотношения

$$\frac{1}{2} Cx^2 = \frac{1}{2} Mv_1^2, \quad (31)$$

в котором правая часть представляет собой кинетическую энергию частицы в положении  $x=0$ .

3) Какова связь между скоростью частицы в начале отсчета и максимальным значением смещения  $x_{\max}$ ?

Из (31) находим

$$v_1^2 = \frac{C}{M} x_{\max}^2, \quad (32)$$

или

$$v_1 = \pm \sqrt{\frac{C}{M}} x_{\max}. \quad (33)$$

**Мощность.** Мощность  $P$  представляет собой скорость передачи энергии. Мы определили работу, совершаемую силой, приложенной к частице на пути  $\Delta r$  как произведение

$$\Delta W = F_{\text{прил}} \cdot \Delta r. \quad (34)$$

Скорость, с которой сила совершает работу, равна

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = F_{\text{прил}} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (35)$$

В пределе, при  $\Delta t \rightarrow 0$ , мы получаем для мощности

$$P = \frac{dW}{dt} = F_{\text{прил}} \cdot \frac{dr}{dt} = F_{\text{прил}} \cdot v. \quad (36)$$

Если мощность зависит от времени, т. е.  $P=P(t)$ , то работу можно выразить следующим образом:

$$W(t_1 \rightarrow t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt.$$

В системе СГС единицей мощности является эрг в секунду. В системе МКС единицей мощности является джоуль в секунду; эта единица называется *ваттом*. Для того чтобы найти мощность в эрг/сек, нужно мощность, выраженную в ваттах, умножить на  $10^7$ . Если же мощность дана в лошадиных силах, то для того, чтобы выразить ее в ваттах, нужно умножить число лошадиных сил приблизительно на 746.

**Консервативные силы.** Сила называется *консервативной*, если работа  $W(A \rightarrow B)$ , совершаемая силой при перемещении частицы

из  $A$  в  $B$ , не зависит от пути, по которому частица перемещается из  $A$  в  $B$ . Это иллюстрируется уравнением (24). Таким образом, так как  $W(A \rightarrow B) = -W(B \rightarrow A)$ , мы видим, что если частица движется по замкнутому пути, то работа, совершаемая консервативной силой, равна нулю.

Мы легко можем убедиться в том, что центральная сила является консервативной. Центральная сила, действующая между двумя частицами, представляет собой силу, величина которой зависит только от расстояния между частицами и направление которой совпадает с линией, соединяющей обе частицы. На рис. 5.17 центральная сила направлена от центра (или к центру), расположенного в точке  $O$ . На этом же рисунке изображены два пути 1 и 2, соединяющие точки  $A$  и  $B$ . Пунктирными линиями изображены дуги окружностей с центром в точке  $O$ . Рассмотрим величины  $(F_1 \cdot dr_1)$  и  $(F_2 \cdot dr_2)$  для отрезков путей, заключенных между пунктирными дугами окружностей. Как легко убедиться, произведение  $F \cdot dr = F dr \cos \theta$  равно проекции  $F$  на  $dr$  или  $dr$  на  $F$ . Величины  $F_1$  и  $F_2$  равны между собой на обоих отрезках путей, так как они расположены на одинаковых расстояниях от точки  $O$ ; проекции  $dr \cos \theta$  отрезков путей на соответствующие векторы  $F$  также равны, потому что расстояние между окружностями, измеренное по направлению  $F_1$ , равно расстоянию, измеренному по направлению  $F_2$ . Поэтому на рассматриваемых отрезках путей

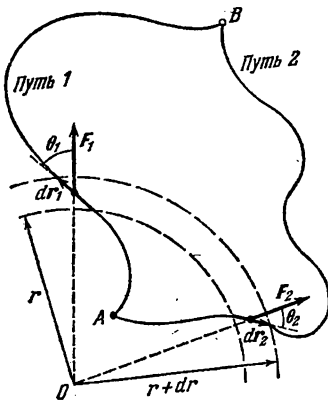


Рис. 5.17.

Поэтому на рассматриваемых отрезках путей

$$(F_1 \cdot dr_1) = (F_2 \cdot dr_2). \quad (37)$$

Такое рассуждение может быть повторено для всех сравниваемых между собой отрезков обоих путей, и поэтому

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (38)$$

По пути 1      По пути 2

Силы, для которых

$$W(A \rightarrow B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (39)$$

не зависит от пути, называются *консервативными силами*. Для консервативных сил работа по замкнутому пути равна нулю.

Предположим, что сила зависит от скорости, с которой проходит путь (например, сила, с которой магнитное поле действует на заряженную частицу, зависит от скорости). Может ли такая сила считаться консервативной? Из сказанного выше следует, что все наиболее важные основные силы, зависящие от скорости, являются консервативными, так как их направление *перпендикулярно* направлению движения частицы и поэтому произведение  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  равно нулю. Вы можете убедиться в этом на примере силы Лоренца (см. гл. 4), которая пропорциональна произведению  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . В то же время силы трения, не относящиеся к числу основных сил, хотя и зависят от скорости, но не являются консервативными.

Все наше обсуждение предполагает, что речь идет о *силах, действующих между двумя телами*. Это очень важное предположение; между тем студентам, изучающим этот курс, в их дальнейшей исследовательской работе придется иметь дело с силами, действующими между несколькими телами. Рассмотрение этого вопроса, включающее и случай двух тел, приводится во втором томе.

Из опыта мы знаем, что работа  $W(A \rightarrow B)$  не зависит от пути для гравитационных и электростатических сил. Такой результат, в частности, получен для сил взаимодействия между элементарными частицами из опытов по их рассеянию; для гравитационных сил этот результат вытекает из возможности правильного предсказания движения планет и Луны, о чем рассказывается в разделе «Из истории физики». Мы знаем также, что Земля совершила около  $4 \cdot 10^9$  полных оборотов вокруг Солнца без сколько-нибудь заметного изменения расстояния до него. Постоянство этого расстояния доказывается геологическими данными о температуре поверхности Земли. По этим геологическим данным возраст Земли оценивается приблизительно в  $10^9$  лет. Однако эти данные не могут считаться достаточно надежными, потому что многочисленные факторы, и в том числе выбросы вещества на Солнце, оказывают влияние на температуру Земли. Дальнейшие примеры рассматриваются в разделе «Из истории физики» в конце главы.

Рассмотрим более подробно вопрос о центральных и нецентральных силах. При рассмотрении сил, действующих между двумя частицами, следует различать две возможности: 1) частицы обладают

только теми координатами, которые определяют их положение; 2) одна или обе частицы обладают физическими осями вращения. В первом случае речь может идти только о центральной силе, тогда как во втором случае, если мы говорим: частица движется от  $A$  к  $B$  — этого, однако, недостаточно и мы должны еще указать, что ось закреплена относительно чего-то в том же направлении. Магнит в виде стержня обладает физически различимой осью: если мы будем двигать целиком весь магнит по замкнутому пути в однородном магнитном поле, то, перемещая магнит, мы или совершим определенную работу, или не совершим ее совсем. Если расположение магнита и ориентировка в начале и в конце будут одинаковы, то никакой работы мы не совершим. Если же расположение будет тем же самым, но ориентировка другой, то будет совершена определенная работа (при этом работа может иметь как положительный, так и отрицательный знак).

Силы трения, строго говоря, не являются консервативными. Два тела могут испытать неупругое столкновение, при котором их кинетическая энергия рассеивается в этих телах и превращается в тепло.

Само собой разумеется, что в том случае, когда основные силы консервативны, то и все движения должны быть консервативны, если только проанализировать их достаточно детально. Поэтому учет трения — это, в сущности, бухгалтерский учет: если какая-то часть энергии уходит в бесполезной для нас форме, то мы можем назвать это трением. При обсуждении в гл. 3 закона сохранения импульса мы рассмотрели неупругое столкновение двух частиц. При этом кинетическая энергия не сохраняла постоянного значения; но мы допустили, что сумма кинетической энергии и внутренней энергии обеих частиц, которую мы называли полной энергией, сохраняла постоянное значение, что соответствует всем известным нам экспериментальным фактам.

## 5.5. Потенциальная энергия

Мы видели, что с помощью соответствующим образом приложенной силы  $F_{\text{прил}}$  можно уравновесить любые другие силы (например, силу тяжести), действующие на частицу, так, чтобы в этом процессе частицы не приобретали бы кинетическую энергию.

Как уже было сказано, в таких случаях работа, совершаемая при перемещении частицы, переходит в ее потенциальную энергию. Мы, например, принимаем, что разность потенциальных энергий частицы в точках  $B$  и  $A$  равна работе, совершаемой приложенной силой над этой частицей при ее перемещении из  $A$  в  $B$ :

$$U(B) - U(A) = W(A \rightarrow B) = \int_A^B F_{\text{прил}} \cdot dr. \quad (40)$$

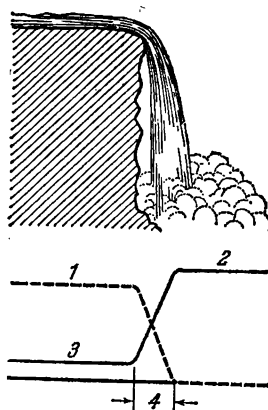


Рис. 5.18. Вода на вершине водопада обладает потенциальной энергией, которая при падении воды превращается в кинетическую энергию. Масса  $M$  воды, падая с высоты  $h$ , теряет потенциальную энергию  $Mgh$  и приобретает кинетическую энергию  $\frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2) = Mgh$ ; если известна начальная скорость  $v_0$  воды, то скорость  $v$  определяется этим уравнением. Кинетическая энергия падающей воды может быть превращена на электростанции в кинетическую энергию вращающейся турбины; кроме того, кинетическая энергия падающей воды у подножья водопада превращается в тепло. Тепловая энергия представляет собой попросту энергию беспорядочного движения молекул воды. (При высокой температуре беспорядочное движение молекул более энергично, чем при низкой температуре.)

1 — потенциальная энергия; 2 — поток плюс тепловое движение (тепло); 3 — кинетическая энергия; 4 — область падающей воды.

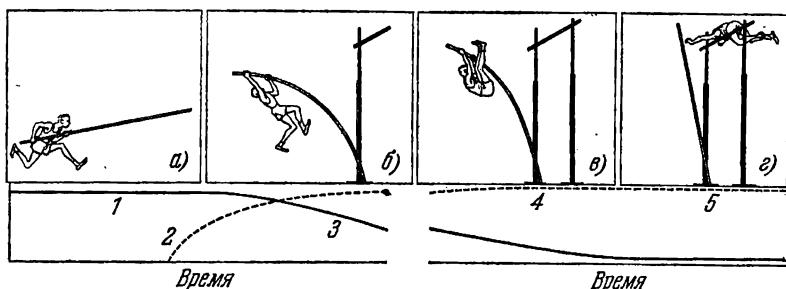


Рис. 5.19. Движение прыгуна с шестом. В положении *а*) вся энергия представляет собой кинетическую энергию, зависящую от скорости, с которой бегун бежит. В положении *б*) прыгун опирает передний конец шеста о землю и (в особенности, если шест сделан из стеклянного волокна) запасает упругую потенциальную энергию в шесте, изгибая его. В положении *в*) прыгун поднимается в воздух; его кинетическая энергия переходит в энергию вращательного движения вокруг нижнего конца шеста. Прыгун обладает потенциальной энергией как за счет силы тяжести, так и за счет оставшейся упругой энергии шеста. В положении *г*), когда прыгун находится над планкой, его кинетическая энергия мала, так как он движется медленно, его потенциальная энергия (гравитационная), наоборот, велика. Полная энергия прыгуна с шестом не всегда остается постоянной, потому что часть энергии расходуется на преодоление трения (внешнего и мускульного), а также на работу, совершаемую прыгуном при изгибе шеста.

1 — кинетическая энергия бегущего прыгуна; 2 — упругая энергия изогнутого шеста; 3 — кинетическая энергия вращающегося прыгуна; 4 — потенциальная энергия; 5 — гравитационная энергия.

Здесь мы исходим из допущения, что силы консервативны; при этом  $U(\mathbf{r})$  будет однозначной функцией \*) положения, а разность  $U(\mathbf{B}) - U(\mathbf{A})$  будет равна увеличению кинетической энергии частицы при возвращении из  $\mathbf{B}$  в  $\mathbf{A}$  по прекращении действия приложенной силы.

Фиксируя значение  $U$  в некоторой точке, например в  $\mathbf{A}$ , можно, исходя из соотношения (40), определить  $U(\mathbf{r})$  в любой другой точке по формуле

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{A}) + \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (41)$$

Значение постоянной  $U(\mathbf{A})$  не определено, так что (41) определяет  $U(\mathbf{r})$  только с точностью до постоянной, которую мы можем выбрать произвольно по нашему усмотрению. Физический смысл имеет только разность  $U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{A})$  потенциальных энергий между двумя точками  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{A}$ . Во многих задачах  $\mathbf{A}$  выбирается на бесконечно большом расстоянии и значение  $U(\infty)$  принимается равным нулю. Тогда

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r} = W(\infty \rightarrow \mathbf{r}). \quad (42)$$

При этом условии потенциальная энергия в точке, определяемой вектором  $\mathbf{r}$ , равна работе, совершаемой приложенной силой при перемещении частицы из бесконечности в эту точку.

Мы ввели здесь приложенную силу  $\mathbf{F}_{\text{прил}}$  из педагогических соображений: для того чтобы иметь возможность перемещать частицу из одной точки  $\mathbf{A}$  в другую точку  $\mathbf{B}$  таким образом, чтобы эта частица не приобретала кинетическую энергию. Если частица взаимодействует с окружающей средой и испытывает действие других сил (например, гравитационных или электростатических), мы можем обозначить эти внутренние силы, или силы взаимодействия, через  $\mathbf{F}_{\text{внутр}}$  или просто  $\mathbf{F}$ . Мы определяем силу  $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ , которую мы прилагаем, так, чтобы она в точности уравновешивала внутреннюю силу  $\mathbf{F}$ , т. е.

$$\mathbf{F}_{\text{прил}} = - \mathbf{F}_{\text{внутр}}. \quad (43)$$

---

\*) Функция  $f(x)$  называется однозначной, если каждому значению  $x$  соответствует одно и только одно значение  $f(x)$ . Например,  $\sin x$  является однозначной функцией  $x$ , но функция  $\arcsin x$  представляет собой неоднозначную функцию.

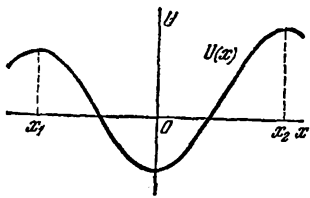


Рис. 5.20. График зависимости потенциальной энергии  $U$  от координаты  $x$  (одномерный случай). В точках  $x=x_1, 0$  и  $x_2$  мы видим, что  $dU/dx=0$ , и поэтому в этих точках сила обращается в нуль. Эти точки соответствуют положениям равновесия, и при этом не обязательно устойчивого

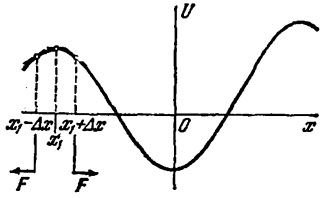


Рис. 5.21. В точке  $x_1 - \Delta x$ :  $dU/dx > 0$ , а следовательно,  $F < 0$  (слева от горба). В точке  $x_1 + \Delta x$ :  $dU/dx < 0$  и потому  $F > 0$  (справа от горба). Поэтому малое смещение от точки  $x_1$  приводит к появлению силы, увеличивающей величину смещения. Точка  $x_1$  соответствует положению *неустойчивого* равновесия.

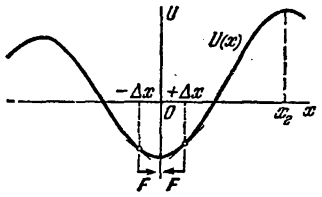


Рис. 5.22. В точке  $x=-\Delta x$ :  $dU/dx < 0$  и сила  $F$  направлена направо. Если  $x=+\Delta x$ , то  $dU/dx > 0$  и сила направлена налево. Поэтому точка  $x=0$  соответствует положению *устойчивого* равновесия. Что можно сказать о точке  $x_1$ ?

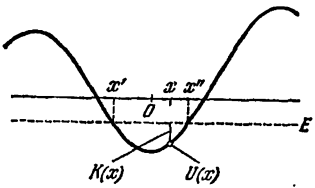


Рис. 5.23. Полная энергия  $E=K+U = \text{const}$ . Поэтому при данном значении полной энергии  $E$  движение может происходить только между точками  $x'$  и  $x''$ , каждая из которых является «поворотной точкой». Между этими точками  $K = \frac{1}{2} Mv^2 = E - U \geq 0$ .

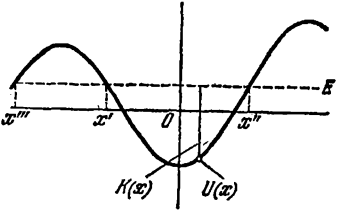


Рис. 5.24. Если  $E$  увеличивается, то «поворотные точки»  $x'$  и  $x''$ , вообще говоря, изменяются. При этом  $K(x) = E - U(x)$  тоже увеличивается. Движение может происходить также и левее точки  $x'''$ .

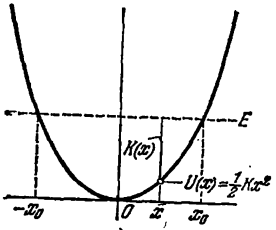


Рис. 5.25. Простой гармонический осциллятор находится в устойчивом равновесии при  $x=0$ . При  $x=\pm x_0$   $K=0$ .

После этого (41) и (42) можно переписать в таком виде:

$$U(r) = U(A) - \int_A^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (44)$$

$$\boxed{U(r) = \int_r^\infty \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.} \quad (44a)$$

Очень важно знать, идет ли речь о силе  $\mathbf{F}$ , которая задана условиями задачи, или о силе  $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ , которая введена соотношением (42) только для того, чтобы определить потенциальную энергию. В (44a) мы определили потенциальную энергию, используя понятие только силы  $\mathbf{F}$ .

Для случая одного измерения

$$U(x) - U(A) = - \int_A^x F dx, \quad (45)$$

откуда после дифференцирования получаем

$$\boxed{\frac{dU}{dx} = -F.} \quad (46)$$

Этот результат может быть проверен, если (46) подставить в (45):

$$- \int_A^x F dx = \int_A^x \frac{dU}{dx} dx = \int_A^x dU = U(x) - U(A). \quad (47)$$

Соотношение (46) является частным случаем общего вывода о том, что сила равна взятой со знаком минус производной от потенциальной энергии по координате. Для трехмерного случая выражение, аналогичное (46), будет иметь вид \*)

$$\mathbf{F} = - \hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z} \equiv -\text{grad } U, \quad (48)$$

---

\*) Производные, в которых фигурирует знак  $\partial$  вместо  $d$  [как, например, в (48) или (49)], называются частными производными. Если у нас имеется функция  $f(x_1, x_2, \dots)$  двух или большего числа независимых переменных  $x_1, x_2, \dots$  и мы хотим дифференцировать функцию по одной из этих переменных при условии, что остальные переменные остаются постоянными, то такая операция называется вычислением частной производной.

Таким образом,

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y, z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x}$$

Индексы  $y, z$  означают, что при этой операции  $y$  и  $z$  сохраняются постоянными.



где символ  $\text{grad}$  означает оператор градиента, который в декартовых координатах записывается следующим образом:

$$\text{grad} \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (49)$$

Общие свойства оператора градиента рассматриваются во втором томе. Там показано, что градиент скалярной величины представляет собой вектор, направление которого совпадает с направлением наибольшего увеличения скалярной функции, а величина равна скорости изменения этой функции. Градиент скалярной величины записывается различным образом:  $\text{grad } U$ ,  $\nabla U$  или  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ . Оператор  $\nabla$  читается «набла», а  $\nabla U$  читается «набла  $U$ ».

*Потенциальная энергия электрического поля.* Предположим, что в каждой точке пространства известна напряженность электрического поля. Предположим, далее, что это поле создается неподвижными электрическими зарядами, распределенными в пространстве.

В гл. 3 мы видели, что вектор  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  определялся как сила, действующая на единичный положительный заряд, находящийся в покое, и в соответствии с законом Кулона  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  можно вычислить из соотношения

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (50)$$

в котором суммирование проводится по всем зарядам. Заряд  $q_i$  находится в точке, определенной радиусом-вектором  $\mathbf{r}_i$ . Предположим, что мы переносим из бесконечности пробный заряд  $q$ . Сила, действующая на заряд  $q$  на расстоянии  $\mathbf{r}$ , равна

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (51)$$

Потенциальная энергия заряда  $q$  в поле всех других зарядов может быть найдена из соотношения (44а):

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = q \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (52)$$

В этой формуле мы поместили штрихом переменные под знаком интеграла для того, чтобы не было путаницы с точкой, определяемой вектором  $\mathbf{r}$ , в которой определяется потенциал.

*Электростатический потенциал  $\phi(\mathbf{r})$  в точке, определяемой вектором  $\mathbf{r}$ , измеряется потенциальной энергией, которой обладает единица положительного заряда:*

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q} = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (53)$$

Это очень полезная величина. Отметим прежде всего, что она является скаляром. Очень важно не путать потенциал  $\phi$  с потенциальной энергией  $U$ . Кроме того, при решении задач остерегайтесь

применять обозначение  $U$  для этих двух величин: электростатического потенциала и потенциальной энергии.

Если в любой точке пространства мы знаем напряженность поля  $E(\mathbf{r})$ , то мы можем найти также в любой точке пространства электростатический потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  (предполагается, что нам известны заряды, создающие поле). Заметим, что гораздо удобнее иметь дело с потенциалом  $\varphi(\mathbf{r})$ , являющимся скаляром, чем с напряженностью  $E(\mathbf{r})$ , представляющей собой векторную величину.

Падение напряжения, или *разность потенциалов* (р. п.), между двумя точками, определяемыми векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , выражается соотношением

$$\text{р. п.} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1). \quad (54)$$

Эта величина представляет собой изменение электростатической потенциальной энергии единицы положительного заряда при перемещении его из точки  $\mathbf{r}_1$  в точку  $\mathbf{r}_2$ . При перемещении из одной точки в другую заряда  $q$  разность потенциальных энергий будет равна

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = q[\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)]. \quad (54a)$$

Единицей электростатического потенциала (или разности потенциалов) в гауссовой системе единиц СГСЭ является *единица потенциала СГСЭ* (ед. СГСЭ<sub>v</sub>). В гл. 4 мы видели, что единицей напряженности электрического поля является ед. СГСЭ<sub>v/см</sub>, но так как размерность  $\varphi$  отличается от  $E$ , то  $\varphi$  измеряется в единицах СГСЭ<sub>v</sub>. Так как размерность  $\varphi$  равна [заряд/длина], то единица измерения потенциала равна ед. СГСЭ<sub>v/см</sub>.

*Практической* единицей электростатического потенциала (или разности потенциалов) является *вольт* (в). Эта единица используется в повседневной жизни и широко применяется в лабораторной практике. Вольт *определяется* следующим образом:

$$\left(\frac{c}{10^8}\right) \times \left(\frac{\text{разность потенциалов}}{\text{в ед. СГСЭ}_v}\right) = \left(\frac{\text{разность потенциалов}}{\text{в вольтах}}\right), \quad (54б)$$

где  $c$  — скорость света в см/сек. Приблизительно

$$(300) \times \left(\frac{\text{разность потенциалов}}{\text{в ед. СГСЭ}_v}\right) \cong \left(\frac{\text{разность потенциалов}}{\text{в вольтах}}\right). \quad (54в)$$

**Примеры.** *Электростатическое поле и потенциал; разность потенциалов; единица напряженности электрического поля в системе СГСЭ; вольты.*

а) Какова напряженность электрического поля на расстоянии 1 Å ( $10^{-8}$  см) от протона?

Из закона Кулона находим, что

$$E = \frac{e}{r^2} \cong \frac{5 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q}{(1 \cdot 10^{-8} \text{ см})^2} \cong 5 \cdot 10^6 \text{ ед. СГСЭ}_v/\text{см} \cong \\ \cong 300 \cdot (5 \cdot 10^6) \text{ в/см} \cong 1,5 \cdot 10^9 \text{ в/см.}$$

Поле направлено радиально от протона.

б) Чему равен электростатический потенциал на этом расстоянии?

Из (53), полагая при  $r = \infty$   $U = 0$ , находим

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{e}{r^2} dr = \frac{e}{r} \cong \frac{5 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q}{1 \cdot 10^{-8} \text{ см}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ ед. СГСЭ}_v = 15 \text{ в.}$$

в) Чему равна разность потенциалов (в  $\vartheta$ ) между точками, находящимися на расстоянии 1 Å и 0,2 Å от протона?

Потенциал на расстоянии  $1 \cdot 10^{-8}$  см равен 15 в; на расстоянии  $0,2 \cdot 10^{-8}$  см он равен 75 в. Разность потенциалов равна  $75 \text{ в} - 15 \text{ в} =$

$$= 60 \text{ в, или } \frac{60 \text{ ед. СГСЭ}_v}{300} = 0,2 \text{ ед. СГСЭ}_v.$$

г) Протон отталкивается от другого протона, находящегося от него на расстоянии 1 Å. Какова будет кинетическая энергия, когда протоны окажутся на бесконечно большом расстоянии друг от друга?

Из закона сохранения энергии мы знаем, что кинетическая энергия должна равняться первоначальной потенциальной энергии:

$$\frac{e^2}{r} \cong \frac{(4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q)^2}{1 \cdot 10^{-8} \text{ см}} \cong 23 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

Если один протон находится в покое, а другой движется, то его конечная скорость может быть найдена из соотношения (с применением закона сохранения энергии)

$$\frac{1}{2} Mv^2 \cong 23 \cdot 10^{-12} \text{ эрг, } v^2 \cong \frac{2 \cdot 23 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}}{1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г}} \cong 27 \cdot 10^{12} (\text{см/сек})^2,$$

откуда

$$v \cong 5 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$$

д) Протон ускоряется из состояния покоя однородным электрическим полем. Разность потенциалов, создающая поле, в котором движется протон, равна 100 в. Какова конечная кинетическая энергия протона? (Заметим, что  $100 \text{ в} = 0,33 \text{ ед. СГСЭ}_v$ .) Кинетическая энергия будет равна изменению потенциальной энергии  $e \Delta\varphi$ , т. е.

$$(4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q) \cdot (0,33 \text{ ед. СГСЭ}_v) \cong 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ эрг.}$$

**Пример. Электрон-вольты.** В атомной и ядерной физике удобной единицей энергии является электрон-вольт (эв). Один электрон-вольт равен разности потенциальных энергий заряда в двух точках, между которыми существует разность потенциалов 1 в. Таким образом,

$$1 \text{ эв} = (4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}_q) \cdot \left( \frac{1}{300} \text{ ед. СГСЭ}_v \right) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ эрг.}$$

Альфа-частица (ядро  $\text{He}^4$  или дважды ионизованный атом гелия), ускоренная из состояния покоя разностью потенциалов 1000 в, обладает кинетической энергией, равной

$$2e \cdot 1000 \text{ в} = 2000 \text{ эв},$$

где  $2000 \text{ эв} = (2 \cdot 10^3) \cdot (1,60 \cdot 10^{-12}) \text{ эрг} = 3,2 \cdot 10^{-9} \text{ эрг}$ .

Мы видели, что разность  $K_B - K_A$  кинетических энергий частицы для двух точек обладает тем свойством, что

$$K_B - K_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (55)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на частицу. Но из (44) мы знаем, что

$$U_B - U_A = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (55a)$$

Поэтому, складывая (55) и (55a), получаем

$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = 0. \quad (56)$$

Таким образом, *сумма кинетической и потенциальной энергий сохраняется постоянной, т. е. не зависящей от времени, для любой частицы.*

Перепишывая (56) для системы, состоящей из одной частицы, мы получаем функцию энергии в следующем виде:

$$E = \frac{1}{2} Mv^2 (A) + U (A) = \frac{1}{2} Mv^2 (B) + U (B), \quad (57)$$

где  $E$  — постоянная величина, называемая энергией или полной энергией системы.

Обобщим теперь формулу (57) на систему, состоящую из двух частиц, находящихся во внешнем потенциальном поле:

$$E = K + U = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + U_1 (\mathbf{r}_1) + U_2 (\mathbf{r}_2) + U (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \text{const.} \quad (58)$$

Первый член выражает собой кинетическую энергию частицы 1, а второй — кинетическую энергию частицы 2; третий и четвертый члены представляют собой потенциальную энергию частиц 1 и 2, связанную с наличием внешнего потенциала, и, наконец, пятый член характеризует потенциальную энергию взаимодействия между частицами 1 и 2. Заметим, что член  $U (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  фигурирует лишь один раз: если две частицы взаимодействуют между собой, то энергия их взаимодействия представляет собой взаимную энергию!

Если частицы 1 и 2 являются протонами, находящимися в гравитационном поле Земли, то энергия  $E$ , в соответствии с (58),

будет равна

$$E = \frac{1}{2} M (v_1^2 + v_2^2) + Mg(x_1 + x_2) - \frac{GM^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{12}}, \quad (59)$$

где  $x$  отсчитывается снизу вверх и  $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Последний член выражает собой кулоновскую энергию взаимодействия двух протонов; предпоследний член выражает собой их гравитационную энергию.

Кулоновская энергия характеризует отталкивание протонов, а гравитационная — их притяжение. Отношение этих двух последних членов равно

$$\frac{GM^2}{e^2} \approx \frac{10^{-7} \cdot 10^{-48}}{10^{-19}} \approx 10^{-36}$$

и показывает, что гравитационные силы, действующие между протонами, исчезающе малы по сравнению с электростатическими силами.

**Пример.** *Линейная восстанавливающая сила.* Вычислить потенциальную энергию  $U(x)$  частицы, на которую действует восстанавливающая сила  $F_{\text{внутр}} = -Cx$  пружины (мы произведем это вычисление в качестве примера решения одномерной задачи).

Из соотношения (46) следует, что  $F_{\text{внутр}} = -dU/dx$ . После интегрирования находим

$$U(x_2) - U(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{внутр}} dx = C \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} C (x_2^2 - x_1^2), \quad (60)$$

что совпадает с (28).

В этой задаче за нулевое значение потенциальной энергии удобно принять значение потенциальной энергии при  $x = x_1$ . Тогда

$$U = \frac{1}{2} Cx^2. \quad (61)$$

Из (57) находим, что в любой точке  $x$  полная энергия будет постоянна и равна

$$E = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} Cx^2 = \text{const}. \quad (62)$$

Когда  $x = 0$ , полная энергия осциллятора представляет собой кинетическую энергию; в конечных точках, где изменяется направление движения, скорость  $v$  обращается в нуль и полная энергия представляет собой потенциальную энергию. Поэтому, если обозначить максимальное смещение через  $A$ , то полная энергия будет равна

$$E = \frac{1}{2} CA^2. \quad (63)$$

Максимальное значение скорости может быть найдено из соотношения

$$v_{\text{max}}^2 = \frac{2E}{M} = \frac{CA^2}{M}. \quad (64)$$

**Пример.** Скорость, необходимая для преодоления земного притяжения (вторая космическая скорость) и для преодоления притяжения Солнца (третья космическая скорость). Вычислим начальную скорость, необходимую для того, чтобы частица массой  $M$  покинула Землю и Солнечную систему (пренебрегая вращением Земли).

Полная энергия частицы, движущейся со скоростью  $v$ , состоит из кинетической и потенциальной энергий и равна

$$E = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{GM_3M}{R_3}, \quad (65)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная;  $M_3$  — масса Земли и  $R_3 \cong \cong 6,4 \cdot 10^8$  см — радиус Земли. Гравитационная постоянная  $G = 6,670 \cdot 10^{-8}$  дин·см<sup>2</sup>/г<sup>2</sup>, масса Земли  $M_3 = 5,98 \cdot 10^{27}$  г.

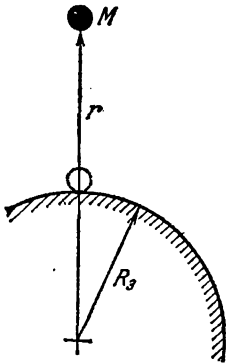


Рис. 5.26. Рассмотрим скорость, необходимую для того, чтобы масса  $M$  преодолела гравитационное поле Земли, начиная движение с ее поверхности.

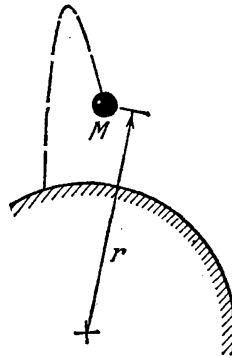


Рис. 5.27. Так выглядит траектория тела, если кинетическая энергия тела недостаточна для того, чтобы оно преодолело земное притяжение, т. е. скорость тела меньше второй космической скорости.

Для того чтобы частица удалилась от Земли на бесконечно большое расстояние и обладала бы в бесконечности наименьшей возможной скоростью, т. е. скоростью, равной нулю, полная энергия должна быть равна нулю, так как и кинетическая и потенциальная энергия сил тяжести также равна нулю. Последнее следует из того, что  $U(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Поэтому в (65)  $E$  должна быть равна нулю, если полная энергия частицы сохраняет постоянное значение в любой момент времени от начала движения до бесконечности. Отсюда получается соотношение

$$\frac{1}{2} Mv_2^2 = \frac{GM_3M}{R_3},$$

из которого можно найти скорость частицы  $v_2$ , необходимую для преодоления земного притяжения (вторая космическая скорость):

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_3}{R_3}}. \quad (66)$$

Так как ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно  $g = GM_3/R_3^2$ , то для  $v_2$  находим

$$v_2 = \sqrt{2gR_3} \cong (2 \cdot 10^8 \cdot 6 \cdot 10^8)^{1/2} \approx 10^6 \text{ см/сек.} \quad (67)$$

Для того чтобы частица, вылетающая с поверхности Земли (и находящаяся на расстоянии  $R_{3c}$  от Солнца), преодолела бы

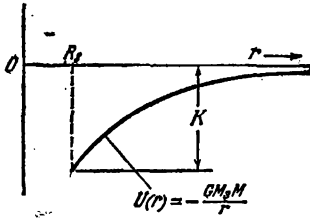


Рис. 5.28. Кинетическая энергия  $K$ , необходимая для преодоления земного притяжения, т. е. для достижения второй космической скорости. Для того чтобы достичь бесконечности, нужно, чтобы  $K \geq -U = |U|$ .

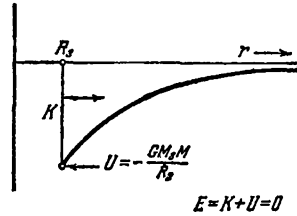


Рис. 5.29. Минимальная кинетическая энергия, необходимая для того, чтобы масса  $M$  покинула поверхность Земли (радиуса  $R_3$ ), равна  $K = \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{GM M_3}{R_3}$ , где  $v_2$  — скорость, необходимая для преодоления земного притяжения, т. е. вторая космическая скорость.

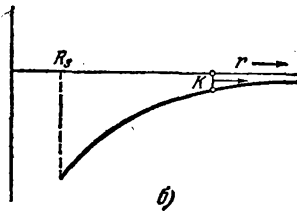
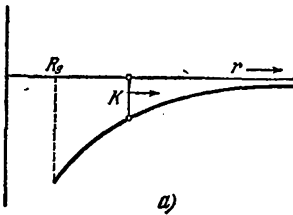


Рис. 5.30. а) Спустя некоторое время потенциальная энергия  $U$  увеличилась, а кинетическая энергия  $K$  уменьшалась по мере удаления от центра Земли. б) Еще через некоторое время  $K$  и  $|U|$  еще больше уменьшились, и при этом, конечно,  $K = -U$ , как и раньше.

притяжение Солнца, необходима скорость (третья космическая скорость)

$$v_c = \sqrt{\frac{2GM_c}{R_{3c}}} = \left[ \frac{2 \cdot (7 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{33})}{1,5 \cdot 10^{23}} \right]^{1/2} \text{ см/сек} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ см/сек,} \quad (68)$$

где  $M_c = 3,3 \cdot 10^5 M_3$  и  $R_{3c} = 1,5 \cdot 10^{13}$  см.

Таким образом, понятно, что телам, вылетающим с Земли, покинуть Солнечную систему значительно труднее, чем покинуть Землю.

**Пример. Гравитационный потенциал вблизи поверхности Земли.** Потенциальная энергия силы тяжести тела массой  $M$  на расстоянии  $r$  от центра Земли для  $r > R_3$  равна

$$U(r) = -\frac{GM M_3}{r}, \quad (69)$$

где  $M_3$  — масса Земли. Если  $R_3$  — радиус Земли и  $x$  — высота над поверхностью Земли, то можно показать, что

$$U \cong -MgR_3 + Mgx \quad (70)$$

для  $x/R_3 \ll 1$ . Здесь  $g = GM_3/R_3^2 \cong 980 \text{ см/сек}^2$ . Из (46) и (70) находим, что вблизи поверхности Земли сила притяжения равна  $F_G = -dU/dx = -Mg$ . Это уже знакомый нам результат.

Из (69), полагая  $r = R_3 + x$ , мы получаем

$$U = -GMM_3 \frac{1}{R_3 + x}. \quad (71)$$

Вынося  $R_3$  в знаменателе за скобку, находим, что

$$U = -\frac{GMM_3}{R_3} \frac{1}{1 + x/R_3}. \quad (72)$$

Теперь для  $x^2 < 1$  можно воспользоваться следующим разложением в ряд:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad (73)$$

которое может быть получено как частный случай биномиального разложения

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (74)$$

при  $n = -1$ . Приняв во внимание (73), мы можем переписать (72) в виде

$$U = -\frac{GMM_3}{R_3} \left( 1 - \frac{x}{R_3} + \frac{x^2}{R_3^2} - \dots \right). \quad (75)$$

С помощью выражения  $g = GM_3/R_3^2$ , получаем

$$U = -MgR_3 \left( 1 - \frac{x}{R_3} + \frac{x^2}{R_3^2} - \dots \right). \quad (76)$$

Это выражение при  $x \ll R_3$  переходит в (70).

В физике очень часто используется соотношение

$$\frac{1}{1+x} \cong 1 - x \quad (x \ll 1), \quad (77)$$

представляющее собой приближенную формулу (73), в которой отброшены члены высших степеней, начиная с  $x^2$  (при этом  $x^2 \ll x$ ). Другое, часто используемое и полезное соотношение:

$$(1+x)^n \cong 1 + nx \quad (nx \ll 1), \quad (78)$$

которое вытекает из (74).

Наше утверждение, что

$$\text{кинетическая энергия} + \text{потенциальная энергия} = \text{const}, \quad (79)$$



выражает закон сохранения энергии, излагаемый в более общем виде в гл. 12 и описывающий также процессы, в которых какая-то часть или вся масса превращается в энергию. Подобные процессы протекают в большинстве ядерных реакций. Это обобщение представляет собой естественное следствие специальной теории относительности. Соотношение (79) выполняется даже в том случае, когда в процессе выделяется тепло, так как с микроскопической точки зрения тепло представляет собой кинетическую и потенциальную энергию атомов, электронов и молекул.

### Задачи

1. *Потенциальная и кинетическая энергия падающего тела.* а) Чему равна потенциальная энергия массы в 1 кг на высоте 1 км над поверхностью Земли? Выразите эту энергию в эргах, считая, что потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю.

О т в е т.  $9,8 \cdot 10^{10}$  эрг.

б) Чему равна кинетическая энергия массы в 1 кг, достигшей поверхности Земли и брошенной без начальной скорости с высоты 1 км (трением пренебречь)?

О т в е т.  $9,8 \cdot 10^{10}$  эрг.

в) Чему равна кинетическая энергия такой же массы, когда она пролетает первую половину пути?

г) Чему равна потенциальная энергия на половине высоты? Сумма в) и г) должна равняться а) или б). Почему?

2. *Потенциальная энергия над Землей.* а) Чему равна потенциальная энергия  $U(R_3)$  массы в 1 кг на поверхности Земли, если считать, что в бесконечности потенциальная энергия равна нулю (не забудьте, что  $U(R_3)$  отрицательна)?

О т в е т.  $-6,23 \cdot 10^{14}$  эрг.

б) Чему равна потенциальная энергия массы в 1 кг на расстоянии  $10^6$  км от центра Земли, считая, что в бесконечности потенциальная энергия равна нулю?

О т в е т.  $-3,98 \cdot 10^{13}$  эрг.

в) Чему равна работа, необходимая для перемещения массы в 1 кг с поверхности Земли на расстояние  $10^6$  км от центра Земли?

3. *Электростатическая потенциальная энергия.* а) Чему равна электростатическая потенциальная энергия электрона и протона, находящихся на расстоянии  $1 \text{ \AA} = 10^{-8}$  см один от другого, если считать, что при бесконечном удалении друг от друга их потенциальная энергия равна нулю? Если заряд выражен в абсолютных электростатических единицах, то результат будет выражен в эргах.

О т в е т.  $-2,3 \cdot 10^{-11}$  эрг.

б) Какова будет электростатическая потенциальная энергия двух протонов на таком же расстоянии? Обратите особое внимание на знак ответа.

4. *Спутник на круговой орбите.* а) Чему равна центробежная сила, действующая на спутник, движущийся по круговой орбите вокруг Земли на расстоянии  $r$  от центра Земли? Скорость спутника относительно центра Земли равна  $v$ , а его масса  $M$ .

б) Чему равна гравитационная сила, действующая на спутник?

в) Выразите  $v$  через  $r$ , приравняв гравитационную силу центробежной силе.

5. *Кинетическая энергия Луны.* Чему равна кинетическая энергия Луны относительно Земли? Необходимые данные приведены в таблице физических постоянных в приложении к этому тому.

6. *Анагармоническая пружина.* Имеется пружина, упругая сила которой изменяется по закону  $F = -Dx^3$ .

а) Чему равна потенциальная энергия этой пружины при растяжении ее на величину  $x$ , если при  $x=0$  ее потенциальная энергия  $U=0$ ?

О т в е т:  $\frac{1}{4} Dx^4$ .

б) Какую нужно совершить работу, чтобы эту пружину медленно растянуть от 0 до  $x$ ?

7. Поле неконсервативной силы. Дана сила, создающая поле,

$$\mathbf{F} = (y^2 - x^2) \hat{x} + 3xy \hat{y}.$$

Вычислите линейный интеграл по пути, соединяющему две точки  $(0, 0)$  и  $(x_0, y_0)$  и состоящему из двух прямолинейных отрезков: первого, ограниченного точками  $(0, 0)$  и  $(x_0, 0)$ , и второго, ограниченного точками  $(x_0, 0)$  и  $(x_0, y_0)$ . Сравните полученный результат с тем, который получится, если интегрирование провести по двум другим сторонам прямоугольника. Является ли эта сила консервативной?

8. Сближение протонов. Два протона, каждый из которых обладает энергией 500 Мэв, движутся навстречу друг другу ( $1 \text{ Мэв} = 1 \cdot 10^6 \text{ эв}$ ). До какого расстояния сблизятся протоны, если взаимодействие между ними только электростатическое и происходит по закону  $e^2/r$ ? (В действительности опыты по рассеянию показали, что область ядерного взаимодействия порядка  $10^{-13} \text{ см}$ , благодаря чему радиус протона следует считать равным также около  $10^{-13} \text{ см}$ , и поэтому поведение двух протонов с такими энергиями не может быть удовлетворительно описано, если исходить из представления об электростатическом взаимодействии.)

Ответ.  $1,4 \cdot 10^{-16} \text{ см}$ .

9. Электрон на орбите вокруг протона. Предположим, что электрон движется вокруг протона по круговой орбите, диаметр которой равен  $2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ .

а) Считая протон покоящимся, найти скорость электрона, приравняв центробежную силу и силу электростатического взаимодействия.

б) Чему равна кинетическая энергия? потенциальная энергия? Выразите обе энергии в эргах и электрон-вольтах.

Ответ.  $K = 5,7 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 3,6 \text{ эв}$  и  $U = 11,4 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 7,2 \text{ эв}$ .

в) Вычислить энергию, необходимую для ионизации системы, т. е. для удаления электрона в бесконечность, где его кинетическая энергия равнялась бы нулю. Обратите внимание на различные знаки.

10. Вылет молекул из атмосферы. Сравните скорость  $v_1$ , которой должна обладать молекула кислорода ( $O_2$ ) для того, чтобы покинуть Землю, со средней квадратичной тепловой скоростью ( $v_2$ ) той же молекулы. Эта тепловая скорость определяется из условия, что кинетическая энергия молекулы равна  $\frac{3}{2}kT$ ; часть молекул обладает значительно большей скоростью. В выражении для кинетической энергии  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — абсолютная температура, принимаемая равной  $300^\circ \text{ К}$  (рис. 5.31).

Ответ:  $\frac{v_1}{v_2} \cong 4 \cdot 10^2$ .

11. Скорость вылета с Луны. Используя  $R_L = 1,7 \cdot 10^8 \text{ см}$  и  $M_L = 7,3 \cdot 10^{25} \text{ г}$ , найти

а) ускорение силы тяжести на поверхности Луны;

б) скорость, которую нужно сообщить телу, находящемуся на Луне, для того, чтобы это тело покинуло Луну.

12. Потенциальная энергия двух пружин. Две пружины, каждая длиной  $a$ , жесткость которых характеризуется постоянной  $C$ , закреплены в точках  $(-a, 0)$  и  $(+a, 0)$  и соединены между собой другими концами (рис. 5.32). Допустим, что эти пружины могут сжиматься или растягиваться в направлении их осей, не выгибаясь при этом в стороны.

а) Покажите, что потенциальная энергия системы при смещении точки соединения обеих пружин в положение, характеризуемое точкой  $(x, y)$ , равна

$$U = \frac{1}{2} C \{[(x+a)^2 + y^2]^{1/2} - a\}^2 + \frac{1}{2} C \{[(a-x)^2 + y^2]^{1/2} - a\}^2.$$

б) Потенциальная энергия в этом случае зависит от двух координат,  $x$  и  $y$ , и поэтому для того, чтобы вычислять соответствующие силы, мы должны пользоваться частными производными. Вспомним, что частная производная функции  $f(x, y)$  вычисляется по обычным правилам дифференцирования, так что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx} f(x; y = \text{const});$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy} f(x = \text{const}; y).$$

Найдите компоненту силы  $F_x$  и покажите, что для  $r=0$   $F_x=0$ .

в) Найдите  $F_y$  для  $x=0$ . Тщательно проверьте знаки, чтобы быть уверенным в том, что ответ имеет смысл.

г) Начертите график зависимости потенциальной энергии от  $r$  в плоскости  $xy$  и найдите положение равновесия.

13. **Взаимодействие нуклона с нуклоном.** Взаимодействие между нуклонами (протонами и нейтронами) может быть представлено с очень хорошей степенью точности потенциалом Юкавы

$$U(r) = -\left(\frac{r_0}{r}\right) U_0 e^{-r/r_0},$$

где  $U_0 \approx 50$  Мэв и  $r_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-13}$  см.

а) Найдите выражение для соответствующей силы  $F(r)$ .

б) На каком приблизительно расстоянии эта сила достигнет одного процента от ее значения при  $r=r_0$ ?

О т в е т.  $6 \cdot 10^{-13}$  см.

14. **Период обращения ионов в масс-спектрометре \***). Принцип действия масс-спектрометра основан на том, что угловая частота спирального движения в однородном магнитном поле не зависит от начальной скорости иона. На практике специальное устройство создает короткий импульс ионов и с помощью электронного приспособления измеряется время, в течение которого ионы этого импульса совершают один или большее число оборотов.

а) Покажите, что время, в течение которого ионы, обладающие зарядом  $e$ , совершают  $N$  оборотов, может быть найдено из приближенного соотношения

$$t \approx 650 \frac{NM}{B},$$

где  $t$  выражено в микросекундах,  $M$  — в атомных единицах массы и  $B$  — в гауссах. Отсюда период обращения ионов  $T \approx t/N$ .

б) Покажите, что радиус окружности приближенно может быть найден из соотношения  $R \approx \frac{145 \sqrt{VM}}{B}$  см, где  $V$  — энергия иона в электрон-вольтах.

в) Известно, что ион обладает энергией в 100 эв и индукция магнитного поля составляет 1000 гс. Вычислите время, в течение которого ион калия  $K^{39}$  совершит 6 полных оборотов (предполагается, что атом калия ионизирован однократно).

15. **Пучок электронов в осциллографе.** В осциллографической трубке электроны ускоряются разностью потенциалов  $\Phi_a$  и проходят между двумя электростатическими отклоняющими пластинами. Между пластинами, длина которых  $l$  и расстояние между которыми  $d$ , поддерживается разность потенциалов  $\Phi_b$ . Экран трубки расположен на расстоянии  $L$  от центра пластины. Воспользуйтесь

\*) Имеется в виду масс-спектрометр с разделением изотопов по времени пролета. (Прим. ред.)

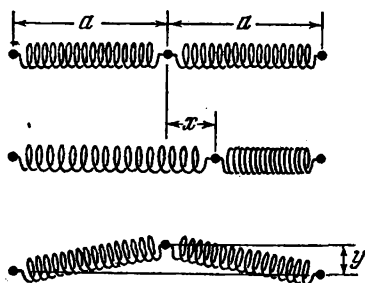


Рис. 5.32.

соотношением, связывающим ускоряющую разность потенциалов и скорость  $v$ :

$$e\Delta\Phi = \frac{1}{2}mv^2, \text{ и}$$

а) выведите выражение для линейного отклонения пятна на экране осциллографа.

б) Допустим, что  $\Phi_a=400$  в,  $\Phi_b=10$  в,  $l=2$  см,  $d=0,5$  см,  $L=15$  см; какова будет величина отклонения  $D$ ? (Не забудьте перевести вольты в единицы СГСЭ<sub>v</sub>.)

### Из истории физики. Открытие Цереры и Нептуна

(Этот рассказ может служить иллюстрацией точности предсказаний, основанных на классической механике.)

1. Первой открытой малой планетой была Церера, которую обнаружил визуально Пиацци из Палермо в Сицилии в первый день девятнадцатого века, т. е. 1 января 1801 г. Пиацци наблюдал ее движение в течение нескольких недель, а затем заболел и, выздоровев, потерял ее из виду. На основании немногих наблюдений Пиацци несколько ученых вычисляли орбиту Цереры, но только на основании

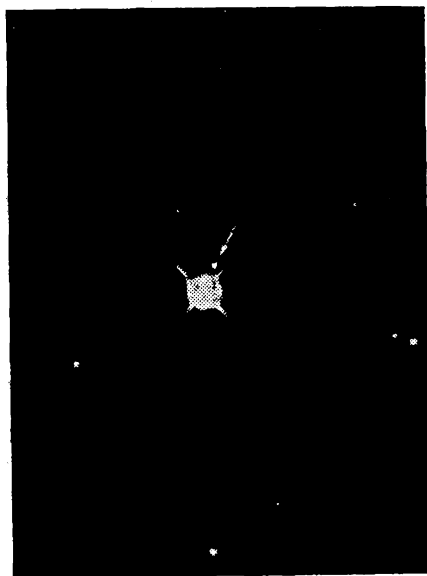


Рис. 5.33. Фотография Нептуна, снятая с помощью 120-дюймового отражательного телескопа Ликской обсерватории. Стрелкой указан Тритон, являющийся спутником Нептуна. (Фото Ликской обсерватории)

результатов расчета, сделанного Гауссом, удалось с достаточной точностью предсказать местоположение этой малой планеты в следующем году. И вот 1 января 1802 г. планета Церера была вновь «открыта» Олберсом, обнаружившим ее в предсказанном положении с отклонением только в 30 угловых минут. По мере накопления большего числа наблюдений Гаусс и другие смогли уточнить характеристики вычисленной орбиты, и уже в 1830 г. ошибка в определении вычисленного положения составляла всего лишь 8 угловых секунд. Учитывая возмущения, которые вносит Юпитер в движение Цереры по ее орбите, Энке смог уменьшить ошибку в определении положения Цереры в среднем до 6 угловых секунд за год. Позднейшие вычисления, в которых учет возмущений производился с большей точностью,

позволили предсказывать положение Цереры настолько точно, что расхождение между результатами вычислений и наблюдений не превышало 30 угловых секунд за 30 лет.

Сообщения об открытии Цереры были опубликованы в 12-м томе журнала «Philosophical Magazine» за 1802 г. Познакомьтесь со статьями Пиацци (стр. 54), фон Цаха (стр. 62), Тиллоха (стр. 80) и Лаланда (стр. 112). Забавно, что 21 сентября 1800 г. в Лилиентале было организовано общество знаменитых астрономов Европы с «целью быстрейшего выяснения, находится ли эта планета между Марсом и Юпитером... Общество наметило распределить весь зодиак среди своих двадцати четырех членов...» Однако из-за почтовых трудностей, вызванных наполеоновской войной, приглашение принять участие в этом исследовании дошло до Пиацци уже после того, как он открыл существование Цереры. Другие материалы об открытии Цереры публиковались в «Астрономическом ежегоднике» за 1804—1805 гг. Вычисления, выполненные Гауссом, опубликованы в 6-м томе его сочинений на стр. 199—211.

Астрономические традиции заложенные аббатом Пиацци из Палермо, отражены в написанном его потомком романе «Леопард», герой которого Лампедуза приобретает интерес к астрономии от своего духовного наставника аббата Перроне, помогавшего ему в астрономических наблюдениях.

2. В течение первой половины девятнадцатого века, по мере повышения точности наблюдений и совершенствования теории, было установлено, что планета Уран движется не в полном согласии с законом всемирного тяготения, а также законом сохранения момента импульса. Странным образом эта планета то ускоряет, то замедляет свое движение на малую, но вполне заметную величину. Такое поведение планеты не могло быть объяснено на основе известных свойств Солнечной системы и законов физики. Наконец в 1846 г. Леверье и Адамс, независимо друг от друга, пришли к выводу, что наблюдаемое аномальное движение Урана может быть полностью объяснено, если постулировать существование гипотетической новой планеты, обладающей определенной массой и определенной орбитой, внешней по отношению к орбите Урана \*). Они решили соответствующие уравнения, с помощью которых определялось положение этой неизвестной планеты, и после всего лишь получасового поиска Галле была обнаружена новая планета, названная Нептуном (рис. 5.33). Положение этой планеты отличалось от предсказанного только на один угловой градус \*\*). В настоящее время предсказание положения больших планет согласуется с результатами наблюдений в пределах нескольких угловых секунд даже в тех случаях, когда производится экстраполяция на многие годы. При этом точность целиком зависит от того, насколько полно учитывается влияние различных возмущающих эффектов.

\*) «Я убедился в невозможности рассчитать положение этой планеты (Уран) по теории универсального тяготения, если считать, что она является телом, на которое действует только Солнце и все известные планеты. Однако все наблюдаемые аномалии могут быть объяснены во всех малейших деталях, если учесть влияние новой (еще не открытой) планеты, находящейся вдали от Урана... Мы предсказываем (31 августа 1846 г.) следующее положение для новой планеты 1 января 1847 г.: истинная гелиоцентрическая долгота  $326^{\circ}32'$ . U. J. Le Verrier, *Compt. Rend.* 23, 428 (1846).

\*\*) «Я написал г-ну Галле 18 сентября и просил его о сотрудничестве; этот талантливый астроном видел планету в тот же день (23 сентября 1846 г.), когда он получил мое письмо... [Наблюденная] гелиоцентрическая долгота  $327^{\circ}24'$ , приведенная к 1 января 1847 г. ... Разность [наблюдение и теория]  $0^{\circ}52'$ . Леверье, там же, стр. 657.

«Леверье увидел новую планету даже не взглянув мельком на небо. Он увидел ее на кончике своего пера; только с помощью вычислений он определил положение и размеры тела, расположенного очень далеко в пределах нашей планетной системы...» А р а г о, там же, стр. 659.

Для того чтобы познакомиться с великолепной полемикой по поводу этого открытия, см. стр. 741—754 того же тома «*Compt. Rend.*» (Париж); см. также М. Г р о с с е р, Открытие Нептуна (Харвард, Кембридж, Массачусетс, 1962).

## ГЛАВА 6

### СОХРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

#### 6.1. Сохранение импульса

В гл. 3 мы рассмотрели системы, для которых выполняется преобразование Галилея, и показали, что сохранение импульса взаимодействующих частиц является необходимым следствием этого преобразования, а также закона сохранения энергии при условии, что на систему не действуют внешние силы. Закон сохранения импульса, очень точно подтверждаемый на опыте, является существенной частью того «классического багажа», который мы уже рассматривали раньше. В этой главе мы узнаем, что такое центр масс, и рассмотрим процессы столкновения в системе отсчета, в которой центр масс находится в состоянии покоя.

Получим прежде всего выражение потенциальной энергии системы, для которой выполняется преобразование Галилея. Предположим, что система состоит из двух частиц и мы рассматриваем одномерный случай. Пусть координаты этих частиц будут  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда потенциальная энергия  $U(x_1, x_2)$  будет зависеть только от положения этих частиц. При осуществлении преобразования Галилея потенциальная энергия не должна изменяться, т. е. должна быть инвариантной по отношению к этому преобразованию при трансляции каждой из частиц на величину  $b$  с постоянной скоростью:

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + b, x_2 + b). \quad (1)$$

Какой смысл имеет это соотношение? Физически это означает, что потенциальная энергия системы не изменяется при перемещении обеих частиц из первоначального положения в какое-то новое положение и при этом не совершается никакой работы. Математически это означает, что величина  $b$  исчезает из правой части соотношения (1).

Например, если

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2, \quad (2)$$

то

$$U(x_1 + b, x_2 + b) = (x_1 + b - x_2 - b)^2 = (x_1 - x_2)^2 = U(x_1, x_2), \quad (3)$$

т. е. в правой части (1) величина  $b$  действительно уничтожается. Поэтому выражение (2) инвариантно, т. е. не изменяет своего значения при смещении частиц на величину  $b$ . В общем случае, когда  $U(r_1, r_2)$  является функцией только  $r_1 - r_2$ , эта функция оказывается инвариантной по отношению к сдвигу или переносу. Отметим, что если, например,  $U = x_1$ , то в этом случае  $U$  не инвариантно по отношению к переносу на величину  $b$ , так как при этом  $U = x_1 + b$ , и закон сохранения импульса не выполняется.

Мы знаем, что для случая одного измерения сила равна взятой с обратным знаком производной  $\partial U / \partial x$ . Поэтому силы, действующие на частицы 1 и 2, равны

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \\ F_2 &= -\frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

При вычислении  $\partial U / \partial x_1$  мы полагаем  $x_2$  постоянным и точно так же при вычислении  $\partial U / \partial x_2$  мы считаем постоянным  $x_1$ . Если  $U$  представляет собой функцию от  $u$ , где

$$u = x_1 - x_2, \quad (5)$$

то по правилам дифференцирования

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= \frac{dU}{du} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{dU}{du}, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \frac{dU}{du} \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{dU}{du}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \text{или} \quad F_1 = -F_2, \quad (7)$$

как и следовало ожидать. Отсюда видно, что результирующая сила  $F_1 + F_2$ , действующая на две частицы, которые взаимодействуют только друг с другом, равна нулю. Если результирующая сила равна нулю, то по закону Ньютона суммарный импульс будет постоянным.

Это рассуждение легко обобщить на случай  $N$  частиц. Потенциальная энергия системы, состоящей из  $N$  частиц, будет инвариантна по отношению к переносу, если эту энергию можно представить как функцию только расстояний между частицами:

$$r_1 - r_2, \quad r_1 - r_3, \quad \dots, \quad r_1 - r_N, \quad r_2 - r_3, \quad \dots, \quad r_{N-1} - r_N.$$

Кулоновское и гравитационное взаимодействия могут быть записаны именно в такой форме.

Следует подчеркнуть, что сила может быть инвариантна по отношению к трансляции и без того, чтобы сохранялся постоянным импульс. Важно, чтобы инвариантной была потенциальная

энергия. Импульс сохраняется постоянным только в том случае, когда потенциальная энергия инвариантна по отношению к трансляции.

**Центр масс.** Положение центра масс (ц. м.) системы, состоящей из  $N$  частиц, относительно фиксированного начала координат  $O$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}$ , который дается соотношением

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м.}} = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n M_n}{\sum_{n=1}^N M_n}. \quad (8)$$

Для системы, состоящей из двух частиц (рис. 6.1 и 6.2),

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м.}} = \frac{\mathbf{r}_1 M_1 + \mathbf{r}_2 M_2}{M_1 + M_2}. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по времени, получаем

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м.}} = \frac{\sum_n \dot{\mathbf{r}}_n M_n}{\sum_n M_n} = \frac{\sum_n \mathbf{v}_n M_n}{\sum_n M_n}. \quad (10)$$

Здесь сумма  $\sum_n \mathbf{v}_n M_n$  представляет собой полный импульс системы. В отсутствие внешних сил полный импульс постоянен, и поэтому

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м.}} = \text{const}. \quad (11)$$

Это соотношение выражает замечательное свойство центра масс: *скорость центра масс постоянна в отсутствие внешних сил* (рис. 6.3). Это справедливо, например, для радиоактивных ядер, распадающихся на лету (рис. 6.4).

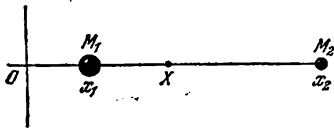


Рис. 6.1. Две массы  $M_1$  и  $M_2$ , расположенные на оси  $x$  в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$ , обладают центром масс, расположенным в точке с координатой  $X = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$ .

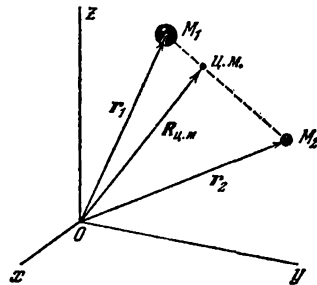


Рис. 6.2. Для двух масс  $M_1$  и  $M_2$ , положение которых определяется векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , положение центра масс (ц. м.) определяется вектором  $\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}$

$$\mathbf{R}_{\text{ц.м.}} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}.$$

Легко показать из (10), что ускорение центра масс определяется результирующей внешней силой, действующей на систему частиц. Если  $\mathbf{F}_n$  — сила, действующая на  $n$ -ю частицу, то, дифференцируя



(10) по времени, мы получаем, что

$$\left(\sum_n M_n\right) \ddot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м}} = \sum_n (M_n \dot{\mathbf{v}}_n) = \sum_n \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \quad (12)$$

где справа в сумме  $\sum_n \mathbf{F}_n$  выпадают все внутренние силы (ньютоновские), действующие между любыми двумя частицами.

Мы напоминаем, что в случае ньютоновских сил сила, действующая на  $i$ -ю частицу со стороны  $j$ -й частицы, равна и противоположна силе, действующей на  $j$ -ю частицу со стороны  $i$ -й частицы.

Приведем теперь примеры решения нескольких важных задач на столкновение, иллюстрирующие применение понятия центра масс.



Рис. 6.3. В отсутствие внешних сил скорость центра масс постоянна. Здесь подразумевается радиоактивное ядро, обладающее скоростью  $\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м}}$  перед распадом.

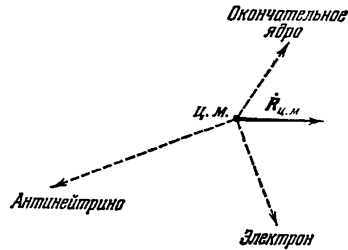


Рис. 6.4. Ядро распадается на три частицы, разлетающиеся по разным направлениям. Однако скорость центра масс этих трех частиц остается неизменной.

**Пример. Столкновение слипающихся частиц.** Рассмотрим столкновение двух частиц массой  $M_1$  и  $M_2$ , которые слипаются при столкновении (рис. 6.5—6.8). Пусть частица массой  $M_2$  перед столкновением находится в начале координат и покоится. Пусть, кроме того, радиус-вектор  $\mathbf{r}_1 = v_1 t \hat{x}$  описывает движение частицы  $M_1$  перед столкновением.

а) Рассмотрим движение массы  $M = M_1 + M_2$  после столкновения. Независимо от того, будет ли столкновение упругим или неупругим, полный импульс при столкновении не изменится. Будем считать рассматриваемое здесь столкновение неупругим. Начальная компонента импульса равна  $M_1 v_1$ ; конечная компонента импульса будет равна  $(M_1 + M_2) v$ . Другие компоненты импульса равны нулю. Из закона сохранения импульса следует, что

$$M_1 v_1 = (M_1 + M_2) v. \quad (13)$$

Отсюда для скорости после столкновения находим

$$v = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1. \quad (14)$$

Так как обе частицы слиплись между собой, то радиус-вектор

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = vt \hat{x} \quad (t > 0) \quad (15)$$

описывает движение системы после столкновения. В соответствии

с (11) это же соотношение должно описывать движение центра масс все время как до, так и после столкновения; из (13) получаем

$$R_{ц. м} = vt\hat{x} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 t \hat{x}. \quad (16)$$

б) Чему равно отношение кинетической энергии  $K_2$  после

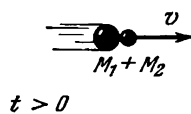
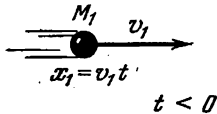
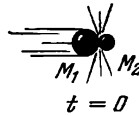


Рис. 6.5. Даже при неупругом столкновении импульс должен сохраняться. Рассмотрим столкновение, при котором частицы соединяются вместе. Перед столкновением  $p_x = M_1 v_1$ .

Рис. 6.6. После столкновения  $p_x = M_1 v_1 = (M_1 + M_2)v$ , так что

$$v = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} < v_1.$$

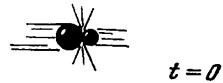
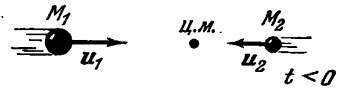
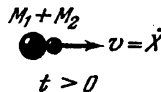
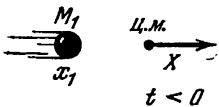


Рис. 6.7. Скорость  $\dot{X}$  не изменяется при столкновении.

$$X = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$$

$$\dot{X} = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}$$

Рис. 6.8. Если в системе отсчета, начало которой совпадает с центром масс, скорости масс  $M_1$  и  $M_2$  до столкновения равны  $u_1$  и  $u_2$ , то после столкновения массы  $(M_1 + M_2)$  будут находиться в состоянии покоя.

столкновения к начальной кинетической энергии  $K_1$ ? Кинетическая энергия  $K_2$  после столкновения равна

$$K_2 = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2} v_1^2 = \frac{M_1^2 v_1^2}{2(M_1 + M_2)}. \quad (17)$$

Так как начальная кинетическая энергия равна  $K_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2$ , то отношение  $K_2/K_1$  будет равно

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}. \quad (17a)$$

Уменьшение энергии при столкновении расходуется на увеличение внутренней энергии составной системы после столкновения. Когда летящий метеорит сталкивается с Землей и остается на ней, значительная часть его энергии переходит в тепло, так как  $M_1 \ll M_1 + M_2$ .

в) Опишем движение до и после столкновения в системе отсчета, в которой центр масс покоится (такая система отсчета называется системой центра масс).

Положение центра масс системы определяется, как это следует из (9), радиусом-вектором

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = \frac{M_1 v_1 \hat{x}}{M_1 + M_2}. \quad (18a)$$

Скорость центра масс равна

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt} \mathbf{R}_{\text{ц. м}} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \hat{x}. \quad (18б)$$

В системе отсчета, связанной с центром масс, начальная скорость  $\mathbf{u}_1$  частицы 1 выразится следующим образом:

$$\mathbf{u}_1 = v_1 \hat{x} - \mathbf{V} = \left(1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2}\right) v_1 \hat{x} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_1 \hat{x}. \quad (18в)$$

В той же системе отсчета начальная скорость частицы 2 будет равна

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{V} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \hat{x}. \quad (18г)$$

После столкновения частицы слипаются, и новая составная частица обладает массой  $M_1 + M_2$ . Эта частица должна покоиться в системе координат, связанной с центром масс. Относительно лабораторной системы отсчета новая частица обладает скоростью  $\mathbf{V}$ , которая может быть найдена из соотношения (18б), в точности совпадающего с выражением (14), полученным ранее.

*Пример. Поперечные компоненты импульса.* Две частицы одинаковой массы вначале движутся по пути, параллельному оси  $x$ , и сталкиваются между собой. После столкновения одна из частиц приобретает компоненту скорости  $v_y(1)$  по оси  $y$ . Чему будет равна компонента скорости по оси  $y$  у другой частицы после столкновения? Напомним, что для каждой компоненты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  полного импульса в отдельности выполняется закон сохранения.

Перед столкновением частицы двигались вдоль оси  $x$  так, что полная  $y$ -я компонента импульса равнялась нулю. По закону сохранения импульса полная  $y$ -я компонента импульса после столкновения также должна быть равна нулю, так что

$$M[v_y(1) + v_y(2)] = 0, \quad (19)$$

откуда

$$v_y(2) = -v_y(1). \quad (20)$$

Однако значение  $v_y(1)$  не может быть вычислено, если неизвестны

начальные траектории и некоторые детали, относящиеся к силам, действующим при столкновении.

**Пример. Столкновение возбужденных частиц.** Представим себе, что сталкиваются две частицы одинаковой массы и обладающие равными, но противоположными по направлению скоростями  $\pm v_1$ . Чему будут равны скорости после столкновения? Центр масс покоится и должен оставаться в состоянии покоя, так что конечные скорости  $\pm v_2$  должны быть равны по величине, но противоположны по направлению. Если столкновение упругое, то, как этого требует закон сохранения энергии, конечная скорость  $v_2$  должна быть равна по величине и противоположна по направлению начальной скорости  $v_1$ . Если же в результате столкновения одна или обе частицы приходят в возбужденное состояние, то из закона сохранения энергии следует, что в этом случае  $v_2 < v_1$ . Если же одна или обе частицы первоначально уже находились в возбужденном состоянии за счет каких-то внутренних процессов, то после столкновения энергия их возбужденного состояния переходит в кинетическую энергию, и тогда  $v_2$  будет больше, чем  $v_1$ .

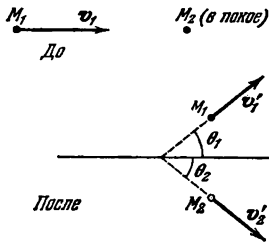


Рис. 6.9. Столкновение между  $M_1$  и  $M_2$  не ограничивается одним измерением. В лабораторной системе отсчета  $M_2$  до столкновения находится в покое.

**Пример. Отклонение тяжелых частиц легкими.** Это хорошо известная задача. Частица массы  $M_1$  упруго сталкивается с частицей массы  $M_2$ , первоначально находившейся в покое относительно лабораторной системы отсчета (рис. 6.9). При столкновении траектория  $M_1$  отклоняется на угол  $\theta_1$ . Максимальное возможное значение угла рассеяния  $\theta_2$  определяется по законам сохранения энергии и импульса, независимо от деталей взаимодействия между частицами. Наша задача состоит в том, чтобы найти значение  $\theta_{1\max}$ . На окончательной стадии расчета мы убедимся в том, что столкновение удобно рассматривать в такой системе отсчета, в которой центр масс покоится.

Обозначим начальные скорости в лабораторной системе отсчета через

$$v_1 = v_1 \hat{x}, \quad v_2 = 0, \quad (21)$$

а конечные скорости (после столкновения) через  $v_1'$  и  $v_2'$ . Закон сохранения энергии требует, чтобы при упругом столкновении полная кинетическая энергия до столкновения равнялась полной кинетической энергии после столкновения, т. е.

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 \quad (22)$$

при начальном условии  $v_2=0$ . Закон сохранения импульса для

$x$ -й компоненты импульса требует, чтобы

$$M_1 v_1 = M_1 v'_1 \cos \theta_1 + M_2 v'_2 \cos \theta_2. \quad (23)$$

Вся картина столкновения может рассматриваться как происходящая в плоскости  $xy$ , так как в столкновении принимают участие только две частицы. Закон сохранения импульса для  $y$ -й компоненты импульса требует, чтобы

$$0 = M_1 v'_1 \sin \theta_1 + M_2 v'_2 \sin \theta_2, \quad (24)$$

так как первоначально  $y$ -я компонента импульса была равна нулю.

Вполне возможно, но довольно утомительно решить совместно уравнения (22)—(24) и найти интересующие нас величины. Эти уравнения выражают собой содержание законов сохранения. Однако значительно удобней и более содержательно рассматривать столкновение в системе отсчета, связанной с центром масс. Прежде всего найдем скорость центра масс относительно лабораторной системы отсчета. Положение центра масс определяется соотношением

$$\mathbf{R}_{ц.м.} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}. \quad (25)$$

Скорость  $\mathbf{V}$  центра масс равна

$$\dot{\mathbf{R}}_{ц.м.} = \frac{M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{M_1 + M_2}, \quad \mathbf{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \mathbf{v}_1, \quad (26)$$

где результат мы выразили через скорость  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  с учетом того, что перед столкновением  $\mathbf{v}_2 = 0$ . Заметим, что (26) выражает собой то же самое, что и уравнение (18в), но написано оно теперь для трех измерений.

Обозначим начальные скорости в системе отсчета, в которой центр масс покоится, через  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ ; конечные скорости в этой же системе отсчета пусть будут равны  $\mathbf{u}'_1$  и  $\mathbf{u}'_2$  (рис. 6.10). Между скоростями в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета, связанной с центром масс, существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{V}, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 + \mathbf{V}, \\ \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{u}'_1 + \mathbf{V}, & \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{u}'_2 + \mathbf{V}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Мы можем высказать предположение о типе решения, допускаемого законами сохранения. Отметим прежде всего, что при любом столкновении, для которого скорости

$$u_1 = u'_1 \quad \text{и} \quad u_2 = u'_2, \quad (28)$$

будет выполняться закон сохранения энергии, так как кинетическая энергия каждой частицы не изменилась. Далее, в системе отсчета,

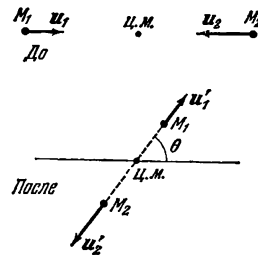


Рис. 6.10. В системе отсчета, связанной с центром масс, массы  $M_1$  и  $M_2$  после столкновения должны разлетаться в противоположных направлениях. Возможны все углы  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;  $|u'_1| = |u_1|$ , а  $|u'_2| = |u_2|$ .

связанной с центром масс, импульс также будет сохраняться, если угол рассеяния частицы 1 равен углу рассеяния частицы 2, т. е. траектории обеих частиц коллинеарны. Если бы эти углы рассеяния (отсчитываемые в системе отсчета, связанной с центром масс) были не равны друг другу, то центр масс после столкновения не мог бы оставаться в покое. Однако мы знаем, что центр масс остается в покое, если не действуют внешние силы.

В системе отсчета, связанной с центром масс, кинематика столкновения очень проста. Законами сохранения допускаются все значения угла рассеяния  $\theta_{ц.м.}$ . Это не выполняется для углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$

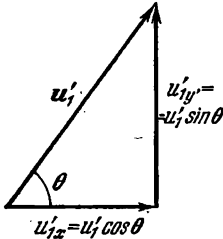


Рис. 6.11. Конечная скорость  $u'_1$  в системе отсчета, связанной с центром масс, разлагается на компоненты  $x$  и  $y$  по осям координат.

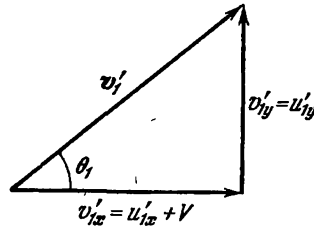


Рис. 6.12. В лабораторной системе отсчета  $x$ - и  $y$ -компоненты  $v'_1$  изображены на чертеже. Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/u_1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + M_1/M_2}.$$

в лабораторной системе отсчета; рассмотрим случай столкновения тяжелой частицы с фотоном, первоначально находившимся в покое. Из интуитивных соображений ясно, что тяжелая частица не отскочит в обратном направлении в результате столкновения. Какие при этом существуют ограничения?

Вернемся к лабораторной системе отсчета. Мы можем написать, обозначая для удобства  $\theta_{ц.м.}$  просто буквой  $\theta$ , что

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{v'_1 \sin \theta_1}{v'_1 \cos \theta_1} = \frac{u'_1 \sin \theta}{u'_1 \cos \theta + V}, \quad (29)$$

где мы использовали тот факт, что  $y$ -компонента конечной скорости частицы 1 одна и та же в обеих системах отсчета. Далее, приняв во внимание (28) и полагая  $u_1 = u'_1$ , находим, что

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/u_1}. \quad (30)$$

Из (26) и (27) получается следующее соотношение:

$$V = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (u_1 + V), \quad V = \frac{M_1}{M_2} u_1, \quad (31)$$

подставляя которое в (30) находим

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + M_1/M_2}. \quad (32)$$

Нам нужно найти значение  $\theta_{1\max}$ . Это может быть сделано графически по графику функции (32) или с использованием дифференциального исчисления для определения максимума  $\operatorname{tg} \theta_1$  как функции  $\theta$ . Как показывает анализ, при  $M_1 > M_2$  знаменатель никогда не может обратиться в нуль, и в этом случае  $\theta_{1\max}$  должен быть

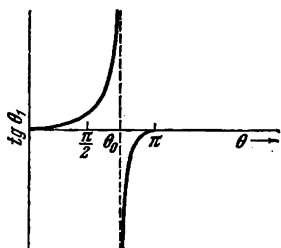


Рис. 6.13. При  $M_1 < M_2$   $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + M_1/M_2}$  обращается в бесконечность при  $\theta = \arccos(-M_1/M_2)$ . Возможны все углы  $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ .

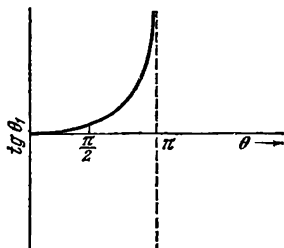


Рис. 6.14. При  $M_1 = M_2$   $\operatorname{tg} \theta_1$  обращается в бесконечность при  $\theta = \pi/2$ . Поэтому возможны все углы  $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ , являющиеся корнями уравнения для  $\operatorname{tg} \theta_1$ .

меньше, чем  $\pi/2$ . Если  $M_1 = M_2$ , то  $\theta_{1\max} = \pi/2$  (рис. 6.13—6.15). Если  $M_1 < M_2$ , то  $\theta_1$  может иметь любое значение.

**Пример. Задача о спутнике.** Спутник мчится в пространстве, свободном от действия сил, наподобие межпланетного осколка, и изменение его массы пропорционально скорости, т. е.  $dM/dt = \alpha v$ , где  $M$  — масса и  $v$  — скорость спутника,  $\alpha$  — постоянная величина. Чему будет равно его замедление?

Из второго закона Ньютона находим, что

$$F = \frac{d}{dt}(Mv) = M\dot{v} + M\dot{v} = 0 \quad (33)$$

или, в случае движения в одном измерении, при  $M = \alpha v$

$$\dot{v} = -\frac{\alpha v^2}{M}. \quad (34)$$

(Это написано для  $v \geq 0$ .) Существует ли другой путь решения этой задачи?

**Пример. Задача о космическом корабле.** Космический корабль выбрасывает топливо со скоростью  $-V_0$  относительно корабля; скорость изменения массы корабля  $\dot{M} = -\alpha$  постоянна. Составим и решим уравнение движения космического корабля, пренебрегая силой тяжести.

Пусть скорость корабля в момент времени  $t$  равна  $v$ . Скорость истечения топлива в лабораторной (но не относительно корабля) системе отсчета (инерциальная система) равна  $-V_0 + v$ . Мы считаем, что  $V_0$  и  $v$  параллельны, и поэтому задача сводится к задаче в одном измерении.

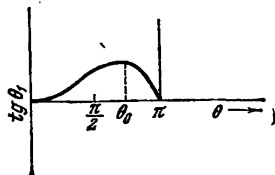


Рис. 6.15. При  $M_1 > M_2$   $\operatorname{tg} \theta_1$  не обращается в бесконечность. Поэтому  $0 \leq \theta_1 < \arcsin(M_1/M_2) < \pi/2$ .

Сила, действующая на спутник и возникающая при выбрасывании топлива, равна и противоположна по знаку импульсу выбрасываемого топлива, отнесенному к единице времени. В лабораторной системе отсчета импульс выбрасываемого топлива, отнесенный к единице времени, равен  $|M\dot{v}|$  ( $-V_0 + v$ ), или  $\alpha(-V_0 + v)$ , и поэтому сила, действующая на спутник, в этой системе отсчета равна

$$F = -\alpha(-V_0 + v) = \alpha(V_0 - v). \quad (35)$$

Для спутника эта сила равна  $M\dot{v} + M\ddot{v}$ ; поэтому уравнение движения имеет вид \*)

$$M\dot{v} + M\ddot{v} = \alpha(V_0 - v), \quad (36)$$

откуда

$$M\ddot{v} = \alpha V_0. \quad (37)$$

Здесь

$$M(t) = M_0 - \alpha t. \quad (38)$$

(Последнее уравнение предполагает, что выполняется условие  $M = -\alpha$ .) Из (36) следует, что

$$-\alpha v + (M_0 - \alpha t) \frac{dv}{dt} = \alpha(V_0 - v). \quad (39)$$

После преобразования находим отсюда, что

$$dv = \frac{(\alpha V_0 / M_0)}{1 - (\alpha t / M_0)} dt. \quad (39a)$$

Интегрируя это уравнение в пределах от  $t = 0$  до  $t$  и от  $v_0$  до  $v$ , находим, что

$$v = -V_0 \ln \left( 1 - \frac{\alpha t}{M_0} \right) + v_0, \quad (40)$$

где  $v_0$  — начальная скорость корабля.

Таким образом, изменение скорости за время  $t$  равно

$$v - v_0 = -V_0 \ln \left( 1 - \frac{t}{t_0} \right) = V_0 \ln \frac{t_0}{t_0 - t}, \quad (41)$$

где

$$t_0 \equiv \frac{M_0}{\alpha} \quad (42)$$

представляет собой экстраполированное время, в течение которого была бы выброшена вся масса корабля. Конечно, корабль не состоит только из одного топлива; двигатель отключается в тот момент, когда время его работы составляет что-нибудь около 85—90% от  $t_0$ . Поэтому 85—90% первоначальной массы корабля должно составлять топливо. Из формулы (41) следует, что выгодно применять горючее, обладающее способностью выбрасываться с большой скоростью (больше  $V_0$ ).

\*) Уравнение движения переменной массы впервые было получено И. В. Мещерским («Динамика точки переменной массы», Петербург, 1897). (Прим. ред.)



Наиболее эффективным из всех возможных горючих были бы фотоны, для которых  $V_0=c$ . Представьте уравнение (41) в безразмерной форме, используя в качестве переменных  $(v-v_0)/V_0$  и  $t/t_0$ , и постройте соответствующий график. Какого типа бумагу (т. е. с какой сеткой) лучше всего применять для построения такого графика?

## 6.2. Сохранение момента импульса

Момент импульса  $J$  отдельной частицы (рис. 6.16, а и б) относительно произвольно выбранной фиксированной точки (фиксированной в инерциальной системе отсчета) первоначально определяется соотношением

$$\boxed{J \equiv r \times p \equiv r \times Mv,} \quad (43)$$

где  $p$  — импульс. Момент импульса измеряется в  $г \cdot см^2/сек$  или в  $эрг \cdot сек$ . Компоненту  $J$  вдоль любой линии (или оси), проходящей

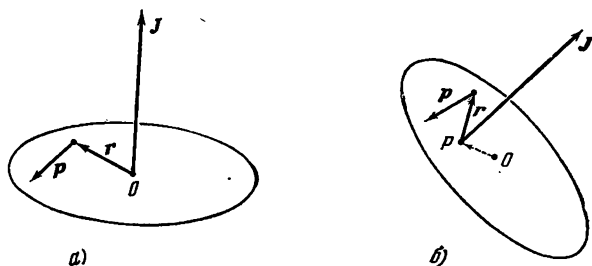


Рис. 6.16. а) Момент импульса относительно точки  $O$  определяется этим чертежом:  $J=r \times p$ . б) Момент импульса относительно другой точки  $P$  будет уже другим, даже для той же самой частицы с одним и тем же импульсом:  $J=r \times p$ .

через фиксированную точку отсчета, часто называют моментом импульса частицы относительно этой оси.

Мы определяем момент вращения (или вращательный момент) относительно такой фиксированной точки, когда

$$\boxed{N \equiv r \times F,} \quad (44)$$

где  $F$  — сила, действующая на частицу. Момент вращения измеряется в  $дин \cdot см$ . Дифференцируя (43), получаем

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt}. \quad (45)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{dr}{dt} \times p = v \times Mv = 0, \quad (46)$$

а также второй закон Ньютона для инерциальной системы отсчета, получаем

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}. \quad (47)$$

Таким образом, мы приходим к важному выводу:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N};} \quad (48)$$

скорость изменения момента импульса равна моменту вращения.

Если  $\mathbf{N} = 0$ , то  $\mathbf{J} = \text{const}$ . Момент импульса постоянен в отсутствие внешних моментов вращения \*); это утверждение составляет содержание закона сохранения момента импульса. Следует

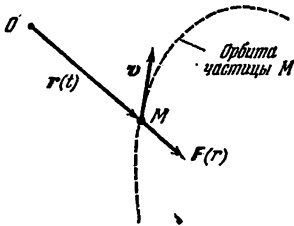


Рис. 6.17. На частицу  $M$  действует отталкивающая центральная сила  $\mathbf{F}(r)$ , исходящая из точки  $O$ . В этом случае момент силы  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ , и мы получаем  $\mathbf{J} = \text{const}$ .

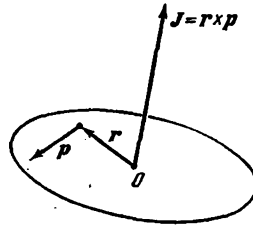


Рис. 6.18. Так как при центральном движении вектор  $\mathbf{J}$  постоянен, то такое движение происходит в одной плоскости.

заметить, что закон сохранения момента импульса справедлив не только для частиц, движущихся по замкнутым орбитам. Он выполняется также и для незамкнутых орбит, а также в процессах столкновения (рис. 6.17, 6.18).

Рассмотрим частицу, на которую действует центральная сила, имеющая вид

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} f(r). \quad (49)$$

Центральная сила представляет собой силу, всегда направленную точно к некоторой определенной точке (или от нее). В этом случае момент вращения равен

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} f(r) = 0, \quad (50)$$

поэтому для центральных сил

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \quad (51)$$

и момент импульса сохраняется постоянным. В следующем разделе

\*) Внешний момент вращения создается внешней силой, действующей на тело. Внутренний момент вращения связан с силой, действующей со стороны одной части тела на другую.

будет показано, что этот результат может быть получен как следствие инвариантности функции потенциальной энергии  $U(\mathbf{r})$  при повороте системы отсчета. Однако сначала мы рассмотрим обобщенные уравнения момента вращения для случая  $N$  взаимодействующих частиц.

Суммарный момент импульса системы частиц относительно произвольно выбранной точки в инерциальной системе отсчета будет равен

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N M_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n. \quad (52)$$

Так же как и для одной частицы, значение  $\mathbf{J}$  зависит от положения точки, выбранной за начало отсчета. Если  $\mathbf{R}_{ц.м}$  представляет собой вектор, характеризующий положение центра масс относительно начала системы отсчета, мы можем записать выражение для  $\mathbf{J}$  в следующем удобном виде:

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N M_n (\mathbf{r}_n - \mathbf{R}_{ц.м}) \times \mathbf{v}_n + \sum_{n=1}^N M_n \mathbf{R}_{ц.м} \times \mathbf{v}_n = \mathbf{J}_{ц.м} + \mathbf{R}_{ц.м} \times \mathbf{P}, \quad (53)$$

где  $\mathbf{J}_{ц.м}$  — момент импульса относительно центра масс и  $\mathbf{P} = \sum M_n \mathbf{v}_n$  — полный импульс. Соотношение (53) имеет важное значение. Член  $\mathbf{R}_{ц.м} \times \mathbf{P}$  выражает собой момент импульса центра масс относительно начала отсчета. Этот член зависит от выбора начала системы отсчета; член  $\mathbf{J}_{ц.м}$ , наоборот, не зависит от выбора начала системы отсчета. Для одной частицы иногда полезно называть величину  $\mathbf{J}_{ц.м}$  *спином* момента импульса.

**Пример. Момент вращения внутренних сил.** В результате взаимодействия между самими частицами возникают моменты внутренних сил. Покажем, что *сумма всех моментов внутренних сил равна нулю*. Полный момент вращения всех сил равен

$$\mathbf{N} = \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n, \quad (54)$$

где сумма внутренних сил

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (55)$$

представляет собой сумму сил, действующих на частицу  $i$  со стороны всех других частиц  $j$  (штрих при  $\sum$  означает, что при суммировании член со значком  $j=i$  исключается). Момент вращения внутренних сил равен

$$\mathbf{N}_{внутр} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \sum_j' \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}. \quad (56)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_i \sum_j' \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \equiv \sum_i \sum_j' \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}, \quad (57)$$

мы можем представить  $N_{\text{внутр}}$  в следующем виде:

$$N_{\text{внутр}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j' (r_i \times F_{ij} + r_j \times F_{ji}). \quad (58)$$

Предположим теперь, что все силы являются ньютоновскими, т. е. что можно положить  $F_{ji} = -F_{ij}$ , тогда

$$N_{\text{внутр}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j' (r_i - r_j) \times F_{ij}. \quad (59)$$

Для центральных сил  $F_{ij}$  параллельны  $r_i - r_j$ . Отсюда сразу же следует, что

$$(r_i - r_j) \times F_{ij} = 0,$$

и поэтому

$$N_{\text{внутр}} = 0. \quad (60)$$

(Точно такой же результат может быть получен и для нецентральных внутренних сил. Статические нецентральные силы, играющие важную роль в физике, в большинстве случаев могут возникать из сил, действующих в пространственном множестве частиц, каждая из которых является источником центральной силы.)

Полагая, что  $F_{\text{внутр}} = 0$ , мы получаем из (51), (53) и (60)

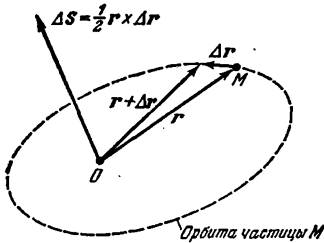


Рис. 6.19.

$$\frac{d}{dt} J_{\text{общ}} = N_{\text{внешн}}; \quad (61)$$

$$J_{\text{общ}} = J_{\text{ц.м}} + R_{\text{ц.м}} \times P. \quad (62)$$

Здесь  $J_{\text{ц.м}}$  — момент импульса относительно центра масс, а  $R_{\text{ц.м}} \times P$  — момент импульса центра масс относительно произвольно выбранного начала отсчета. Во многих случаях очень удобно за начало отсчета выбирать центр масс. Тогда

$$\frac{d}{dt} J_{\text{ц.м}} = N_{\text{внешн}}. \quad (63)$$

Мы видели, что движение центра масс определяется результирующей внешней силой, действующей на тело. Теперь мы видим, что вращение относительно центра масс определяется результирующим моментом внешних сил.

Геометрический смысл момента импульса частицы, движущейся по орбите, внутри которой находится начало отсчета, ясен из рис. 6.19. Вектор площади  $\Delta S$  треугольника выражается соотношением

$$\Delta S = \frac{1}{2} r \times \Delta r. \quad (64)$$

Отсюда

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2M} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{1}{2M} \mathbf{J}. \quad (65)$$

Мы видели, что при соответствующем выборе начала отсчета  $\mathbf{J} = \text{const}$  для центральных сил.

Если в задаче, связанной с движением планет, начало отсчета помещено в точке, совпадающей с Солнцем, то момент импульса сохраняется постоянным вдали от возмущений, вызванных другими планетами. Для центральных сил из (64) и (65) мы приходим к следующим выводам:

- 1) орбита расположена в плоскости;
- 2) секториальная скорость \*) сохраняется постоянной — это один из трех законов Кеплера (рассматриваемых в гл. 9).

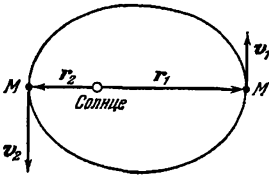


Рис. 6.20. Планета  $M$  обладает постоянным моментом импульса относительно Солнца. Поэтому  $M\mathbf{r}_2\mathbf{v}_2 = M\mathbf{r}_1\mathbf{v}_1$ , где  $r_1$  — наибольшее, а  $r_2$  — наименьшее расстояние планеты Солнца. Орбиты всех планет имеют значительно меньший эксцентриситет, чем это изображено на чертеже. Для наглядности эксцентриситет на чертеже преувеличен.

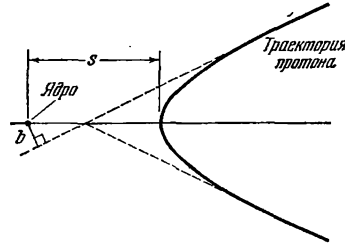


Рис. 6.21. Движение протона в кулоновском поле тяжелого ядра. Траектория представляет собой гиперболу (см. гл. 9). Наименьшее расстояние протона до ядра равно  $s$ . Параметр удара (прицельное расстояние)  $b$  представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки, в которой находится ядро, на направление первоначального участка траектории.

Первый результат следует из того, что  $\mathbf{r}$  и  $\Delta \mathbf{r}$  расположены в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{J}$ , и сам вектор  $\mathbf{J}$  постоянен по величине и направлению в поле центральных сил.

Для частицы, движущейся по кругу со скоростью  $v$ , перпендикулярной  $\mathbf{r}$ ,

$$J = Mvr = M\omega r^2. \quad (66)$$

Планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Для того чтобы выполнялся закон сохранения момента импульса, каждая планета должна двигаться быстрее, приближаясь к точке, расположенной ближе всего к Солнцу, и медленней, приближаясь к наиболее удаленной от Солнца точке (рис. 6.20). Это следует из того, что в этих точках вектор  $\mathbf{r}$  перпендикулярен  $\mathbf{v}$  и момент импульса в этих точках равен  $Mvr$ . В силу закона сохранения величины  $Mvr$  момента импульса в этих точках

\*) Площадь, описываемая радиусом-вектором за единицу времени. (Прим. ред.)

должны быть равны, и поэтому наименьшему значению  $r$  соответствует наибольшее значение  $v$ .

**Пример. Рассеяние протонов тяжелыми ядрами.** Пусть протон приближается к очень массивному ядру, обладающему зарядом  $Ze$ . На бесконечном удалении энергия протона равна  $\frac{1}{2}M_p v_0^2$ . Как видно из рис. 6.21, при линейной экстраполяции траектории протона на большом удалении до наиболее близкого расстояния к тяжелому ядру протон должен был бы пройти мимо ядра на минимальном от него расстоянии  $b$ . Это расстояние называется прицельным параметром \*) (параметром удара).

Каково будет наименьшее расстояние до рассеивающего ядра при движении протона по реальной орбите? Будем считать, что масса ядра бесконечно велика и поэтому энергией отдачи можно пренебречь. (Полное решение задачи о рассеянии приведено в разделе «Из истории физики» в гл. 15.)

Первоначальный момент импульса протона относительно тяжелого ядра будет равен  $M_p v_0 b$ , где  $v_0$  — начальная скорость протона. На ближайшем к ядру расстоянии, обозначенном через  $s$ , момент импульса будет равен  $M_p v_s s$ , где  $v_s$  — скорость в этой точке. Так как действующая в этом случае сила является центральной, должен выполняться закон постоянства момента импульса, и поэтому

$$M_p v_0 b = M_p v_s s, \quad v_s = \frac{v_0 b}{s}. \quad (66a)$$

Заметим, что мы пренебрегли моментом импульса, передаваемым тяжелому ядру.

При столкновении выполняется также и закон сохранения энергии. Первоначально протон обладает только кинетической энергией, равной  $\frac{1}{2}M_p v_0^2$ . Энергия в точке наибольшего сближения равна

$$\frac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{s}, \quad (66b)$$

где первый член представляет собой кинетическую энергию, а второй — потенциальную энергию. Таким образом, из закона сохранения энергии получаем, что

$$\frac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} M_p v_0^2 \quad (66b)$$

или, принимая во внимание (66a),

$$\frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} M_p v_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right]. \quad (66r)$$

Это уравнение может быть решено относительно  $s$ . Таким образом, законы сохранения позволяют нам получать полезную информацию о процессах столкновения.

\*) Или прицельным расстоянием. (Прим. ред.)

### 6.3. Инвариантность по отношению к вращению

Сохранение момента импульса является следствием инвариантности потенциальной энергии при повороте системы отсчета. Если существует момент внешних сил, то в общем случае мы должны при вращении системы совершить работу против этого момента. Если же мы совершаем работу, то потенциальная энергия должна измениться. Когда известно, что при вращении потенциальная энергия не изменяется, то это означает, что не существует момента внешних сил. При равенстве нулю момента внешних сил момент импульса сохраняется постоянным.

Это рассуждение может быть подкреплено в точности такими же аналитическими соображениями, которые содержались в уравнениях (1)—(7) при обсуждении вопроса о сохранении импульса. Пусть  $\Omega \mathbf{r}$  представляет собой вектор, который получается \*) при повороте  $\mathbf{r}$  на произвольный угол  $\theta$  относительно произвольной оси. Длина вектора  $\Omega \mathbf{r}$  такая же, как и длина вектора  $\mathbf{r}$ . Мы можем доказать, что *сохранение момента импульса следует из инвариантности по отношению к вращению, определяемой соотношением*

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = U(\Omega \mathbf{r}_1, \Omega \mathbf{r}_2, \dots, \Omega \mathbf{r}_N). \quad (67)$$

Какой смысл имеет это соотношение в применении к зависимости  $U$  от аргументов для двух частиц? Рассмотрим специальный случай, когда

$$U = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (68)$$

Замена вектора  $\mathbf{r}$  вращающимся вектором  $\Omega \mathbf{r}$  изменяет направление, но не величину разности векторов  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Поэтому, если  $U$  представляет собой инвариантную величину, то она может зависеть только от величины расстояния между двумя частицами. Итак,

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (69)$$

В этом случае сила  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  обязательно будет направлена вдоль линии  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Так как сила является центральной, то в соответствии с (50) момент вращения обращается в нуль.

Для  $N$  частиц инвариантность потенциала по отношению к повороту обеспечивается, если  $U$  зависит только от величины расстояния между несколькими частицами.

Потенциал, создаваемый отдельным электроном или ионом в кристалле, не обладает инвариантностью по отношению к вращению, потому что электрическое поле, созданное другими ионами, очень неоднородно и непостоянно.

---

\*) Следует иметь в виду, что здесь мы поворачиваем  $\mathbf{r}$ , а не систему отсчета; можно, однако, поворачивать и систему отсчета, но приводимые в тексте рассуждения окажутся более простыми, если мы будем поворачивать вектор  $\mathbf{r}$ . Символ  $\Omega$  означает не обычную величину, это так называемый *оператор*. Операторы мы будем рассматривать в т. IV.

Поэтому в общем случае мы не можем ожидать выполнения закона сохранения момента импульса для электронных оболочек иона в кристалле, даже несмотря на то, что момент импульса сохраняется для того же иона, если он находится в свободном пространстве. Невыполнение закона сохранения момента импульса для электронов в ионах кристаллов наблюдалось при изучении парамагнитных ионов в кристаллах, а также эффекта, называемого гашением орбитального момента импульса.

Момент импульса Земли  $J$  постоянен в системе отсчета, в начале которой находится Солнце, потому что в этом случае  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$  в каждой точке массы Земли, на которую действует гравитационная сила  $\mathbf{F}$  со стороны Солнца.

*Пример. Угловое ускорение, сопровождающее сжатие.* Частица массой  $M$  закреплена на нити и вращается; когда длина нити равна  $r_0$ , скорость равна  $v_0$ . Чему равна работа, совершаемая при укорочении нити до длины  $r$ ?

Сила, действующая на частицу со стороны нити, направлена по радиусу, и поэтому при ускорении нити момент вращения равен нулю. Следовательно, момент импульса должен оставаться постоянным при ускорении нити:

$$Mv_0r_0 = Mvr. \quad (70)$$

Кинетическая энергия частицы, находящейся на расстоянии  $r_0$ , равна  $\frac{1}{2} Mv_0^2$ , а при уменьшении расстояния до  $r$  увеличится до величины, равной

$$\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} Mv_0^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2, \quad (71)$$

так как в соответствии с (70)  $v = v_0 r_0 / r$ . Отсюда следует, что работа  $W$ , совершаемая извне при укорочении нити от длины, равной  $r_0$ , до длины, равной  $r$ , определяется соотношением

$$W = \frac{1}{2} Mv_0^2 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right]. \quad (72)$$

Мы видим, что момент импульса действует на радиальное движение как некоторая эффективная потенциальная энергия отталкивания: мы должны совершить внешнюю работу над частицей, чтобы переместить ее с большего расстояния на меньшее, если мы требуем, чтобы в этом процессе момент импульса сохранялся постоянным.

Сравните этот результат с тем, который получается, когда частица вращается на нити, свободно наматывающейся на гладкий закрепленный стержень конечного диаметра. Почему, когда нить наматывается, в этом случае кинетическая энергия постоянна?

*Форма Галактики.* Результат, полученный в рассмотренном примере, очевидно, может быть использован для объяснения формы Галактики. Рассмотрим очень большую массу  $M$  газа, обладающую



первоначально некоторым моментом импульса \*). Газ сжимается в результате гравитационного взаимодействия. Так как объем, занимаемый газом, становится меньше, сохранение момента импульса требует увеличения угловой скорости. Но мы только что видели, что для увеличения угловой скорости должна быть совершена работа. Откуда же возьмется кинетическая энергия? Она может быть получена только за счет гравитационной энергии

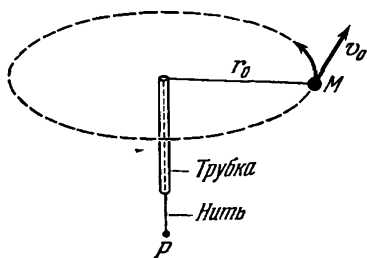


Рис. 6.22. Масса  $M$  совершает круговое движение по окружности радиусом  $r_0$  со скоростью  $v_0$ . Эта масса соединена с нитью, проходящей через трубку. Расстояние  $r_0$  может быть уменьшено, если потянуть за конец нити  $P$ .

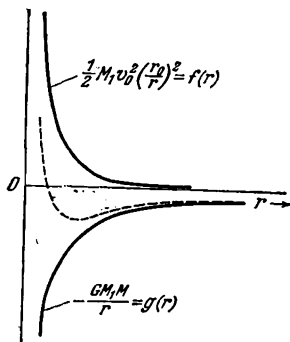


Рис. 6.23. Сжатие Галактики в плоскости, перпендикулярной к  $J$ , ограничено вследствие того, что центробежная «потенциальная энергия»  $f(r)$  возрастает при  $r \rightarrow 0$ . Поэтому  $f(r) + g(r)$  имеет минимум при конечном значении  $r$  (пунктирная кривая).

газа. Частица массы  $M_1$  из внешней области Галактики будет обладать гравитационной потенциальной энергией благодаря взаимодействию частицы с Галактикой, порядок величины которой составляет

$$-\frac{GM M_1}{r}, \quad (73)$$

где  $r$  — расстояние от центра Галактики и  $M$  — масса Галактики. Эффективная потенциальная энергия, связанная с моментом импульса, зависит от  $r$  (рис. 6.23), как это видно из (72).

Сумма (72) и (73) обладает экстремальным значением (что является необходимым условием равновесия), когда

$$\frac{d}{dt} \left[ -\frac{GM M_1}{r} + \frac{1}{2} M_1 v_0^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] = 0 \quad (74)$$

или когда

$$\left. \begin{aligned} \frac{GM M_1}{r^2} - M_1 v_0^2 \frac{r_0^2}{r^3} &= 0, \\ r &= \frac{v_0^2 r_0^2}{GM} = \frac{v^2 r^2}{GM}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

\*) В настоящее время при современном уровне знаний мы не можем сказать, откуда в данном месте появился газ или почему данная масса газа обладает моментом импульса. Массы, не обладающие моментом импульса, будут конденсироваться и принимать сферическую форму.

При значениях  $r$  меньших, чем это следует из (75), одной гравитационной энергии уже недостаточно для того, чтобы продолжалось сжатие. Из уравнений (75) следует, что при  $r = r_0$  сила притяжения  $GMM_1/r^2$  равна центробежной силе  $M_1 v^2/r$ .

Облако газа или звезд может сплющиваться в направлении, параллельном оси полного момента импульса, без изменения величины импульса. Сжатие вызывается гравитационным притяжением; энергия, приобретаемая при сжатии, должна каким-то образом рассеиваться, и можно считать, что это рассеяние происходит

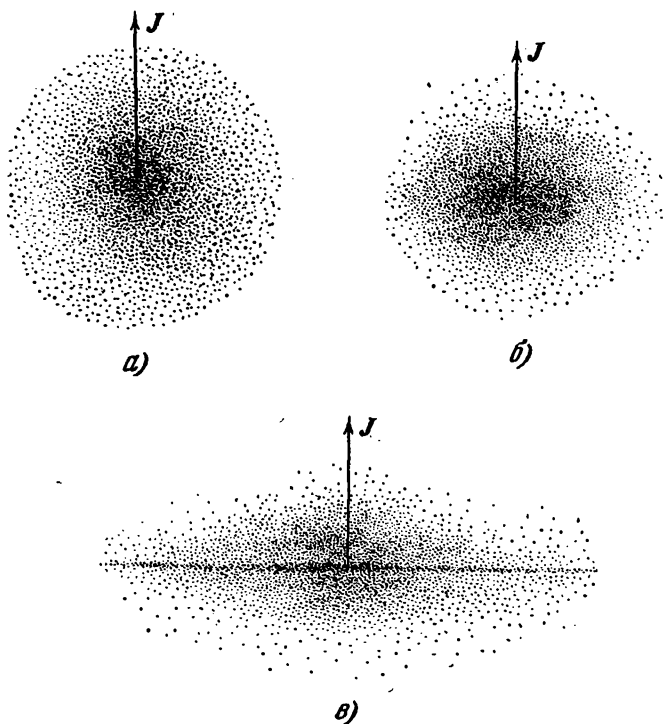


Рис. 6.24. Сначала облако газа (а), затем Галактика (б) начинает сплющиваться и, наконец, принимает форму блина с более или менее сферическим центральным ядром (в).

за счет излучения. Поэтому облако может довольно сильно сплющиться в направлении, параллельном  $J$ , а сжатие в экваториальной плоскости ограничено. Такая модель эволюции Галактики была предложена Хабблом; однако некоторые недавние исследования заставляют считать, что эта модель слишком упрощена. Диаметр нашей Галактики порядка  $3 \cdot 10^4$  парсеков, или  $10^{23}$  см (1 парсек =  $= 3,084 \cdot 10^{18}$  см). Толщина Галактики в окрестности Солнца в известной степени зависит от того, как определять эту толщину, однако громадное большинство звезд группируется вблизи средней

плоскости и обладает толщиной в несколько сотен парсеков. Таким образом, Галактика в общем сильно сплюснута. Масса Галактики приблизительно в  $2 \cdot 10^{11}$  раз больше массы Солнца и составляет  $(2 \cdot 10^{11})(2 \cdot 10^{33}) \approx 4 \cdot 10^{44}$  г.

Массу Галактики можно оценить и из соотношений (75), если подставить в него известные значения  $v$  и  $r$  для Солнца. Солнце находится по направлению к внешнему краю Галактики на расстоянии около  $10^4$  парсеков  $\approx 3 \cdot 10^{22}$  см от оси Галактики. Орбитальная скорость Солнца относительно центра Галактики составляет приблизительно  $3 \cdot 10^7$  см/сек, поэтому из (75) мы можем оценить массу Галактики:

$$M = \frac{v^2 r}{G} \approx \frac{(10^{16})(3 \cdot 10^{22})}{7 \cdot 10^{-8}} \text{ г} \approx 4 \cdot 10^{44} \text{ г.} \quad (76)$$

Производя эту оценку, мы пренебрегли влиянием масс, расположенных на большем расстоянии от центра Галактики, чем Солнце.

#### 6.4. Момент импульса Солнечной системы

На рис. 6.25 приведены моменты импульса некоторых составных частей Солнечной системы. Попробуем просто для контроля самих себя оценить какой-нибудь из приведенных на рис. 6.25 значений моментов импульса. Возьмем, например, планету Нептун, орбита которой очень близка к круговой. Среднее расстояние Нептуна от Солнца, приведенное в одной из работ,  $2,8 \cdot 10^9$  миль  $\approx 5 \cdot 10^9$  км  $\approx 5 \cdot 10^{14}$  см. Период обращения Нептуна относительно Солнца составляет 165 лет  $\approx 5 \cdot 10^9$  сек. Масса Нептуна около  $1 \cdot 10^{29}$  г. Момент импульса Нептуна относительно Солнца равен

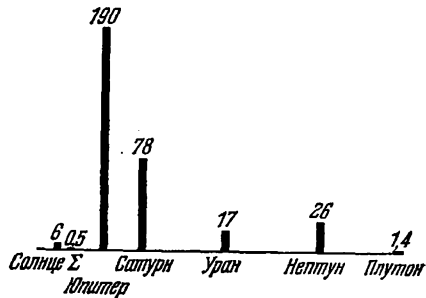


Рис. 6.25. Распределение момента импульса в Солнечной системе относительно центра Солнца. Символом  $\Sigma$  обозначена сумма моментов импульса Меркурия, Венеры, Земли и Марса. Обратите внимание на относительно малый вклад вращения Солнца вокруг его собственной оси (диаграмма построена в единицах  $10^{48} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}$ ).

$$J = Mvr = M \frac{2\pi r}{T} r \approx \frac{10^{29} \cdot 6 \cdot (25 \cdot 10^{28})}{5 \cdot 10^9} \approx 30 \cdot 10^{48} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}, \quad (77)$$

что, в общем, хорошо согласуется со значением  $26 \cdot 10^{48} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}$ , указанным на рис. 6.25. Направление  $J$  приблизительно одинаково для всех больших планет. Момент импульса Нептуна относительно его собственного центра масс значительно меньше. Момент импульса вращающейся однородной сферы порядка  $MvR$ , где  $v$  — линейная скорость точки на поверхности и  $R$  — радиус сферы. В действительности, однако, вследствие того, что масса сферы не

с-концентрирована в точке, находящейся на расстоянии  $R$  от оси вращения, а распределена определенным образом относительно оси вращения, этот результат должен быть уменьшен для случая однородного распределения путем умножения на числовой коэффициент  $2/5$  (см. гл. 8). Поэтому

$$J_{ц.м} = \frac{2}{5} \frac{2\pi M R^3}{T}, \quad (78)$$

где  $T \equiv 2\pi R/v$  означает период обращения планеты относительно ее собственной оси. Для Нептуна  $T \approx 16 \text{ ч} \approx 6 \cdot 10^4 \text{ сек}$  и  $r \approx 1,5 \cdot 10^4 \text{ миль} \approx 2,4 \cdot 10^9 \text{ см}$ . Таким образом, находим

$$J_{ц.м} \approx \frac{0,4 \cdot 6 \cdot 10^{29} \cdot (6 \cdot 10^{18})}{6 \cdot 10^4} \approx 2 \cdot 10^{43} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}. \quad (79)$$

Эта величина мала по сравнению со значением момента импульса относительно Солнца, приведенным выше в соотношении (77).

Аналогичная оценка величины  $J_{ц.м}$  для Солнца дает  $6 \cdot 10^{48} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}$ . Если принять во внимание вращение Солнца относительно оси, проходящей через его центр, то момент импульса Солнечной системы изменится всего лишь на 2%. Любая горячая звезда может обладать моментом импульса в 100 раз больше, чем Солнце. Таким образом, можно предполагать, что при образовании планетной системы момент импульса заимствуется от остывающей звезды. Если каждая звезда образует планетную систему, проходя подобно Солнцу через все стадии своей истории, то в нашей Галактике может существовать свыше  $10^{10}$  звезд с планетами.

### 6.5. Внутренний момент импульса элементарных частиц

Из опытных данных, которые подробно рассматриваются в т. IV, известно, что элементарные частицы обладают внутренним моментом импульса  $J_{ц.м}$ . Внутренний момент импульса обычно называется *спином момента импульса*. Спин момента импульса элементарных частиц обозначается символом  $S$  и измеряется в единицах, равных

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0542 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек},$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка. Мы видим, что размерность постоянной  $\hbar$  точно такая же, как и момента импульса  $Mvr$ . Значения  $S$  для некоторых элементарных частиц приведены ниже в таблице.

Частица	Спин момента импульса, $S$	Частица	Спин момента импульса, $S$
Электрон	1/2	$\mu^\pm$ -мезон	1/2
Фотон	1	$\pi^\pm, \pi^0$ -мезон	0
Нуклон (протон или нейтрон)	1/2	$\Lambda^0$ -гиперон	1/2
Нейтрино	1/2	$K^\pm, K^0$ -мезон	0

## Задачи

1. **Момент импульса спутника.** а) Чему равен момент импульса (относительно центра орбиты) спутника Земли массой  $M_c$ , который движется по круговой орбите радиусом  $r$ ? Результат выразить через  $r$ ,  $G$ ,  $M_c$  и  $M_3$ .

О т в е т.  $J = (GM_3 M_c^2 r)^{1/2}$ .

б) Вычислить момент импульса (в единицах системы СГС) массы  $M_c = 100$  кг для орбиты, радиус которой в два раза больше радиуса Земли.

2. **Влияние трения на движение спутника.** а) Какое влияние оказывает трение при движении спутника в атмосфере по круговой (или близкой к круговой) орбите? Почему трение увеличивает скорость спутника?

б) Увеличивает или уменьшает трение момент импульса спутника, измеренный относительно центра Земли? Почему?

3. **Соотношение между энергией и моментом импульса для спутника.** Выразить кинетическую, потенциальную и полную энергию спутника массой  $M$ , движущегося по круговой орбите радиусом  $r$ , через момент импульса  $J$ .

О т в е т.  $K = \frac{J^2}{2Mr^2}$ ;  $U = -\frac{J^2}{Mr^2}$ ;  $E = -\frac{J^2}{2Mr^2}$ .

4. **Электрон, вращающийся вокруг протона.** Электрон движется вокруг протона по круговой орбите, радиус которой равен  $r = 0,5 \text{ \AA} = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ .

а) Чему равен орбитальный момент импульса электрона относительно протона?

О т в е т.  $1 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ .

б) Чему равна полная энергия, выраженная в эргах и электрон-вольтах?

5. **Момент внутренних сил.** Рассмотрим изолированную систему, состоящую из трех частиц 1, 2 и 3 (показанных на рис. 6.26), силы взаимодействия между которыми можно считать центральными:  $F_{12} = 1 \text{ дин}$ ,  $F_{13} = 0,6 \text{ дин}$ ,  $F_{23} = 0,75 \text{ дин}$ , где  $F_{ij}$  означает силу, с которой частица  $i$  действует на частицу  $j$ .

а) Подробно выпишите все силы, разложив их на компоненты в соответствующей системе координат, и покажите, что момент внутренних сил равен нулю:

$$N_{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = 0.$$

б) Покажите, что такой же результат получится, если в произведении поменять индексы и произвести суммирование  $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$ .

6. **Давление лестницы на стену.** Лестница, масса которой 20 кг и длина 10 м, приставлена к гладкой стене под углом  $30^\circ$  к вертикали. Между полом и лестницей существует трение. Чему равна сила (в динах), с которой лестница давит на стену? (У к а з а н и е: используйте тот факт, что момент сил должен быть равен нулю, когда лестница находится в покое.)

О т в е т.  $5,6 \cdot 10^6 \text{ дин}$ .

7. **Кинетическая энергия при вращательном движении.** Чему равна кинетическая энергия вращательного движения (в эргах) тонкого круглого обруча радиусом 1 м, плотность которого на единицу длины равна 1 г/см, вращающегося со скоростью 100 об/сек относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости?

8. **Момент импульса Луны.** Сравните величину момента импульса Луны на ее орбите вокруг Земли с величиной момента импульса Луны при вращении вокруг ее собственной оси, равной

$$\frac{2}{3} M \omega R_{\text{Л}}^2.$$

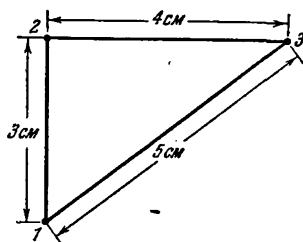


Рис. 6.26.

9. Момент импульса при сближении двух частиц. Нейтрон с энергией  $1 \text{ Мэв}$  пролетает мимо протона на таком расстоянии, что момент импульса нейтрона относительно протона равен около  $10^{-26} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ . Чему равно самое близкое расстояние, на котором нейтрон пролетает мимо протона? (Энергией взаимодействия между обеими частицами можно пренебречь.)

О т в е т.  $4 \cdot 10^{-12} \text{ см}$ .

10. Момент импульса линейного движения. Частица массой  $M$  движется со скоростью  $v_1 = v \hat{x}$  вдоль прямой линии, уравнение которой  $y = y_1$ . В момент времени  $t=0$  частица находится в точке с координатами  $(0, y_1)$ .

а) Вычислить момент импульса частицы относительно начала координат.

О т в е т. —  $Mvy_1 \hat{z}$ .

б) Вычислить полный момент импульса относительно точки с координатами  $(0, y_2)$ , где  $y_2 < y_1$ .

11. Столкновение двухатомной частицы с одноатомной. Две одинаковые массы соединены между собой жестким стержнем, длина которого  $a$  и массой которого можно пренебречь. Центр массы этой гантелеподобной системы расположен в пространстве, свободном от действия силы тяжести. Система вращается относительно центра масс с угловой скоростью  $\omega$ . Одна из вращающихся масс сталкивается с третьей частицей, масса которой также равна  $M$ , и прилипает к ней.

а) Найти центр тяжести системы, состоящей из трех частиц, в момент, предшествующий столкновению. Чему равна скорость центра масс?

б) Чему равен момент импульса системы, состоящей из трех масс, относительно центра масс в момент, предшествующий столкновению? в момент, следующий за столкновением?

в) Чему равна угловая скорость системы относительно центра масс после столкновения?

г) Чему равны начальное и конечное значения кинетической энергии?

12. Момент импульса мяча на привязи. Цель игры в мяч на привязи состоит в том, чтобы достаточно сильными и точными ударами по мячу заставить веревку,

к которой привязан мяч и другой конец которой укреплен на конце вертикального шеста, намотаться на этот шест в одном направлении; второй игрок может таким же способом намотать

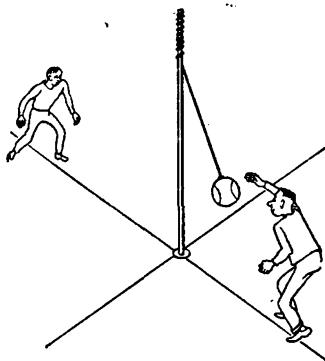


Рис. 6.27.

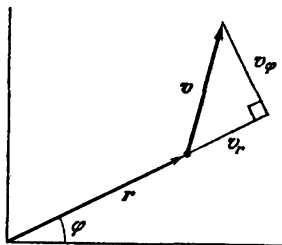


Рис. 6.28.

веревку в другом направлении. Эта игра очень оживленная, и динамика движения мяча достаточно сложна. Будем рассматривать более простой случай движения, при котором мяч движется в горизонтальной плоскости по спирали уменьшающегося радиуса и веревка наматывается на шест после одного удара, придающего мячу начальную скорость  $v_0$ . Длина веревки  $l$  и радиус шеста  $a \ll l$  (рис. 6.27).

а) Что такое мгновенный центр вращения?

б) Существует ли момент вращения относительно оси, проходящей через центр шеста? Сохраняется ли постоянным момент импульса?

в) Вычислить скорость как функцию времени, допуская, что кинетическая энергия сохраняется постоянной.

г) Чему равна угловая скорость после того, как мяч совершит пять полных оборотов?

О т в е т .

$$\omega = \frac{(l - 10\pi a) v_0}{a^2 + (l - 10\pi a)^2}.$$

13. Потенциальная энергия центробежных сил. В этой задаче удобно использовать плоские полярные координаты  $r$  и  $\varphi$  для движения в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (рис. 6.28).

а) Покажите, что в этой системе координат скорость будет иметь вид

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

где  $v_r = dr/dt$  представляет собой скорость изменения длины вектора  $\mathbf{r}$ , а  $v_\varphi = r d\varphi/dt$ .

б) Покажите, что кинетическая энергия частицы в этой системе координат имеет вид

$$K = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2),$$

где  $\omega = d\varphi/dt$ .

в) Покажите, что полная энергия равна

$$E = U(r) + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2Mr^2},$$

где  $J$  — момент импульса частицы относительно закрепленной оси, перпендикулярной к плоскости движения. (**В к а з а н и е**: вспомните уравнение (72).)

г) Если сила, действующая на частицу, является центральной, то ее момент равен нулю и момент импульса при движении сохраняется постоянным. Величина  $J^2/2Mr^2$  иногда называется потенциальной энергией центробежных сил. Покажите, что эта величина соответствует действию радиальной силы, равной  $J^2/Mr^3$  и направленной наружу.

д) Покажите, что если  $U(r) = \frac{1}{2} Cr^2$ , то  $U(r)$  соответствует действию радиальной силы, равной  $-Cr$  и направленной внутрь.

е) Покажите из г) и д), что равновесие этих сил эквивалентно условию  $\omega^2 = C/M$ .

14. Выражение для момента импульса. Покажите, что если  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{N}$  отнесены к центру масс, совпадающему с началом координат, то существует соотношение  $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$ , даже если центр масс обладает переменной скоростью  $\mathbf{v}(t)$  относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

#### Д о п о л н е н и е. Столкновение метеоритов с атмосферой

Метеориты представляют собой небольшие тела (рис. 6.29) в межпланетном пространстве, движущиеся по замкнутым орбитам вокруг Солнца и время от времени случайно пролетающие сквозь атмосферу Земли, производя при этом видимое глазом свечение. При проникновении метеоритов в атмосферу Земли их движение замедляется вследствие обмена импульсами между ними и молекулами воздуха, с которыми они сталкиваются. Когда среднее расстояние летящей молекулы между двумя соударениями (средняя длина свободного пробега) велико по сравнению с линейными размерами метеорита, задача о замедлении решается как задача об индивидуальных столкновениях молекул воздуха с метеоритами, а не как задача классической газодинамики.

а) Выведем соотношение для замедления, выразив его через массу  $M$ , скорость  $v$  и эффективное поперечное сечение  $\sigma^*$  метеорита, исходя из грубого допущения, что начальная скорость молекул мала по сравнению с  $v$ . Это вполне обоснованное

\* Если мы говорим, что метеорит обладает эффективным поперечным сечением, мы имеем в виду, что, когда метеорит проходит какое-то расстояние  $x$ , он испытывает столько столкновений, сколько молекул содержится в объеме  $Sx$ .

предположение, так как в противном случае молекулы воздуха должны были бы выходить за пределы атмосферы. Покажите, что

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\Gamma S \rho v^2}{M},$$

где  $\rho$  — плотность атмосферы и  $\Gamma$  — численный коэффициент порядка единицы. Значение  $\Gamma$  будет зависеть от того, будем ли мы считать столкновения упругими или неупругими. Допустим, что столкновения являются неупругими, при которых молекулы прилипают к метеоритам. Если хотите, можно считать, что метеорит представляет собой кубик, грань которого перпендикулярна направлению движения.

б) Масса метеоритов уменьшается либо в результате откалывания отдельных кусочков, либо вследствие испарения. Используя принцип сохранения энергии, выведите выражение для скорости уменьшения массы, выразив ее через скорость,



Рис. 6.29. 95-фунтовый осколок метеорита из Каньона Дьявола. Его размер — около 30 см в диаметре. (Фото Национальной лаборатории в Брукхейвене)

массу и плотность метеорита, а также через плотность воздуха. Используйте величину  $\zeta$  для обозначения постоянной, выражающей количество энергии, требуемое для потери 1 г массы метеоритного вещества одним из возможных способов, и величину  $\Lambda$  для обозначения коэффициента, характеризующего эффективность обмена энергией между молекулами воздуха и метеоритом. В этом случае можно пренебречь кинетической энергией, теряемой при замедлении. Приближенный результат имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\Lambda M^{2/3} \rho v^3}{2\zeta \rho_m^{2/3}},$$

где  $\rho_m$  — плотность метеорита и сделано допущение о том, что  $S \equiv (M/\rho_m)^{2/3}$ . Это допущение не совсем точно.

в) Оцените из а) порядок величины  $dv/dt$  для правдоподобных значений соответствующих величин. Используйте значение плотности  $\rho = 8 \cdot 10^{-10}$  г/см<sup>3</sup> на высоте 100 км. На этой высоте средняя длина свободного пробега молекул N<sub>2</sub> составляет около 10 см. Эти данные можно найти в обычных справочниках.



**ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР**

Колебание гармонического осциллятора является очень важным примером периодического движения и может служить точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. К числу классических систем, аналогичных гармоническому осциллятору, могут быть отнесены любые системы, которые, будучи слегка выведены из положения равновесия, совершают устойчивые колебания. К ним относятся:

1. Математический маятник в пределах малых углов отклонения.

2. Масса на пружине в пределах малых амплитуд колебаний.

3. Электрический контур, состоящий из самоиндукции и емкости, для токов или напряжений столь малых, что элементы контура можно считать линейными.

Электрический или механический элемент контура может считаться линейным, если смещение из положения равновесия прямо пропорционально возбуждающей силе. Большинство явлений в физике (не все из которых представляют интерес) могут считаться линейными, если рассматриваемая область достаточно мала, и большинство кривых, с которыми приходится иметь дело, в небольших пределах могут считаться прямыми линиями.

Наиболее важными свойствами гармонического осциллятора являются следующие:

1. Частота колебаний не зависит от амплитуды.

2. Если действуют несколько возбуждающих сил, то эффект их суммарного действия может быть получен в результате сложения эффектов от каждой силы в отдельности (принцип суперпозиции).

Эти свойства гармонического осциллятора мы и рассмотрим в данной главе. Мы познакомимся как со свободным, так и с вынужденным движением, а также учтем влияние трения и небольшой ангармоничности или нелинейного взаимодействия, которые могут иметь место в системе. Кроме того, мы постараемся разобраться в том, что происходит, когда система уже не может считаться линейной.

## 7.1. Математический маятник

Математический маятник состоит из материальной точки массы  $M$ , расположенной на нижнем конце невесомого стержня длиной  $L$ , свободно вращающегося вокруг оси, проходящей через его верхний конец (рис. 7.1). Наша задача заключается в том, чтобы найти частоту собственных колебаний маятника. Самый простой

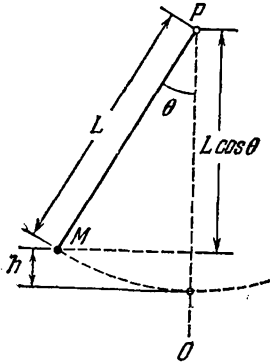


Рис. 7.1 Математический маятник состоит из материальной точки массой  $M$ , расположенной на конце невесомого стержня длиной  $L$ . Маятник совершает колебания, вращаясь относительно оси, проходящей через точку  $P$  и перпендикулярной к плоскости чертежа. Линия  $OP$  вертикальна.

путь решения этой задачи состоит в том, чтобы написать в соответствующем виде второй закон динамики  $F=Ma$ . Это может быть сделано так же, как и в задаче 6. Однако очень поучительно попытаться решить эту задачу, исходя из закона сохранения энергии. Чтобы получить уравнения (18)—(22), можно также исходить и из момента импульса. Отклонения маятника будем измерять углом  $\theta$ , который стержень образует с вертикалью.

Как видно из рис. 7.1, когда стержень отклонен на угол  $\theta$ , его нижний конец поднимается на величину

$$h = L - L \cos \theta. \quad (1)$$

Потенциальная энергия массы  $M$  в гравитационном поле Земли равна

$$U(h) = Mgh. \quad (2)$$

При этом неотклоненному положению приписывается нулевое значение потенциальной энергии. Подставляя (1) в (2), получаем

$$U(\theta) = MgL(1 - \cos \theta), \quad U(0) = 0. \quad (3)$$

Кинетическая энергия маятника равна

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} ML^2\dot{\theta}^2, \quad (4)$$

где  $v=L\dot{\theta}$  означает скорость, выраженную через скорость изменения угла отклонения. Полная энергия равна

$$E = K + U = \frac{1}{2} ML^2\dot{\theta}^2 + MgL(1 - \cos \theta). \quad (5)$$

Из закона сохранения энергии известно, что эта сумма должна сохраняться постоянной. Мы воспользуемся этим фактом, чтобы получить выражение для частоты движения, хотя возможно, что многие предпочтут более короткий путь получения уравнений (18)—(22), приведенных ниже. Если принять во внимание соотношение (рис. 7.2)

$$\cos \theta \cong 1 - \frac{1}{2} \theta^2, \quad (6)$$

то для  $\theta \ll 1$  рад мы можем, вместо (5), для энергии написать следующее приближенное соотношение:

$$E \approx \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} MgL\theta^2. \quad (7)$$

Решая это уравнение относительно  $\dot{\theta}$ , находим

$$\frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{g}{L} \right)^{1/2} \left( \frac{2E}{MgL} - \theta^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Обозначим конечные (поворотные) точки движения через  $-\theta_0$  и  $\theta_0$ ; тогда амплитуда колебаний будет равна  $\theta_0$ . В этих точках маятник

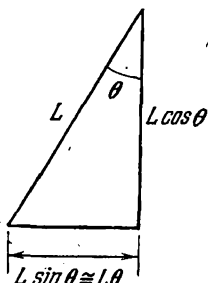


Рис. 7.2. Из теоремы Пифагора и выражения для бинорма Ньютона вытекает, что

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \text{ для } \theta \ll 1 \text{ рад.}$$

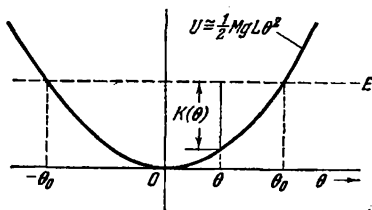


Рис. 7.3. Маятник совершает колебания в пределах от  $-\theta_0$  до  $+\theta_0$ . В этих «поворотных точках»  $K=0$  и  $U=E$ . При  $\theta=0$   $U=0$  и  $K=E$ . Для  $\theta \ll 1$  рад

$$U \approx \frac{1}{2} MgL \theta^2.$$

на мгновение остается в покое, и его кинетическая энергия в эти моменты равна нулю (рис. 7.3). Из (7) при  $\dot{\theta}=0$  мы получаем

$$E = \frac{1}{2} MgL\theta_0^2, \quad \theta_0^2 = \frac{2E}{MgL}. \quad (9)$$

Таким образом, мы можем переписать (8) в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{g}{L} \right)^{1/2} (\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2} \quad (10)$$

или

$$\frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}} = \left( \frac{g}{L} \right)^{1/2} dt. \quad (11)$$

Этот вид удобен для интегрирования.

Если начальное условие или фаза движения таковы, что при  $t=0$   $\theta=\theta_0$ , то

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}} = \left( \frac{g}{L} \right)^{1/2} \int_0^t dt. \quad (12)$$

Интеграл, стоящий слева, элементарен и легко вычисляется:

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}} = \left[ \arcsin \frac{\theta}{\theta_0} \right]_{\theta_1}^{\theta} = \arcsin \frac{\theta}{\theta_0} - \arcsin \frac{\theta_1}{\theta_0} = \left( \frac{g}{L} \right)^{1/2} t. \quad (13)$$

Так как  $\sin \arcsin \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta}{\theta_0}$ , то мы можем переписать (13) в виде

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \sin \left[ \left( \frac{g}{L} \right)^{1/2} t + \arcsin \frac{\theta_1}{\theta_0} \right] \quad (14)$$

или

$$\theta = \theta_0 \sin (\omega_0 t + \varphi), \quad (15)$$

где мы можем для угловой частоты  $\omega_0$  и фазы  $\varphi$  написать, что

$$\omega_0 = \left( \frac{g}{L} \right)^{1/2}, \quad \varphi = \arcsin \frac{\theta_1}{\theta_0}. \quad (16)$$

Здесь  $\varphi$  — постоянная движения. Хотя эта величина имеет размерность угла, ее нельзя наглядно изобразить в виде какого-то угла. Читатель должен различать три угловые величины  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\varphi$ :

1.  $\theta_0$  — максимальная амплитуда колебаний.

2.  $\theta_1$  — угол, при котором движение начинается в момент времени  $t=0$ . Маятник может быть приведен в движение из положения  $\theta=\theta_1$  либо с нулевой, либо с некоторой начальной скоростью. В зависимости от этого  $\theta_0$  будет иметь то или иное значение.

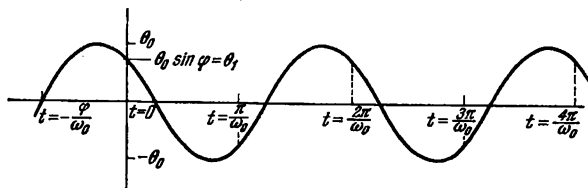


Рис. 7.4. График зависимости функции  $\theta = \theta_0 \sin (\omega_0 t + \varphi)$  от  $t$ . По прошествии промежутка времени, соответствующего полному периоду колебания, равному  $2\pi/\omega_0$ , функция принимает то же самое значение. Значение функции  $\theta$  при  $t=0$  обозначено через  $\theta_1$  и равно  $\theta_1 = \theta_0 \sin \varphi$ . Зная  $\varphi$ , можно вычислить величину  $\theta_1$ . Величину  $\theta_0$  мы называем *амплитудой* колебания, а  $\varphi$  — *фазой* колебания.

3. Угол  $\varphi$ , вообще говоря, не является углом в обычном смысле, и его нельзя указать при движении осциллятора. Он зависит от  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и представляет собой соответствующую поправку к выражению  $\theta = \theta_0 \sin \omega_0 t$ , когда движение начинается не со значения  $\theta_1 = 0$ . Из соответствующих начальных условий мы можем найти значение  $\varphi$  из (16) (рис. 7.4).

Символом  $\omega_0$  часто обозначается угловая частота собственного или свободного движения колеблющейся системы. Индекс «нуль» при  $\omega$  не имеет отношения к моменту времени  $t=0$ . Угловая частота  $\omega_0$ \*) связана с частотой  $f_0$  свободных колебаний маятника

\*) Часто мы будем называть угловую частоту просто частотой. Так поступают многие физики, и это не приводит к путанице. Использование символа  $\omega$  вместо  $f$  или  $\nu$  означает, что речь идет о величине, имеющей смысл угловой частоты. Численные значения  $\nu$  и  $f$  обычно выражают в оборотах в секунду; значение  $\omega$  выражают в радианах в секунду или просто в  $\text{сек}^{-1}$ , подразумевая при этом радианы в секунду. Радиан представляет собой безразмерную величину. Таким образом, мы будем различать эти величины по их размерности и выражать  $\nu$  в колебаниях в секунду или в оборотах в секунду, а угловую частоту  $\omega$  — в радианах в секунду. Обе эти величины имеют размерность  $\text{сек}^{-1}$ .

соотношением

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{(g/L)^{1/2}}{2\pi}. \quad (17)$$

Задачу о математическом маятнике мы можем решить также и исходя из уравнений движения. Уравнение (10) было получено из закона сохранения энергии, записанного в виде соотношения (5). Отметим, что уравнение (10) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируя которое один раз, мы получили соотношение (14). Уравнение же движения, как это будет ясно из дальнейшего, представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. И для того, чтобы найти выражение для угла отклонения, его нужно проинтегрировать дважды. Поэтому ясно, что применение закона сохранения энергии очень часто может избавить нас от одного интегрирования.

Расположим ось  $x$  перпендикулярно плоскости движения (рис. 7.5). Момент  $N_x$ , создаваемый силой тяжести  $F=Mg$ , относительно точки подвеса маятника равен

$$N_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x = LMg \sin \theta. \quad (18)$$

Момент импульса  $J_x$  относительно той же точки равен

$$J_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_x = -ML^2\dot{\theta}, \quad (19)$$

где  $p = ML\dot{\theta}$  представляет собой импульс. Из гл. 6 мы знаем, что скорость изменения момента импульса равна моменту действующей силы, т. е.

$$ML^2\ddot{\theta} = -LMg \sin \theta. \quad (20)$$

Отсюда для уравнения движения получаем

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (21)$$

В пределе, при  $\theta \ll 1$ , т. е. при малых углах отклонения, мы можем приближенно заменить  $\sin \theta$  на  $\theta$ , и тогда (21) примет вид

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0.} \quad (22)$$

Это соотношение представляет собой уравнение движения гармонического осциллятора, угловая частота которого равна

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2}. \quad (23)$$

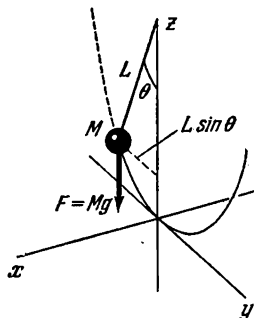


Рис. 7.5. Маятник колеблется в плоскости  $yz$ . На массу  $M$  в направлении  $-z$  действует сила тяжести, равная  $Mg$ . Момент  $N_x$  этой силы относительно оси  $x$  равен  $*MgL \sin \theta$ .

Для того чтобы убедиться в этом, укажем, что полученный нами результат (15) или любая линейная комбинация  $\sin \omega_0 t$  или  $\cos \omega_0 t$  является решением уравнения (22). Из (15) получаем

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (24)$$

$$\dot{\theta} = \theta_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (25)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (26)$$

Подставляя (24) и (26) в (22), находим

$$-\omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{g}{L} \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0, \quad (27)$$

что согласуется с (23), если положить  $\omega_0^2 = g/L$ .

Все расчеты значительно упрощаются, если воспользоваться соотношением

$$\theta = \theta_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (28)$$

Тогда

$$\dot{\theta} = i\omega_0 \theta_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} = i\omega_0 \theta, \quad (29)$$

$$\ddot{\theta} = i\omega_0 \dot{\theta} = (i\omega_0)^2 \theta = -\omega_0^2 \theta. \quad (30)$$

Мы видим, что (30) в точности совпадает с (22), если  $\omega_0^2 = g/L$ .

Таким образом, как (24), так и (28) удовлетворяют уравнению движения (22). Какое же из этих двух решений является правильным? Ответ гласит, что соотношение (24) является правильным физическим решением, дающим значение угла отклонения маятника в зависимости от времени  $t$ . Уравнение (28) выглядит «нефизически», так как содержит мнимую величину  $i$ . При решении уравнения движения с помощью комплексных величин (что с математической стороны иногда бывает легче) мы должны помнить, что в конце мы берем реальную часть для того, чтобы получить решение, имеющее физический смысл. Заметим, что реальная часть (28) в действительности и выражает соотношение (24), и поэтому (28) также является правильным решением.

**П р и м е р. Нелинейные эффекты.** Теперь мы рассмотрим маятник, который колеблется с амплитудой настолько большой, что мы не можем пренебрегать членом, содержащим  $\theta^3$  в разложении в ряд  $\sin \theta$ , как мы это делали выше в (22). Какое влияние на движение маятника оказывает член, содержащий  $\theta^3$ ? Это элементарный пример ангармонического осциллятора. Ангармонические, или нелинейные, задачи обычно с трудом поддаются точному решению (за исключением тех случаев, когда используются электронно-вычислительные машины), однако во многих случаях приближенные решения дают нам достаточно ясное представление о рассматриваемом явлении. Разложение  $\sin \theta$  в ряд с сохранением членов, содержащих  $\theta^3$ , обычно называемое «разложением до порядка  $\theta^3$ », имеет вид

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6} \theta^3 + \dots \quad (31)$$

В этом случае порядок уравнения движения (21) также повышается:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^3}{6}\theta^3 = 0, \quad (32)$$

где  $\omega_0^2$  равняется  $g/L$ . Уравнение (32) представляет собой уравнение движения *ангармонического осциллятора*.

Мы можем найти приближенное решение уравнения (32) в виде

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t + \varepsilon \theta_0 \sin 3\omega t, \quad (33)$$

где  $\varepsilon$  — безразмерная постоянная, значительно меньшая единицы, если  $\theta_0 \ll 1$ .

В этом случае мы видим, что движение приближенно (или точно — мы еще не знаем этого!) может быть представлено как наложение двух различных движений:  $\sin \omega t$  и  $\sin 3\omega t$ . Присутствие члена  $\sin 3\omega t$  можно понять, если воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$\sin^3 x \equiv \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x. \quad (34)$$

Таким образом, член  $\theta^3$  в дифференциальном уравнении (32) приводит к появлению в решении члена  $\sin 3\omega t$ . Для того чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению, содержащему  $\theta^3$ , мы должны были к члену, содержащему  $\sin \omega t$ , прибавить член  $\varepsilon \sin 3\omega t$ . Рассуждая далее подобным образом, мы придем к выводу, что новый член  $\varepsilon \sin 3\omega t$  в частном решении (33), будучи возведен в куб, приведет к появлению члена  $\varepsilon^3 \sin 9\omega t$ , и т. д. Очевидно, нет оснований для того, чтобы этот процесс прекратился, но если  $\varepsilon \ll 1$ , то ряд будет быстро сходиться, так как в члены, соответствующие высоким частотам, в качестве множителей будут входить все более и более высокие степени  $\varepsilon$ .

Теперь ясно, что в лучшем случае (33) можно считать только приближенным решением. Нам остается определить  $\varepsilon$ , а также  $\omega$ ; при малых амплитудах частота  $\omega$  должна стремиться к  $\omega_0$ , а при больших амплитудах эта величина будет иметь другое значение. Для простоты мы предположим, что при  $t=0$   $\theta=0$ .

Такого типа приближенное решение дифференциального уравнения называется решением методом возмущения, потому что один из членов дифференциального уравнения «возмущает» движение, описываемое уравнением, не содержащим этого члена.

Как вы видели, мы получили решение в виде (33), основываясь лишь на догадках. Довольно легко проверить, насколько правильны эти догадки, и отбросить те из них, которые окажутся неправильными. Из (33) мы находим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\omega^2\theta_0 \sin \omega t - 9\omega^2\varepsilon\theta_0 \sin 3\omega t, \\ \theta^3 &= \theta_0^3 (\sin^3 \omega t + 3\varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t + \dots), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где отброшены члены, содержащие  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^3$ , вследствие нашего допущения о том, что мы будем искать решение при  $\varepsilon \ll 1$ . Принимая во внимание тригонометрическое тождество (34), мы можем

переписать (32) в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\omega^2 \theta_0 \sin \omega t - 9\omega^2 \varepsilon \theta_0 \sin 3\omega t, \\ \omega_0^2 \theta &= +\omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \varepsilon \theta_0 \sin 3\omega t, \\ -\frac{1}{6} \omega_0^2 \theta^3 &= -\frac{3\omega_0^2}{24} \theta_0^3 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24} \theta_0^3 \sin 3\omega t - \\ &\quad -\frac{\omega_0^2}{2} \theta_0^3 \varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Сложим теперь почленно эти три уравнения. Тогда, в соответствии с (32), сумма членов слева должна быть равна нулю. Если (33) является решением уравнения (32) для любого момента времени, то в правых частях (36) коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\sin 3\omega t$  в отдельности должны обращаться в нуль. Предположим, что эти коэффициенты не обращаются в нуль. Тогда мы должны были бы получить выражение типа  $A \sin \omega t + B \sin 3\omega t = 0$ ; где  $A$  и  $B$  — постоянные величины. Но такое уравнение не может быть справедливым для любого момента времени, и, следовательно,  $A$  и  $B$  должны быть в отдельности равны нулю. Когда в приведенном выше решении (33) мы остановились на члене, содержащем частоту  $3\omega t$ , и не стали выписывать члены, содержащие все возможные частоты, мы учли лишь наиболее важные члены. Условие равенства нулю коэффициента при  $\sin \omega t$  в (36) дает

$$-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24} \omega_0^2 \theta_0^2 = 0, \quad (37)$$

или

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \theta_0^2\right), \quad \omega \cong \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \theta_0^2\right). \quad (38)$$

Последнее выражение получено в результате биномиального разложения квадратного корня. Уравнения (38) выражают зависимость  $\omega$  от  $\theta_0$ . Величина  $\omega_0$  представляет собой предельное значение  $\omega$  при  $\theta_0 \rightarrow 0$ , т. е. при предельно малых значениях амплитуды. При  $\theta_0 = 0,3$  рад относительное изменение частоты равно  $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-2}$ , где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ . Отметим, что при больших амплитудах частота колебаний маятника зависит от амплитуды.

Решение в форме (33) содержит также член с  $\sin 3\omega t$ . Вклад этого члена в амплитуду по сравнению с вкладом члена  $\sin \omega t$  зависит от величины  $\varepsilon$ , которая может быть определена из условия равенства нулю коэффициента при  $\sin 3\omega t$  в (36):

$$-9\omega^2 \varepsilon + \omega_0^2 \varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24} \theta_0^2 = 0. \quad (39)$$

Полагая  $\omega^2 \cong \omega_0^2$ , находим из (39)

$$\varepsilon \cong \frac{\theta_0^2}{192}. \quad (40)$$

Величина  $\varepsilon$  определяет ту часть, которую составляет член  $\sin 3\omega t$  в выражении для  $\theta$ , определяемом главным образом чле-



ном  $\sin \omega t$ . При  $\theta_0 = 0,3 \text{ рад}$   $\varepsilon \approx 10^{-3}$ , что составляет весьма малую величину. Коэффициент при члене, содержащем  $\sin^2 \omega t \sin 3\omega t$ , порядка  $\varepsilon$  или  $\theta_0^2$  и мал по сравнению с удержанными нами членами. Поэтому в рассматриваемом приближении мы пренебрегли этим членом.

Почему мы не включили в (33) член, содержащий  $\sin 2\omega t$ ? Попробуйте сами рассмотреть решение в виде

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t + \eta \theta_0 \sin 2\omega t \quad (41)$$

и посмотрите, что из этого получится. Вы придете к выводу, что  $\eta = 0$ . Маятник совершает колебания, содержащие главным образом третью гармонику (т. е. в выражение для его отклонения входит член с  $\sin 3\omega t$ ) и не содержащие второй гармоники. Другой результат мы получим в том случае, когда уравнение движения будет содержать член с  $\theta^2$ .

Чему будет равна частота маятника при больших амплитудах? В этом случае движение не может характеризоваться только единственной частотой. Мы уже видели, что наиболее важный член (т. е. наибольший по величине) — это член с  $\sin \omega t$ , и поэтому частоту  $\omega$  мы можем назвать *основной частотой* маятника. В нашем приближении  $\omega$  дается вторым выражением (38). Член, содержащий  $\sin 3\omega t$ , называется *третьей гармоникой* основной частоты. Из нашего обсуждения выражения (33) следует, что точное решение содержит бесконечное число гармоник, большинство из которых оказываются очень малыми. Из (33) следует, что амплитуда основной компоненты движения равняется  $\theta_0$ ; амплитуда компоненты третьей гармоники равна  $\varepsilon \theta_0$ .

## 7.2. Масса на пружине

В гл. 5 мы рассматривали пружину, которая подчинялась закону Гука для упругой силы:

$$F_x = -Cx, \quad (42)$$

где  $x$  — координата конца пружины. Если на конце пружины находится масса  $M$  и массой самой пружины можно пренебречь, то уравнение движения системы будет иметь вид

$$M\ddot{x} = -Cx, \quad \ddot{x} + \frac{C}{M}x = 0. \quad (43)$$

Решение уравнения (43) будет таким же, как и уравнения (22). Как легко видеть, решение этого уравнения имеет вид \*)

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (44)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — постоянные значения амплитуды и фазы.

\*) С таким же успехом мы могли выбрать решение в виде

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ или } x = B \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t.$$

Выбор того или иного решения определяется из соображений удобства.

Покажем теперь, что (44) действительно является решением уравнения (43). Найдем  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$ :

$$\dot{x} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (45)$$

Далее из (45) и (43) получаем

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (46)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (43), если положить

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{M}\right)^{1/2}. \quad (47)$$

Движение является гармоническим с угловой частотой  $\omega_0$ . Амплитуда равна  $A$ . Фаза может быть определена из значений  $x$  и  $\dot{x}$  при  $t=0$ . Из (44) и (45) находим, что

$$x_0 = A \sin \varphi,$$

$$v_0 = \omega_0 A \cos \varphi.$$

Из этих двух соотношений находим  $A$  и  $\varphi$ . Если положить  $\varphi = \pi/2$ , то

$$x = A \sin\left(\omega_0 t + \frac{1}{2}\pi\right) = A \cos \omega_0 t, \quad (48)$$

так как синус и косинус отличаются друг от друга только сдвигом фаз на  $\pi/2$ . Из (44) мы видим, что  $\varphi = \pi/2$ , если в момент времени  $t=0$  пружина максимально растянута.

**Пример.** Средние значения кинетической и потенциальной энергий.

Рис. 7.6. Простой гармонический осциллятор, состоящий из массы  $M$  и невесомой пружины, упругая постоянная которой равна  $C$ . Перо, связанное с грузом, вырисовывает синусоидальную кривую на бумажной ленте, движущейся с постоянной скоростью мимо  $M$ .

Вычислим средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий гармонического осциллятора.

Из (44) следует, что кинетическая энергия равна

$$K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M [\omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2. \quad (49)$$

Среднее по времени \*) значение кинетической энергии за один

\*) Мы применяем угловые скобки  $\langle \quad \rangle$  для обозначения среднего по времени значения, определяемого из соотношения

$$\langle x \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(t) dt.$$

Очевидно, что для функции  $q(t)$ , значения которой повторяются с периодом  $T$ ,

период  $T$  движения будет равно

$$\langle K \rangle = \frac{\int_0^T K dt}{T} = \frac{1}{2} M \omega_0^2 A^2 \frac{\int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt}{2\pi/\omega_0}, \quad (50)$$

где  $2\pi/\omega_0 = T$ . Так как интеграл вычисляется за полный период, то величина фазы не имеет значения, и для удобства мы можем положить  $\varphi = 0$ . Тогда, обозначая  $y = \omega_0 t$ , мы получаем

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 y dy = \frac{1}{2}, \quad (51)$$

где использовано тождество  $\cos^2 y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y)$  и равенство нулю интеграла от  $\cos 2y$ . Из (51) мы видим, что среднее значение квадрата косинуса равно  $1/2$ . Этот результат следует запомнить. Аналогичный результат получается и для среднего значения квадрата синуса \*). Из (50) и (51) мы получаем для среднего значения кинетической энергии

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2. \quad (52)$$

Потенциальная энергия при  $x = A \sin \omega_0 t$  равна

$$U = \frac{1}{2} C x^2 = \frac{1}{2} C A^2 \sin^2 \omega_0 t. \quad (53)$$

По аналогии с (51) среднее значение квадрата синуса равно

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2}. \quad (54)$$

Полагая  $\omega_0^2 = C/M$ , из (53) получаем

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} C A^2 = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2. \quad (55)$$

среднее по времени может быть вычислено также следующим образом:

$$\langle q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt.$$

\*) Эти результаты мы легко можем получить из тригонометрического тождества  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ . Усредняя это тождество в пределах  $2\pi$  рад, мы получаем  $\langle \sin^2 \varphi \rangle + \langle \cos^2 \varphi \rangle = 1$ . Ввиду того, что разница между  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  состоит только в сдвиге фаз на  $\pi/2$ , мы находим, что  $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$ . Аналогичное рассуждение может быть применено и к угловому среднему значению  $\langle x^2 \rangle$  на поверхности сферы. Если  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , то и  $\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = r^2$ . Так как сфера симметрична по отношению к осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то должно выполняться соотношение  $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} r^2$ . Этот результат может быть получен и прямым вычислением.

Таким образом,  $\langle U \rangle = \langle K \rangle$ , и полная энергия гармонического осциллятора равна

$$E = \langle K \rangle + \langle U \rangle = \frac{1}{2} M \omega_0^2 A^2. \quad (56)$$

Заметим, что  $E = \langle E \rangle$ , так как при движении полная энергия сохраняется постоянной.

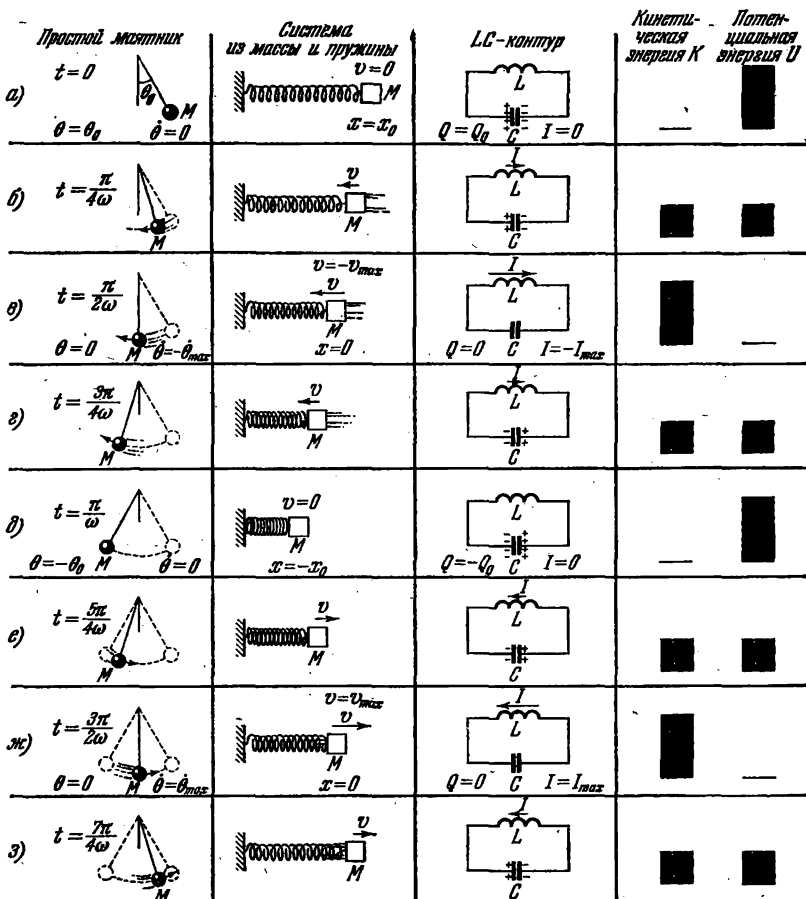


Рис. 7.7. Три различных гармонических осциллятора с одинаковым периодом: математический маятник, масса на пружине и LC-контур. Время растёт в направлении от а) к з); следующий цикл снова начинается с а).

Равенство средних значений кинетической и потенциальной энергий является специфическим свойством гармонического осциллятора. Этим свойством не обладают ангармонические осцилляторы. Позже мы покажем, что этим свойством обладают и слабо затухающие осцилляторы.

### 7.3. Контур, состоящий из емкости $C$ и самоиндукции $L$

Сейчас мы забежим немного вперед и рассмотрим электрический контур, с которым вы познакомитесь в лаборатории и во втором томе (этот раздел, так же как и задачи 8 и 9, может быть пропущен, если учащиеся не имеют предварительной подготовки по элементам электрических контуров). Рассмотрим контур, не обладающий сопротивлением и состоящий из самоиндукции  $L$  и емкости  $C$ , к которому приложено переменное напряжение  $V$ . Мы знаем, что падение напряжения на самоиндукции  $V_L$  равно

$$V_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad (57)$$

где  $I$  — сила тока. Падение напряжения  $V_C$  на пластинах конденсатора равно

$$V_C = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C} \int I dt, \quad (58)$$

где  $Q$  — заряд, равный интегралу от тока по времени. Знак выбирается из соображений удобства. Сумма всех значений напряжения должна быть равна нулю. Поэтому  $V + V_L + V_C = 0$ , или

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = V; \quad (59)$$

обозначая  $-\int I dt = Q$ , находим

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = -V. \quad (60)$$

Сравнивая (59) с соотношением  $M\ddot{x} + C_{\text{пруж}} \dot{x} = F$  для массы  $M$  на пружине; растягиваемой силой  $F$ , мы видим, что существует аналогия между следующими величинами:

$$Q \leftrightarrow x, \quad -V \leftrightarrow F, \quad L \leftrightarrow M, \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow C_{\text{пруж}}. \quad (61)$$

Решение уравнения (60) для случая  $V=0$ , по аналогии с решением для пружины, можно искать в виде

$$I = I_0 \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = \left( \frac{1}{LC} \right)^{1/2}. \quad (62)$$

Падение напряжения на концах катушки самоиндукции может быть найдено из (57) и (62):

$$V_L = -L\dot{I} = -L\omega_0 \cos \omega_0 t. \quad (63)$$

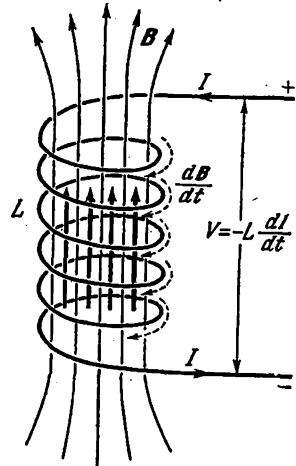


Рис. 7.8. Катушка индуктивности  $L$ , по которой идет ток  $I$ . Если  $I$  возрастает, то увеличивается и  $B$ . Направление  $dB/dt$  изображено на рисунке жирными стрелками. В соответствии с законом Фарадея в витках индуцируется электрическое поле при изменении магнитного поля. Направление электрического поля изображено пунктирными стрелками. Полное падение напряжения на концах катушки равно  $V = \int E \cdot dl$ . Так как  $V$  возрастает в направлении, противоположном  $dI/dt$ , то  $V = -L(dI/dt)$ , где  $L$  — коэффициент пропорциональности.

Падение напряжения на пластинах конденсатора равно

$$V_C = -\frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{\omega_0 C} \cos \omega_0 t. \quad (64)$$

Из определения  $\omega_0$ , даваемого (62), мы видим, что амплитуды  $V_L$  и  $V_C$  одинаковы.

#### 7.4. Трение

До сих пор мы пренебрегали влиянием трения на гармонический осциллятор. Влияние трения проявляется в том, что движение гармонического осциллятора затухает. Когда в уравнении движения учитывается трение, решение оказывается более близким к реальным условиям. Каким образом мы можем ввести трение в уравнение движения для свободной частицы? Трение выражается в действии на частицу тормозящей силы. Если на частицу действует только одна сила трения, то по второму закону Ньютона

$$M \ddot{x} = F_{\text{тр}}. \quad (65)$$

Сила трения должна быть направлена в сторону, противоположную скорости, и в простейшем случае пропорциональна величине скорости (что, вообще говоря, само по себе не очевидно; ниже будут рассмотрены примеры):

$$F_{\text{тр}} = -\gamma \dot{x}, \quad (66)$$

где  $\gamma$  — положительный постоянный коэффициент, называемый коэффициентом затухания. Таким образом, уравнение движения частицы, движущейся только под действием силы трения, имеет вид

$$M \ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0. \quad (67)$$

Иногда полезно ввести постоянную величину  $\tau$ , называемую *временем релаксации* и определяемую соотношением

$$\gamma \equiv \frac{M}{\tau}. \quad (68)$$

После этого уравнение (67) принимает вид

$$M \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} \right) = 0. \quad (69)$$

Мы видим, что  $\tau$  действительно имеет размерность времени. Если обозначить скорость  $v \equiv \dot{x}$ , то это уравнение можно записать в другом виде:

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau} v = 0. \quad (70)$$

Это очень важное дифференциальное уравнение. Его можно переписать в виде

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$$

или

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt, \quad (71)$$

где  $v_0$  — скорость в момент времени  $t=0$ . Интегрируя, получаем

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{t}{\tau}, \quad \text{или} \quad \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{t}{\tau}. \quad (72)$$

Отсюда находим

$$v = v_0 e^{-t/\tau}. \quad (73)$$

Скорость уменьшается со временем по экспоненциальному закону (рис. 7.9); в этом случае мы можем сказать, что уменьшение скорости со временем характеризуется постоянной величиной  $\tau$ . Уменьшение кинетической энергии  $K$  свободной частицы может быть найдено из (73):

$$K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 e^{-2t/\tau} = K_0 e^{-2t/\tau}. \quad (74)$$

Дифференцируя (74), получаем

$$\dot{K} = -\frac{2}{\tau} K. \quad (75)$$

Эффективное время релаксации для кинетической энергии составляет половину от времени релаксации для скорости.

Каков же механизм, приводящий к возникновению тормозящей силы, выражаемой соотношением (66)? Это соотношение относится к некоторому идеализированному случаю, который можно реализовать лишь при определенных условиях. Омическое электрическое сопротивление приводит к затуханию, или торможению, которое выражается таким же образом, как и (66). Падение напряжения  $V_R$  на идеальной катушке сопротивления по закону Ома равно

$$V_R = IR. \quad (76)$$

Уравнение движения для контура, состоящего из сопротивления  $R$  и самоиндукции  $L$ , получается из (57) и (76):

$$L\dot{I} + RI = 0. \quad (77)$$

Это уравнение совпадает с (70), если положить  $\tau = L/R$ . Микроскопический механизм, приводящий к закону Ома, рассматривается во втором томе.

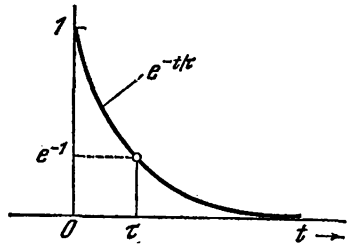


Рис. 7.9. График зависимости функции  $e^{-t/\tau}$  от  $t$ .

Отчетливое представление о тормозящей силе  $F_{\text{тр}} = -\gamma \dot{x}$  можно также получить, рассматривая движение плоской пластинки в направлении, перпендикулярном ее плоскости, сквозь газ при очень низком давлении, при условии, что скорость  $V$  пластинки значительно меньше  $v^*$ , чем средняя скорость  $v$  молекул газа (рис. 7.10).

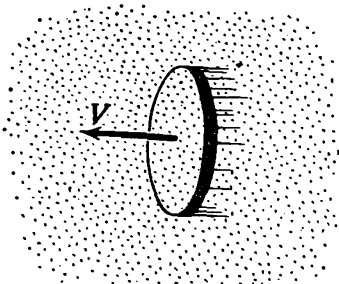


Рис. 7.10. На плоскую пластинку, которая движется в газе, перпендикулярно к ее плоскости при очень низком давлении действует тормозящая сила, пропорциональная ее скорости  $V$  (если  $V$  значительно меньше, чем средняя скорость молекул газа).

Давление должно быть достаточно низким, для того чтобы мы могли пренебречь столкновениями молекул друг с другом. Скорость, с которой молекулы ударяются о пластинку, пропорциональна относительной скорости набегающих молекул и пластинки. Предположим, что молекулы движутся только в одном направлении. С одной стороны пластинки относительная скорость равна  $v+V$ , а с другой  $v-V$ . Давление пропорционально скорости, с которой молекулы ударяются о пластинку, умноженной на среднее значение импульса, переносимого молекулой. Среднее значение импульса в свою очередь само

пропорционально относительной скорости, и поэтому давления  $P_1$  и  $P_2$  по обе стороны пластинки будут равны

$$P_1 \propto (v+V)^2, \quad P_2 \propto (v-V)^2. \quad (78)$$

«Чистое» давление  $P$  будет равно разности давлений с обеих сторон пластинки:

$$P = P_1 - P_2 \propto 4vV. \quad (79)$$

Поэтому лобовое сопротивление («чистая» сила, действующая на движущуюся пластинку) будет прямо пропорционально скорости  $V$  пластинки. Направление силы лобового сопротивления будет противоположно направлению движения пластинки.

## 7.5. Затухающий гармонический осциллятор

Если мы учтем тормозящую силу, то полная сила, действующая на невозбужденный гармонический осциллятор, будет равна

$$F_{\text{пруж}} + F_{\text{тр}} = -Cx - \gamma \dot{x}. \quad (80)$$

Эту полную силу мы можем приравнять  $M\ddot{x}$  и получить уравнение движения в виде

$$M\ddot{x} + \gamma \dot{x} + Cx = 0. \quad (81)$$

\* Случай, когда пластинка движется со скоростью большей, чем скорость молекул, был рассмотрен в гл. 6, когда речь шла о падении метеоритов. В обеих задачах для простоты мы допускаем, что средняя длина свободного пробега молекул велика по сравнению с размерами пластинки.



Это линейное дифференциальное уравнение. Мы можем его переписать следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (82)$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{M}, \quad \omega_0^2 = \frac{C}{M}. \quad (83)$$

Решение уравнения (82) можно искать в виде затухающего синусоидального колебания

$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t, \quad (84)$$

где величины  $\beta$  и  $\omega$  могут быть определены. Это решение представляет собой комбинацию решений (44) и (73). С таким же успехом

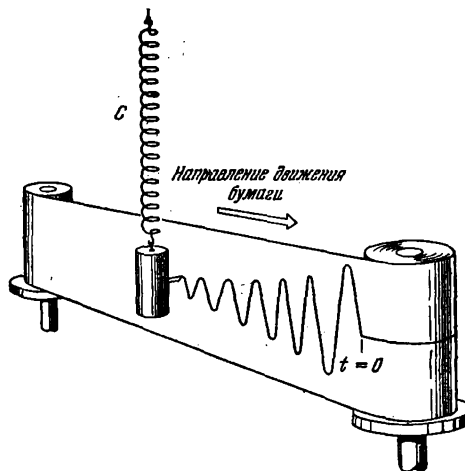


Рис. 7.11. Колебания всех реальных гармонических осцилляторов затухают под действием сил трения, таких, например, как сопротивление воздуха. Система из массы и пружины при небольшом затухании должна описываться такой же кривой, как и та, которая изображена на бумажной ленте, движущейся с постоянной скоростью. Эта система начала совершать колебания в момент времени  $t=0$ .

мы могли бы искать решение уравнения (82) в форме  $x = x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$ . Дифференцируя теперь (84), находим

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t + \omega x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t, \quad (85)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t - 2\beta \omega x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t - \omega^2 x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t. \quad (86)$$

Подставляя значения  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  в (82), получаем это уравнение в следующем виде:

$$\left( \beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\beta}{\tau} \right) x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t + \left( -2\beta \omega + \frac{\omega}{\tau} \right) x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t = 0. \quad (87)$$

Из этого уравнения следует, что коэффициент при  $\sin \omega t$  будет равен нулю, если мы положим

$$\beta = \frac{1}{2\tau}, \quad (88)$$

а коэффициент при  $\cos \omega t$  обратится в нуль при условии

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \beta^2 - \frac{\beta}{\tau} = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2, \quad (89)$$

или

$$\omega = \left[ \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 \right]^{1/2} = \omega_0 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad (90)$$

Таким образом, при наличии трения частота уменьшается. Частота  $\omega$  будет равна  $\omega_0$  только в том случае, если время релаксации бесконечно велико (т. е. затухание отсутствует).

Если  $\beta$  и  $\omega$  выражаются соотношениями (88) и (90), то (84) является решением уравнения движения (81). Это решение имеет вид

$$x = x_0 e^{-t/2\tau} \sin \left\{ \omega_0 t \left[ 1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (91)$$

Если  $\omega_0\tau \gg 1$ , мы получаем предельное значение *мало затухания*, приближенно описываемого уравнением

$$x \approx x_0 e^{-t/2\tau} \sin \omega_0 t, \quad (92)$$

которое следует из (91). В этом уравнении  $\omega_0$  — собственная частота незатухающего осциллятора.

**Пример. Диссипация мощности.** Рассчитаем теперь скорость диссипации энергии затухающего гармонического осциллятора для предельного случая слабого затухания при  $\omega_0\tau \gg 1$ , т. е. при  $\omega \approx \omega_0$ .

Кинетическая энергия  $K = 1/2 M \dot{x}^2$ . Из приближенного решения (92) получаем

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\tau} x_0 e^{-t/2\tau} \sin \omega_0 t + \omega_0 x_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t. \quad (93)$$

Отсюда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \sin^2 \omega_0 t + \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \cos^2 \omega_0 t - \left(\frac{\omega_0}{\tau}\right) x_0^2 e^{-t/\tau} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t. \quad (94)$$

Значения интегралов, с которыми нам придется встретиться при вычислении среднего по времени значения  $(dx/dt)^2$ , можно найти

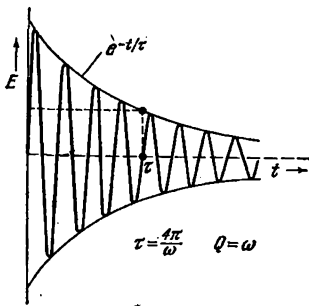


Рис. 7.12. График зависимости потенциальной энергии осциллятора, для которого  $Q$  равно 8π, от времени. В момент времени  $t$ , когда произошло четыре полных колебания, ордината точки на огибающей кривой в  $e$  раз меньше первоначального значения функции.

в соответствующих таблицах. Однако для случая  $\omega_0 t \gg 1$  множитель  $e^{-t/\tau}$  можно с хорошим приближением вынести за угловые скобки, означающие усреднение по времени. Это может быть сделано с достаточной точностью, если допустить, что амплитуда колебаний  $x_0 e^{-t/2\tau}$  существенно не изменяется за время одного периода. Для средних значений можем написать, что

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos \theta \sin \theta \rangle = 0. \quad (95)$$

Последнее соотношение, с которым мы еще не встречались, имеет весьма важное значение:

$$\langle \sin \theta \cos \theta \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \sin 2\theta \right\rangle = 0, \quad (96)$$

так как средние значения от синуса и косинуса равны нулю. Таким образом, среднее значение кинетической энергии за один период будет равно

$$\langle K \rangle \cong \frac{1}{2} M \left[ \left( \frac{1}{2\tau} \right)^2 \langle \sin^2 \omega_0 t \rangle + \omega_0^2 \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle - \frac{\omega_0}{\tau} \langle \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \rangle \right] x_0^2 e^{-t/\tau} \cong \frac{1}{4} M \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 + \omega_0^2 \right] x_0^2 \cdot e^{-t/\tau}. \quad (97)$$

Полагая, что величина  $(1/2\tau)^2$  мала по сравнению с  $\omega_0^2$ , получаем для среднего значения кинетической энергии

$$\langle K \rangle \cong \frac{1}{4} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}. \quad (98)$$

Из этого выражения мы видим, что средняя кинетическая энергия убывает со временем по экспоненциальному закону. Среднее значение потенциальной энергии равно

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} M \omega_0^2 x_0^2 \langle e^{-t/\tau} \sin^2 \omega_0 t \rangle \cong \frac{1}{4} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}. \quad (99)$$

Среднее значение энергии, рассеиваемой в единицу времени (т. е. диссипация мощности  $P$ ), равно взятой с обратным знаком скорости изменения энергии со временем:

$$-\langle P \rangle = \frac{d}{dt} \langle E \rangle \cong \frac{d}{dt} (\langle K \rangle + \langle U \rangle) \cong -\frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{2} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \right),$$

или

$$\langle P(t) \rangle = \frac{\langle E(t) \rangle}{\tau}. \quad (100)$$

Обычно, когда ясно, о чем идет речь, мы не заключаем  $P(t)$  в угловые скобки.

Для студента может показаться удивительным, что средние величины, выражаемые соотношениями (98) и (99), содержат время  $t$ , несмотря на то что они являются средними значениями по времени. Дело в том, что мы рассматриваем движение затухающего осциллятора в течение многих периодов и рассматриваемые нами величины представляют собой средние значения энергии (кинетической или потенциальной) за один период в течение некоторого

времени  $t$ . Так как энергия при рассеянии переходит в тепло, то очевидно, что средняя энергия (за один период) уменьшается от периода к периоду.

Можно показать, что диссипация мощности равна взятой со знаком минус средней скорости, с которой сила трения  $F_{\text{тр}} = -\gamma \dot{x} = -(M/\tau)\dot{x}$  совершает работу. Используя (93) и допуская, что  $\omega_0 \tau \gg 1$  и, следовательно, множитель  $e^{-t/\tau}$  может быть вынесен за угловые скобки, мы можем написать для средней скорости, с которой совершается работа, следующее выражение:

$$\langle F_{\text{тр}} v \rangle \cong -\frac{M}{\tau} \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle \cong -\frac{1}{2\tau} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \cong -\frac{E(t)}{\tau}, \quad (101)$$

в согласии со (100).

### 7.6. Добротность $Q$

Для характеристики осциллирующей системы часто применяется величина  $Q$ , называемая *добротностью*. Эта величина  $Q$  представляет собой умноженное на  $2\pi$  отношение запасенной энергии к среднему значению энергии, теряемому за один период:

$$Q = 2\pi \frac{\text{запасенная энергия}}{\langle \text{энергия, потерянная за один период} \rangle} = \frac{2\pi E}{P/\nu} = \frac{E}{P/\omega}, \quad (102)$$

так как период равен  $1/\nu$  и  $2\pi\nu = \omega$ . Время, в течение которого фаза осциллятора изменится на  $\theta = 1 \text{ рад}$ , равно  $1/\omega$ . Заметим, что величина  $Q$  безразмерна.

Для слабо затухающего гармонического осциллятора ( $\omega_0 \tau \gg 1$ ) из (98), (99) и (100) получаем

$$Q \cong \frac{E}{E/\omega_0 \tau} \cong \omega_0 \tau. \quad (103)$$

Мы видим, что величина  $\omega_0 \tau$  может служить удобной характеристикой отсутствия затухания осциллятора. Большим значениям  $\omega_0 \tau$  или  $Q$  соответствует слабое затухание осциллятора. Из (98) и (99) следует, что энергия осциллятора за время  $\tau$  уменьшается в  $e$  раз от своего первоначального значения; за это время осциллятор совершает  $\omega_0 \tau / 2\pi$  колебаний. Порядок величины добротности некоторых важнейших типов затухающих осцилляторов приведен в таблице.

Некоторые типичные значения  $Q$

Земля (сейсмические волны)	25—1400
Полый медный резонатор для микрорадиоволн	$10^4$
Рояльная или скрипичная струна	$10^3$
Возбужденный атом	$10^7$
Возбужденное ядро ( $F^{17}$ )	$3 \cdot 10^{12}$

### 7.7. Гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания

Теперь мы подробно рассмотрим вынужденные колебания затухающего гармонического осциллятора. *Эта задача имеет очень важное значение.* Если помимо силы трения на осциллятор действует внешняя сила  $F(t)$ , то уравнение движения будет иметь вид

$$M\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Cx = F(t) \quad (104)$$

или, в более удобной форме,

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{M}, \quad (105)$$

где  $\tau \equiv M/\gamma$  и  $\omega_0^2 \equiv C/M$ . Здесь  $\omega_0$  — *собственная частота* системы в отсутствие трения и вынуждающей силы. Когда на систему действует вынуждающая сила с частотой  $\omega$ , отличающейся от частоты  $\omega_0$ , то, как мы увидим, колебания в системе будут происходить с частотой вынуждающей силы, но не с собственной частотой. Если, однако, вынуждающая сила внезапно перестает действовать, то система возвращается к затухающим колебаниям, частота которых приближенно будет соответствовать частоте собственных колебаний для случая малого затухания. Предположим, что в (105)

$$\frac{F(t)}{M} = \frac{F_0 \sin \omega t}{M} \equiv \alpha_0 \sin \omega t, \quad \alpha_0 \equiv \frac{F_0}{M}, \quad (106)$$

т. е. вынуждающая сила представляет собой синусоидальную функцию с частотой  $\omega$ . Это соотношение определяет величину  $\alpha_0$ . Мы вводим  $\alpha_0$  потому, что удобнее оперировать с  $F_0/M$ , чем с  $F_0$ .

Установившиеся колебания системы (колебания системы после кратковременных воздействий затухают) будут происходить с частотой вынуждающей силы. Другими словами, разность фаз между силой и смещением будет изменяться со временем. Это очень важная особенность полученного нами результата: установившиеся колебания совершающего вынужденные колебания гармонического осциллятора (даже при наличии затухания) происходят с *вынуждающей*, а не с собственной частотой  $\omega_0$ . Уравнению движения будет удовлетворять только вынуждающая частота. В качестве характеристики воздействия вынуждающей силы на гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания, можно выбрать либо смещение  $x$ , либо скорость  $\dot{x}$ . Мы выберем в качестве такой характеристики смещение  $x$ . Будем искать решение уравнения (105) в виде

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (107)$$

в котором мы должны определить амплитуду  $x_0$  и фазу  $\varphi$  \*).

\* ) Мы должны считать, что фаза  $\varphi$  (называемая также разностью фаз между смещением  $x$  и силой  $F$ ) не равна нулю. Если не вводить  $\varphi$ , то решение не может быть получено. Когда мы говорим о фазе, то надо знать, о какой именно разности

В уравнении (107)  $\omega$  представляет собой частоту вынуждающей силы, а не собственную частоту осциллятора; фаза  $\varphi$  — это разность фаз между вынуждающей силой и смещением осциллятора. Поэтому здесь  $\varphi$  имеет совершенно другое значение, чем то, с которым мы имели дело в случае невынужденных колебаний незатухающего гармонического осциллятора, когда величина  $\varphi$  определялась начальными условиями. Начальные условия не имеют значения для вынужденных колебаний осциллятора, если только рассматривается установившееся состояние.

Целесообразно уточнить, что мы подразумеваем под разностью фаз  $\varphi$  между смещением и вынуждающей силой. Как вынуждающая сила, так и смещение изменяются по простому гармоническому закону. Цикл изменения фазы от одного максимума до другого составляет  $360^\circ$ , или  $2\pi$  рад. Разность фаз соответствует разности фаз между смещением, достигшим своего максимального значения, и силой. Например, предположим, что сила достигает наибольшего положительного значения в тот момент, когда смещение равно нулю, и затем возрастает в положительном направлении. Тогда смещение будет отставать от силы на  $\pi/2$  рад. Но величина  $\varphi$  определена нами как фаза, на которую  $x$  опережает  $F$ , и поэтому в этот момент  $\varphi$  будет равно  $-\pi/2$ .

Теперь вычислим производные:

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (108)$$

Тогда уравнение движения (105) примет вид

$$(\omega_0^2 - \omega^2) x_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\tau} x_0 \cos(\omega t + \varphi) = \alpha_0 \sin \omega t. \quad (109)$$

Вспользуемся теперь тригонометрическими соотношениями

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi, \quad (110)$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi. \quad (111)$$

Подставляя эти значения в (109), получаем

$$\left[ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \frac{\omega}{\tau} \sin \varphi \right] x_0 \sin \omega t + \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + \frac{\omega}{\tau} \cos \varphi \right] x_0 \cos \omega t = \alpha_0 \sin \omega t. \quad (112)$$

Уравнение (112) может быть удовлетворено лишь в том случае, если коэффициент при  $\cos \omega t$  будет равен нулю. Из этого условия вытекает, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = - \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (113)$$

---

фаз идет речь. В электротехнике обычно говорят о разности фаз между током и напряжением. Здесь мы говорим о разности фаз между смещением и вынуждающей силой  $F$ . Фазы обеих величин не равны друг другу, так как аналогом тока является  $dx/dt$ , а не  $x$ .

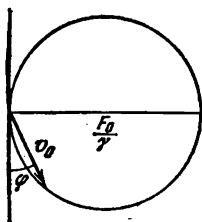


Рис. 7.13. Поведение гармонического осциллятора, совершающего вынужденные колебания, может быть очень просто представлено с помощью «полярного графика». Строится круг, диаметр которого равен  $F_0/\gamma$  и в котором хорда  $OP$  образует с осью ординат угол  $\varphi$ .

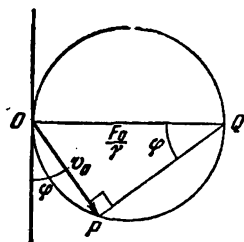


Рис. 7.14. При любом  $\varphi$   $OPQ$  образует прямоугольный треугольник. Хорда  $OP = -\frac{F_0}{\gamma} \sin \varphi$ . Из уравнений (115), (116) и (117) мы видим, что хорда  $OP = \omega x_0 = v_0$  представляет собой амплитуду скорости.

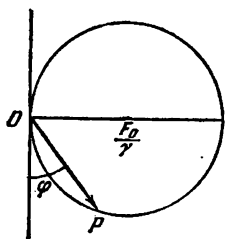


Рис. 7.15. Для  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\varphi \approx 0$  и  $v_0 \ll F_0/\gamma$ . В этой области смещение очень мало.

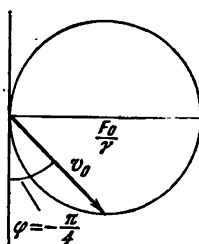


Рис. 7.16. Когда  $\omega$  возрастает,  $|\varphi|$  увеличивается так же, как и  $v_0$ . При  $\varphi = -\pi/4$   $v_0 = F_0/(\sqrt{2}\gamma)$ .

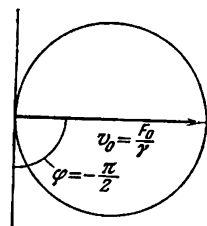


Рис. 7.17. При  $\varphi = -\pi/2$   $\omega = \omega_0$  и  $v_0 = F_0/\gamma$ . Амплитуда скорости максимальна, когда наступает резонанс.

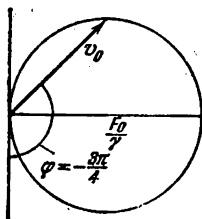


Рис. 7.18. Для  $\omega > \omega_0$   $v_0$  снова уменьшается. При  $\varphi = -3\pi/4$  снова  $v_0 = F_0/(\sqrt{2}\gamma)$ .

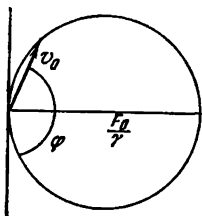


Рис. 7.19. Для  $\omega \gg \omega_0$  снова  $v_0 \ll F_0/\gamma$  и  $\varphi \approx -\pi$ .

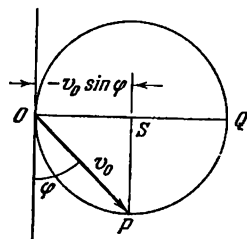


Рис. 7.20. Отрезок  $OS = -v_0 \sin \varphi$ . Из уравнений (127), (128) и (129) мы видим, что поглощенная мощность пропорциональна  $-v_0 \sin \varphi$ , т. е. величине отрезка  $OS$ .

Необходимо также, чтобы коэффициенты при  $\sin \omega t$  были равны, откуда находим, что

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \frac{\omega}{\tau} \sin \varphi}. \quad (114)$$

Из (113) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left( \frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]^{1/2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{-\omega/\tau}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right]^{1/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

после чего (114) приобретает следующий вид:

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right]^{1/2}}. \quad (116)$$

Это выражение дает величину амплитуды.

Уравнения (115) и (116) дают нам искомое решение. Теперь мы знаем амплитуду  $x_0$  и фазу  $\varphi$  смещения системы под действием вынуждающей силы  $F = M\alpha_0 \sin \omega t$ :

$$x = \frac{\alpha_0}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right]^{1/2}} \sin \left( \omega t + \arctg \frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2} \right). \quad (117)$$

Разберем теперь предельные случаи, соответствующие этому решению. Напомним, что при нашем рассмотрении мы всегда предполагали затухание малым, т. е.  $\omega_0 \tau \gg 1$ .

*Малая вынуждающая частота*,  $\omega \ll \omega_0$ . В этом случае из (115) видно, что

$$\cos \varphi \rightarrow 1, \quad \sin \varphi \rightarrow -0, \quad (118)$$

откуда  $\varphi \rightarrow 0$ . Таким образом, в случае низкой частоты смещение и вынуждающая сила совпадают по фазе. Из (116) следует, что

$$x_0 \rightarrow \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} = \frac{M\alpha_0}{C} = \frac{F_0}{C}. \quad (119)$$

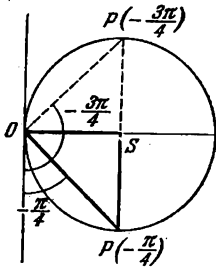


Рис. 7.21. Когда  $\varphi = -\pi/4$  и  $\varphi = -3\pi/4$ , отрезок  $OS = OS_{\max}/2$ . Поэтому в этих точках поглощенная мощность составляет половину ее максимального значения. Максимальное значение поглощенной мощности достигается при  $\varphi = -\pi/2$  (резонанс).

В этом случае смещение определяется пружиной, а не массой или трением.

*Резонансная частота*,  $\omega = \omega_0$ . В случае резонанса смещение может быть очень велико. Так как в различных приложениях мы очень часто используем резонансное значение смещения, мы рассмотрим этот случай более

подробно. При  $\omega = \omega_0$  вынуждающая частота равна собственной частоте системы в отсутствие трения. При этом мы получаем

$$\cos \varphi \rightarrow \pm 0, \quad \sin \varphi \rightarrow -1, \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}. \quad (120)$$



Амплитуда при  $\omega = \omega_0$  будет равна

$$x_0 = \frac{\alpha_0 \tau}{\omega_0}. \quad (121)$$

Чем меньше затухание, тем больше  $\tau$  и  $x_0$ . Полагая  $F_0$  постоянной, мы можем найти из (119) и (120) отношение смещения в случае резонанса к смещению при нулевой вынуждающей частоте:

$$\frac{x_0(\omega = \omega_0)}{x_0(\omega = 0)} = \frac{\alpha_0 \tau / \omega_0}{\alpha_0 / \omega_0^2} = \omega_0 \tau = Q, \quad (122)$$

где  $Q$  — добротность, которую мы определили из соотношения (103). Эта величина может быть очень большой, порядка  $10^4$  или даже больше! Таким образом, в случае резонанса смещение определяется затуханием.

Максимального значения величина смещения  $x_0$  достигает при частоте  $\omega$ , не в точности равной  $\omega = \omega_0$ . Это следует из того, что производная от знаменателя (116) обращается в нуль, когда

$$\frac{d}{d\omega} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left( \frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right] = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + \frac{2\omega}{\tau^2} = 0 \quad (123)$$

при значении

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}. \quad (124)$$

Это значение  $\omega$  определяет положение максимума смещения на кривой зависимости  $x_0$  от  $\omega$ . Если  $\omega_0 \tau \gg 1$ , то положение максимума очень близко к  $\omega = \omega_0$ .

Может показаться странным, что максимум смещения получается при значении разности фаз, равном  $-\pi/2$ , т. е. когда разность фаз между силой и смещением составляет в точности  $90^\circ$ . Казалось бы логичным, чтобы резонанс наступал при  $\varphi = 0$ , а не при  $-\pi/2$ . Однако тут есть хитрость: дело заключается в том, что мощность, поглощаемая осциллятором, зависит не непосредственно от разности фаз между вынуждающей силой и скоростью. Достаточно немного подумать, чтобы сообразить, что наибольшее отклонение достигается в том случае, когда фазы скорости и вынуждающей силы в точности совпадают. В этом случае масса получает толчки в надлежащие моменты времени и в надлежащих положениях. Когда смещение равно нулю, скорость оказывается максимальной. Если в какой-то момент времени масса движется в положительном направлении, то для достижения наибольшего отклонения нужно, чтобы в этот же момент времени сила достигала бы своего наибольшего значения. В крайней точке, где скорость меняет знак, для достижения резонанса нужно, чтобы и сила в тот же момент времени также изменяла бы знак. Таким образом, при описании резонанса удобней всего говорить о разности фаз между скоростью и вынуждающей силой. Мы знаем, что скорость осциллятора опережает его смещение в точности на  $90^\circ$ . Следовательно,

при резонансе, когда сила и скорость совпадают по фазе, нужно, чтобы сила опережала смещение на  $90^\circ$ , т. е. чтобы  $\varphi = -\pi/2$ .

*Большая вынуждающая частота*,  $\omega \gg \omega_0$ . В этом случае

$$\cos \varphi \rightarrow -1, \quad \sin \varphi \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow -\pi \quad (125)$$

и

$$x_0 \rightarrow \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{M\alpha_0}{M\omega^2} = \frac{F_0}{M\omega^2}. \quad (126)$$

В этом предельном случае, когда вынуждающая частота велика, смещение уменьшается по закону  $1/\omega^2$  и его величина определяется инерцией массы.

Заметим, что разность фаз  $\varphi$  между смещением и вынуждающей силой начинается с нуля при низких частотах, проходит через значение  $-\pi/2$  при резонансе и достигает  $-\pi$  при высоких частотах. Таким образом, *смещение всегда отстаёт от вынуждающей силы*.

*Поглощение мощности*. Среднее по времени значение работы, совершаемой вынуждающей силой в единицу времени над осциллирующей системой, может быть получено из (106) и (107):

$$P = \langle F\dot{x} \rangle = \frac{M\alpha_0^2\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{1/2}} \langle \sin \omega t \cos(\omega t + \varphi) \rangle. \quad (127)$$

Принимая во внимание тождество

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi,$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle \sin \omega t [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi] \rangle &= -\sin \varphi \langle \sin^2 \omega t \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \sin \varphi, \quad (128) \end{aligned}$$

где мы использовали тот факт, что

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0.$$

Мы видим, что фаза играет здесь важную роль. Используя выражение (115) для  $\sin \varphi$ , мы можем переписать (127) в следующем виде:

$$P = \frac{1}{2} M\alpha_0^2 \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}. \quad (129)$$

Это очень важный результат. Мощность, поглощаемая при резонансе, т. е. при  $\omega = \omega_0$ , равна

$$P_{\text{рез}} = \frac{1}{2} M\alpha_0^2\tau. \quad (130)$$

Мощность, поглощаемая осциллятором и выражаемая соотношением (129), уменьшается на половину резонансного значения при изменении частоты  $\omega$  на величину  $\pm(\Delta\omega)_{1/2}$ , так что

$$\frac{\omega}{\tau} = \omega_0^2 - \omega^2 \equiv (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \cong 2\omega_0(\Delta\omega)_{1/2}. \quad (131)$$

Поэтому полная ширина  $2(\Delta\omega)_{1/2}$ , соответствующая половине резонансного максимума поглощенной мощности, равна  $1/\tau$ . Используя выражение (103) для  $Q$ , получаем

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{1/2}} = \frac{\text{резонансная частота}}{\text{ширина резонансной кривой на уровне } 1/2}. \quad (132)$$

Следовательно, добротность  $Q$  характеризует остроту резонансной кривой.

Численный пример задачи о гармоническом осцилляторе. Пусть масса  $M=1$  г; силовая постоянная  $C=10^4$  дин/см и время релаксации  $\tau=1/2$  сек. Тогда из (82) находим

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{M}\right)^{1/2} = 10^2 \text{ сек}^{-1}.$$

Из (124) для частоты свободных колебаний получаем

$$\left[\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}\right]^{1/2} = [10^4 - 2]^{1/2} \cong \cong 10^2 \text{ сек}^{-1}.$$

Добротность  $Q$  системы по формуле (103) будет равна

$$Q \cong \omega_0 \tau = 10^2 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

Время, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз от своего первоначального значения (для свободной системы), равно  $2\tau=1$  сек в соответствии с (91). Постоянная затухания  $\gamma=M/\tau=2$  г/сек. Пусть теперь на систему действует вынуждающая сила

$$F = M\alpha_0 \sin \omega t = 10 \sin 90t \text{ дин.}$$

Тогда  $\alpha_0=F_0/M=10$  дин/г и вынуждающая частота  $\omega=90$  сек<sup>-1</sup>. Амплитуду можно вычислить из соотношения (116):

$$x_0 \cong \frac{10}{[4 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^4]^{1/2}} \cong 5 \cdot 10^{-3} \text{ см,}$$

а фазу — из (113):

$$\text{tg } \varphi \cong -\frac{180}{1,9 \cdot 10^3} \cong -0,1,$$

или  $\varphi \cong -0,1 \text{ рад} \cong -6^\circ$ . Следовательно, в течение каждого периода смещение будет достигать максимального значения спустя  $0,1 \text{ рад}/90 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1} \cong 10^{-3} \text{ сек}$  после того, как сила достигнет своего максимального значения.

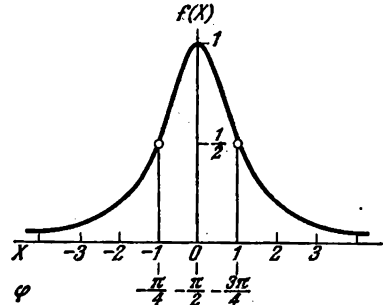


Рис. 7.22. Поглощенная мощность пропорциональна  $f(X) = \frac{1}{1+X^2}$ , где, в соответствии с уравнением (129),

$$X = \frac{-(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega/\tau} = \text{ctg } \varphi.$$

При  $\varphi \approx 0$  величина  $X = \text{ctg } \varphi$  становится большой и отрицательной. При  $\varphi = -\pi/2$  величина  $X = \text{ctg } \varphi = 0$  и поглощенная мощность принимает максимальное значение. Половинной величине мощности, как это видно из чертежа, соответствует значение  $X = \pm 1$ . Функция  $f(X) = 1/(1+X^2)$  называется функцией Лоренца.

Мы можем сравнить найденное значение амплитуды со значениями амплитуды для предельного случая при  $\omega \rightarrow 0$  и при резонансе. Из (119) мы находим, что  $x_0(\omega=0) = \alpha_0/\omega_0^2 = 10/10^4 \text{ см} = 10^{-3} \text{ см}$ . В случае резонанса из (122) получаем

$$x_0(\omega = \omega_0) = Q x_0(\omega = 0) = 50 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Полуширина резонансной кривой \*) равна

$$2(\Delta\omega)_{1/2} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{100}{50} \text{ сек}^{-1} = 2 \text{ сек}^{-1}.$$

Заметим, что в этом примере мы повсюду применяли термин «частота», подразумевая в действительности «угловую частоту». Для того чтобы получить значение обычной частоты, т. е. число колебаний в единицу времени, следует угловую частоту разделить на  $2\pi$ .

### 7.8. Принцип суперпозиции

Одно из важнейших свойств гармонического осциллятора состоит в том, что решения являются аддитивными: если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  представляют собой движения под действием вынуждающих сил  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , то  $x_1(t) + x_2(t)$  будет представлять собой движение под действием вынуждающей силы  $F_1(t) + F_2(t)$ . Это означает, что если мы знаем смещения  $x_1$  и  $x_2$  под действием одних только сил  $F_1$  и  $F_2$  соответственно, то мы можем найти результирующее смещение под действием обеих сил, складывая  $x_1$  и  $x_2$ . Это свойство непосредственно следует из уравнения движения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)(x_1 + x_2) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x_1 + \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x_2 = F_1 + F_2. \quad (133)$$

Законность применения принципа суперпозиции к решению уравнения движения гармонического осциллятора является следствием линейности этого уравнения, содержащего  $x$  только в первой степени. Когда уравнение содержит ангармонические члены, картина совершенно меняется. Если в уравнении движения содержится член  $x^2$ , то это указывает на наличие двух вынуждающих частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , приводящих к появлению целого набора гармонических частот ( $2\omega_1, 3\omega_1, \dots, 2\omega_2, 3\omega_2, \dots$ ) и комбинации «побочных» частот ( $\omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2, \omega_1 - 2\omega_2$  и т. д.).

#### Задачи

1. Математический маятник. Маятник состоит из легкой нити длиной  $L = 100 \text{ см}$  и тяжелой массы  $M = 1 \cdot 10^3 \text{ г}$ .

а) Чему равен период маятника для малых отклонений?

Ответ. 2,0 сек.

\*) Разность абсцисс, определяемых двумя ординатами, равными  $1/2$  высоты резонансной кривой. (Прим. ред.)

б) Приблизительно до какой величины изменится это значение, если начальное отклонение маятника составит  $60^\circ$ ?

О т в е т. Новый период = 2,1 сек.

2. *Масса на пружине.* Масса, равная  $1 \cdot 10^3$  г, подвешена на длинной пружине, упругая постоянная которой равна  $C = 1 \cdot 10^6$  дин/см и коэффициент затухания которой равен  $\gamma = 50$  дин·сек/см. К пружине приложена внешняя сила  $F = F_0 \sin \omega t$ , где  $F_0 = 2,5 \cdot 10^5$  дин и  $\omega$  — частота, вдвое большая собственной частоты системы. Чему равна амплитуда результирующего колебания? На сколько фаза смещения отличается от фазы внешней силы?

О т в е т.  $8,3 \cdot 10^{-2}$  см;  $-179,9^\circ$ .

3. *Масса на пружине (числовые данные).* Приведенные ниже данные получены при наблюдении за колебаниями массы, подвешенной к концу пружины.

Т а б л и ц а 1

Зависимость периода от массы

Масса, г	50	100	150	200	250	300
Период, сек	0,72	0,85	0,96	1,06	1,16	1,23

Т а б л и ц а 2

Зависимость амплитуды колебаний от времени  
для массы 150 г

Время, сек	0	30	80	125	180	235	340	455
Амплитуда, см	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0

а) Построить график зависимости квадрата периода колебаний от массы. В значения массы, приведенные в таблице, не включена масса пружины. Определить эффективную массу пружины, произведя необходимую экстраполяцию графика.

б) Определить постоянную  $C$  пружины.

в) Построить график зависимости натурального логарифма амплитуды от времени и определить время релаксации.

г) Определить коэффициент затухания  $\gamma$ .

4. *Масса на пружине. Энергия.* Используя данные табл. 2, приведенной в задаче 3,

а) определить полную среднюю энергию при  $t = 100$  сек.

О т в е т.  $7,3 \cdot 10^4$  эрг.

б) Найти среднюю скорость потери энергии при  $t = 100$  сек.

О т в е т.  $2,4 \cdot 10^2$  эрг/сек.

в) Вычислить потерю энергии за 1 период при  $t = 100$  сек.

О т в е т.  $2,3 \cdot 10^2$  эрг/период.

г) Определить добротность  $Q$  колеблющейся системы.

О т в е т. 2000.

5. *Масса на пружине. Промежутки времени.* Рассмотрите движение массы  $M = 5$  г, подвешенной к концу вертикальной пружины, упругая постоянная которой равна  $C = 20$  дин/см. Начальное смещение равно 5 см выше точки равновесия, а начальная скорость равна 2 см/сек и направлена вниз.

а) Показать, что изменение скорости массы в течение первого интервала, следующего за началом колебания, выражается соотношением

$$\Delta v_1 = -\frac{C}{M} x_0 \Delta t.$$

б) Показать, что соответствующее изменение смещения равно

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t.$$

в) Найти положение и скорость в зависимости от времени в течение 4 сек, выбрав промежутки времени равными 0,2 сек и повторив расчет, указанный в а) и б). Результаты расчета расположить в следующей таблице:

<i>t</i> , сек	<i>x</i> , см	$\Delta v$ , см/сек	<i>v</i> , см/сек	$\Delta x$ , см
0	5,00	-4,00	-2,00	-0,40
0,2	4,60	-3,68	-6,00	-1,20
0,4	3,40	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—

Закончите эту таблицу и постройте точный график.

г) Решение может быть записано в виде

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t.$$

Для какого-то частного случая решение этой задачи имеет вид

$$x(t) = \sin 2t + 5 \cos 2t.$$

Постройте график этой функции на том же самом чертеже, на котором построен график  $x(t)$  в задаче в).

6. Дифференциальное уравнение математического маятника. Выведите дифференциальное уравнение для случая математического маятника, пользуясь непосредственно вторым законом динамики  $F=Ma$ . При выводе уравнения используйте компоненту силы тяжести, перпендикулярную стержню маятника, когда он отклонен на угол  $\theta$ .

7. Скорость тела, движущегося в вязкой среде. На тело, падающее в вязкой среде, действует сила сопротивления, равная  $-\gamma v$ . Например, в опыте Миллигена с каплей капля массой  $M$ , обладающая зарядом  $q$ , падает под действием силы тяжести  $Mg$  и электрического поля, напряженность которого равна  $E$ . Капля быстро достигает конечной скорости  $v_k$ . Составьте и решите уравнение движения капли, из которого можно получить  $v_k$  как функцию времени. (У к а з а н и е: ищите решение в виде  $v=A+Be^{-\alpha t}$  и определите из уравнения значения  $\alpha$ ,  $A$  и  $B$ , а также значения  $v$  при  $t=0$  и  $t=\infty$ .) Рассматривая предел при  $t \rightarrow \infty$ , покажите, что конечная скорость равна

$$v_k = \left( \frac{q}{M} \tau \right) E + g\tau,$$

где  $\tau \equiv M/\gamma \equiv$  времени релаксации. Измерение значения конечной скорости в зависимости от напряженности электрического поля является удобным способом определения времени релаксации  $\tau$  и отсюда коэффициента затухания  $\gamma$ . В одном из подобных типичных опытов между двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии 0,7 см друг от друга, поддерживается разность потенциалов 840 в [при этом напряженность электрического поля в абсолютных электростатических единицах равна (840/0,7)/300 ед. СГСЭ<sub>v/см</sub>]. Чему будет равно время

релаксации  $\tau$ , если конечная скорость отдельной заряженной капли массой  $2 \cdot 10^{-12}$  г равна  $0,01$  см/сек? При этом считайте, что сила электрического поля действует в том же самом направлении, что и сила тяжести.

Ответ.  $\tau = 5 \cdot 10^{-6}$  сек.

8. *Контур, состоящий из соединенных последовательно самоиндукции, емкости и сопротивления.* Поведение контура, состоящего из сопротивления  $R$ , конденсатора  $C$  и катушки самоиндукции  $L$  (рис. 7.23), описывается таким же дифференциальным уравнением, как и поведение пружины, совершающей свободные колебания с затуханием. Уравнение для тока  $I$  имеет вид

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0.$$

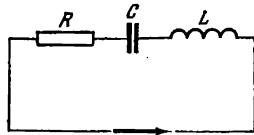


Рис. 7.23.

По аналогии с пружиной найдите выражение для времени релаксации  $\tau$  и для собственной частоты колебаний  $\omega_0$ , выразив их через  $L$ ,  $R$  и  $C$ .

9. *Колебательный контур LCR с возбуждением.* Пусть контур задачи 8 питается от источника переменного напряжения  $V(t) = V_0 \sin \omega t$ . В этом случае дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega V_0 \cos \omega t.$$

Ищите решение в виде  $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$  и найдите выражение для  $I_0$  и  $\phi$ , выразив их через  $X_L$ ,  $X_C$  и  $R$ , где

$$X_L = \omega L \quad \text{и} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

10. *Гармонический осциллятор, совершающий вынужденные затухающие колебания.* Рассмотрите перечисленные ниже предельные случаи вынужденных затухающих колебаний гармонического осциллятора. Для каждого случая дайте физическое объяснение предполагаемого поведения системы и сравните его с соответствующим предельным случаем полного решения в виде (117) и (129).

- $M \rightarrow 0$ , другие величины:  $F_0$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  и  $C$  — имеют конечные значения.
- $C \rightarrow 0$ ; другие величины имеют конечные значения.
- $\tau \rightarrow \infty$ ; другие величины имеют конечные значения.
- $M \rightarrow 0$ ,  $C \rightarrow 0$ ; другие величины имеют конечные значения.
- $M \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ ; другие величины имеют конечные значения.

11. *Измерение гравитационного поля Земли.* Напряженность гравитационного поля Земли можно определить, измеряя период колебаний прецизионного маятника. Этот прибор можно также использовать для определения ускорения тела в вертикальной плоскости. Например, в точке, для которой  $g = 980$  см/сек<sup>2</sup>, длину маятника можно подобрать такой, что период будет равен 1 сек. Период маятника был измерен в лифте, поднимающемся с постоянным ускорением, и оказался равным 1,025 сек.

а) Показать, что период маятника, измеренный в лифте, поднимающемся с постоянным ускорением  $a$ , малым по сравнению с  $g$ , в пределе будет равен

$$T \cong T_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a}{g} \right),$$

где  $a$  считается положительным.

б) Чему равно ускорение лифта?

12. *Крутильный подвес.* Крутильный подвес применялся во многих приборах и был также использован в знаменитых опытах Кулона и Кэвендиша. Такой подвес был использован в электрометрах и магнетометрах различных типов, а также в крутильном сейсмометре Вуда — Андерсона. Момент вращения  $N$ , приложенный к нити, на которой осуществлен подвес, пропорционален углу поворота  $\phi$ , так что  $N = -K\phi$ . На нити подвешено некоторое тело, момент инерции которого равен

$I$  и, как это будет показано в гл. 8, связан с моментом импульса  $J$  и угловой скоростью  $\omega$  соотношением  $J=I\omega$ .

а) Покажите, что уравнение движения крутильного подвеса для малых углов  $\varphi$  может быть записано в таком же виде, как и для массы на пружине.

б) Решите уравнение движения относительно частоты крутильного маятника.

13. *Выражение для смещения осциллятора в безразмерном виде.* Амплитуда и фаза осциллятора зависят от частоты вынуждающей силы. Уравнения, выражающие эту зависимость, легко записать в безразмерном виде, пригодном для всех осцилляторов, совершающих вынужденные колебания. Покажите, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\theta/\theta_0}{\theta^2 - 1} \quad \text{и} \quad \frac{\omega_0^2 x_0}{\alpha_0} = \frac{1}{\left[ (1 - \theta^2)^2 + \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 \right]^{1/2}},$$

где

$$\theta = \omega/\omega_0 \quad \text{и} \quad \theta_0 = \omega \tau.$$

14. *Добротность  $Q$ .* По определению добротность гармонического осциллятора, совершающего вынужденные колебания, равна

$$Q = 2\pi \frac{\langle \text{запасенная энергия} \rangle}{\langle \text{энергия, потерянная за один период} \rangle} = \frac{\langle E \rangle \omega}{P}.$$

а) Покажите, что для осциллятора, совершающего вынужденные колебания, средняя полная энергия равна

$$\langle E \rangle = \langle K + U \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle = \frac{1}{4} M \omega^2 x_0^2 + \frac{1}{4} M \omega_0^2 x_0^2.$$

б) Используя выражение, приведенное в а), покажите, что

$$Q = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] \omega \tau.$$

15. *Действие силы тяжести на массу, подвешенную к пружине.* Рассмотрим массу  $M$ , подвешенную к вертикальной пружине, силовая постоянная которой равна  $C$ . Покажите, что сила тяжести, действующая на массу  $M$ , не изменяет период колебаний, но изменяет положение равновесия, относительно которого совершается колебание.

16. *Комплексные переменные.* Напишите решение уравнения (81), используя комплексные переменные. Испробуйте решение в виде  $x = x_0 e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  может представлять собой комплексную величину. Покажите, что

$$\omega = \left[ \omega_0^2 - \left( \frac{1}{2\tau} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{i}{2\tau}.$$

Заметьте, что если  $\omega = \omega_R + i\omega_I$ , то

$$e^{i\omega t} = e^{-\omega_I t} e^{i\omega_R t},$$

т. е. решение соответствует затухающему колебанию.

17. *Вязкость.* В соответствии с законом Стокса (который справедлив при достаточно низких скоростях) коэффициент затухания сферы радиусом  $R$ , движущейся в жидкости, вязкость которой  $\eta$ , равен  $\gamma = 6\pi R\eta$ .

а) Загляните в учебник для того, чтобы дать и объяснить определение *вязкости*.

б) Какова размерность вязкости?

в) Как называется единица вязкости в системе СГС?

г) Чему равна вязкость воды при 30°С?

д) Вычислите значение коэффициента затухания для сферы радиусом 10 см, движущейся в среде, вязкость которой равна 2 сантипуазам.

Ответ.  $\approx 4$  *г/сек.*



**Дополнение 1. Точное решение задачи о колебании математического маятника**

Энергия математического маятника равна

$$E = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 + MgL(1 - \cos \theta), \quad (134)$$

или

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \cos \theta + C, \quad (135)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}, \quad C = \left( \frac{2E}{ML^2} - \frac{2g}{L} \right). \quad (136)$$

Предположим, что маятник начинает совершать колебания из состояния покоя, соответствующего начальному смещению  $\theta_0$ , где  $-\pi < \theta_0 < \pi$ . Пренебрегая трением, можно ожидать, что движение маятника будет периодическим, но не просто гармоническим, так что при  $\theta = \pm \theta_0$   $\dot{\theta} = 0$ . Однако если маятник приведен в движение достаточно сильным толчком, то он будет продолжать двигаться в одном направлении. Движение будет периодически повторяться, но  $\dot{\theta}$  не будет обращаться в 0 и  $\theta(t)$  будет продолжать увеличиваться. Эти соображения могут быть наглядно иллюстрированы, если мы проследим за движением маятника по фазовому графику, выражающему зависимость скорости фазы  $\dot{\theta}$  от фазы  $\theta$  (рис. 7.24).

Такой *фазовый график* играет важную роль при решении нелинейных дифференциальных уравнений. Очевидно, что для данных значений  $\omega_0^2$  и  $C$  уравнение (135) выражает собой кривую на фазовом графике. Для различных значений этих постоянных мы получаем семейство кривых, изображенных на рисунке. *Замкнутые*

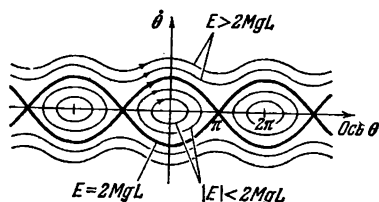


Рис. 7.24.

кривые вокруг точки  $\theta=0$  и  $\dot{\theta}=0$  соответствуют значениям  $C$  и  $\omega_0^2$ , допускающим периодическое движение маятника около положения равновесия; незамкнутые кривые характеризуют движение, для которого начальные значения этих постоянных соответствуют движению маятника лишь в одном направлении. Семейства замкнутых кривых вокруг точек  $(2\pi l, 0)$  не имеют физического смысла. Из физических соображений ясно, что  $C \geq -2\omega_0^2$ , так как полная энергия не может быть отрицательной. Если  $E=0$ , то  $C = -2\omega_0^2$ ; в этом случае маятник остается в покое и его состояние на фазовом графике характеризуется точкой  $(0, 0)$ . Замкнутые кривые соответствуют значениям  $C$ , для которых  $-2\omega_0^2 < C < 2\omega_0^2$ , что видно из физического смысла этого условия:  $2MgL \geq E$ .

Мы можем найти период и частоту колебания, описываемого замкнутой кривыми на нашем фазовом графике. Максимальное значение амплитуды будет достигнуто, когда  $\dot{\theta}=0$ ; таким образом,

$$\cos \theta_0 = -\frac{C}{2\omega_0^2}. \quad (137)$$

Период  $T$  в четыре раза больше времени, необходимого для того, чтобы маятник из положения, соответствующего  $\theta=0$ , отклонился на угол  $\theta=\theta_0$ . Из (135) мы получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = (2\omega_0^2 \cos \theta + C)^{1/2}; \quad (138)$$

период равен

$$T = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{(2\omega_0^2 \cos \theta + C)^{1/2}} = \frac{4}{(2\omega_0^2)^{1/2}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{(\cos \theta - \cos \theta_0)^{1/2}}. \quad (139)$$

Преобразуем теперь этот интеграл, введя новую переменную  $\psi$  из соотношения

$$\sin \psi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}. \quad (140)$$

а) Предлагается показать, что

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{[1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \psi]^{1/2}}. \quad (141)$$

Интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1 - K^2 \sin^2 \psi)^{1/2}}$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*; существуют подробные таблицы значений интегралов такого типа для разных  $K^2$ . В этом интеграле  $K$  представляет собой постоянную величину. Решение эллиптического интеграла в виде ряда имеет следующий вид:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1 - K^2 \sin^2 \psi)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^2 K^{2n} \right\}. \quad (142)$$

Если мы выпишем несколько первых членов, то получим

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]^{-1} \cong \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{16} \theta_0^2 + \dots \right) \quad (143)$$

в соответствии с (38).

б) Показать, что при  $\theta_0 = \pi/2$   $\omega = 0,847\omega_0$ .

## Дополнение 2. Ангармонический осциллятор

Вообще говоря, нет никаких физических причин, в силу которых для реальной пружины зависимость силы от смещения не должна содержать членов выше первой степени, т. е.  $x^3$  или  $x^5$ , а следовательно, потенциальная энергия — соответственно членов  $x^3$  или  $x^5$ . Функция потенциальной энергии для реальной пружины может быть и несимметричной относительно положения равновесия. Если потенциальная энергия пружины выражается соотношением

$$U(x) = \frac{1}{2} Cx^2 - \frac{1}{3} sCx^3, \quad (144)$$

где  $s$  — постоянная ангармоничности, то упругая сила будет равна \*)

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -Cx + sCx^2. \quad (145)$$

Знак минус в (144) введен для того, чтобы выполнялось общее физическое условие, при котором сила должна уменьшаться для больших положительных значений  $x$ .

\*) При этом сила обращается в нуль как при  $x=0$ , так и при  $x=1/s$ . Предполагается, что амплитуда движения мала по сравнению с  $1/s$ , так что частица при  $x=0$  остается вблизи минимума потенциальной энергии, выражаемой соотношением (144).

Уравнение движения становится нелинейным:

$$M\ddot{x} + Cx - sCx^2 = 0, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x - s\omega_0^2 x^2 = 0. \quad (146)$$

Присутствие члена  $x^2$  делает это уравнение нелинейным. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$x = A (\cos \omega t + q \cos 2\omega t) + x_1, \quad (147)$$

где  $q$  и  $x_1$  — постоянные, которые должны быть определены. Выбор именно  $\cos \omega t$  вызван исключительно соображениями удобства, так как можно использовать любую линейную комбинацию  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ . Однако, когда мы выбираем  $\cos \omega t$ , математики учат нас, что следует также брать и  $\cos 2\omega t$ . Мы находим, что

$$\ddot{x} = -\omega^2 A (\cos \omega t + 4q \cos 2\omega t), \quad (148)$$

$$\begin{aligned} x^2 &= A^2 (\cos^2 \omega t + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A^2 \cos 2\omega t + \dots, \end{aligned} \quad (149)$$

где использовано тождество

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t).$$

В выражении для  $x^2$  мы пренебрегли членами, содержащими  $q$  и  $x_1$ , так как  $x^2$  входит в уравнение движения в виде произведения на  $s$ . Мы считаем, что  $sA \ll 1$ . Дифференциальное уравнение (146) приобретает вид

$$\begin{aligned} -\omega^2 A (\cos \omega t + 4q \cos 2\omega t) + \omega_0^2 A (\cos \omega t + q \cos 2\omega t) + \\ + \omega_0^2 x_1 - \frac{1}{2} s\omega_0^2 A^2 - \frac{1}{2} s\omega_0^2 A^2 \cos 2\omega t + \dots = 0. \end{aligned} \quad (150)$$

Условие, при котором коэффициент при  $\cos \omega t$  в (150) будет стремиться к нулю, выражается соотношением

$$-\omega^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (151)$$

Таким образом, в этом приближении частота не изменяется. Условие, при котором коэффициент при  $\cos 2\omega t$  будет стремиться к нулю, имеет вид

$$-3q - \frac{1}{2} sA = 0, \quad q = -\frac{1}{6} sA. \quad (152)$$

Из (150) находим для смещения  $x_1$ :

$$x_1 - \frac{1}{2} sA^2 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2} sA^2. \quad (153)$$

Среднее по времени положение мы найдем из (147):

$$\langle x \rangle = A (\langle \cos \omega t \rangle + q \langle \cos 2\omega t \rangle) + x_1. \quad (154)$$

Так как  $\langle \cos \omega t \rangle = 0$  и  $\langle \cos 2\omega t \rangle = 0$ , то

$$\langle x \rangle = x_1 = \frac{1}{2} sA^2. \quad (155)$$

В электрической аналогии этой задачи применение в нелинейном электрическом контуре переменного напряжения приводит к появлению в этом контуре постоянной составляющей напряжения. Какие вы можете назвать типы элементов нелинейного электрического контура?

Из (145) мы видим, что восстанавливающая сила больше для отрицательных значений  $x$ , чем для положительных. Поэтому неудивительно, что перемещение, соответствующее (155) и выражающее среднее положение колеблющейся частицы,

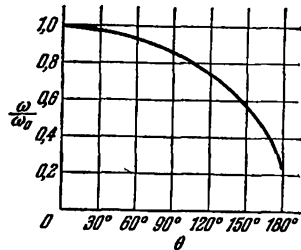


Рис. 7.25.

будет соответствовать положительному направлению оси  $x$ , в котором восстанавливающая сила слабее. Смещение (155) пропорционально постоянной ангармоничности  $s$  и квадрату амплитуды колебания. Мы знаем из полученных ранее результатов, что энергия гармонического осциллятора пропорциональна  $A^2$ . Из статистической физики (т. V) следует, что средняя энергия классического гармонического осциллятора в тепловом равновесии равна  $kT^*$ , где  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — абсолютная температура. Если это

верно, то приближенно мы можем считать, что

$$\langle x \rangle \propto A^2 \propto T. \quad (156)$$

Этот вывод позволяет объяснить термическое расширение твердых тел (\*\*). Экспериментальные результаты для кристалла хлористого калия приведены на рис. 7.26.

### Д о п о л н е н и е 3. Модулирование параметров осциллятора (параметрическое усиление)

Теперь мы рассмотрим замечательный и в то же время важный эффект параметрического усиления, или возбуждение субгармоник модулирующей одного из физических параметров осциллятора. Например, в контуре, состоящем из сопротивления  $R$ , самоиндукции  $L$  и емкости  $C$ , физическими параметрами осциллятора являются  $R, L$  и  $C$ . Мы можем модулировать (изменять) значение одной из этих величин. Предположим, что в контуре, не совершающем вынужденных колебаний, мы изменяем или модулируем емкость, изменяя расстояние между пластинами(\*\*\*)).

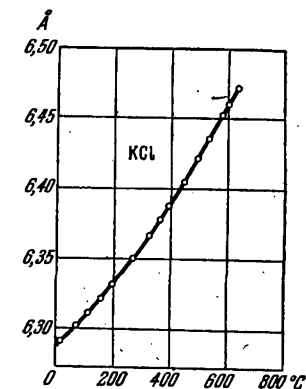


Рис. 7.26. Зависимость длины ребра кубической ячейки кристалла хлористого калия (КСК) от температуры (°C). (По Р. Е. Главеру)

Особый интерес представляет случай модуляции с частотой  $2\omega_0$ , где  $\omega_0$  — первоначальная частота осциллятора. Предположим, что затухание мало.

Напишем уравнение осциллятора в следующем виде:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 [1 - \varepsilon \sin 2\omega_0 t] x = 0, \quad (157)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ . Член, содержащий  $\varepsilon$ , характеризует модуляцию с частотой  $2\omega_0$  восстанавливающей силы осциллятора. Будем искать решение этого уравнения в виде функции от частоты, представляющей собой резонансную частоту контура, равную

\*) Вывод о том, что тепловая энергия пропорциональна температуре, справедлив почти для всех твердых тел при комнатной и более высоких температурах и несправедлив при низких температурах вследствие квантовых эффектов, рассматриваемых в т. IV.

\*\*) Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов для отрицательных значений  $x$  обычно существенно отрицательна (т. е. соответствует отталкиванию), и поэтому  $s$  и  $\langle x \rangle$  положительны, что соответствует расширению твердых тел при их нагревании. Немногие известные случаи сжатия твердых тел при нагревании связаны преимущественно с эффектами магнитного упорядочения спинов электронов. Для сплавов с малым коэффициентом расширения, например, таких, как инвар, тепловое расширение и магнитное сжатие взаимно компенсируют друг друга в той области температур, которая представляет практический интерес.

\*\*\*) Это правильный, но слишком грубый метод; в микроволновых приемниках емкость полупроводникового диода изменяется в результате изменения напряжения, приложенного к диоду. Для этого широко используется модулятор на диодах, который называется вариконд. Модуляция емкости аналогична модуляции жесткости пружины. В принципе жесткость может быть модулирована попеременным нагреванием и охлаждением пружины в том случае, если значение  $C$  зависит от температуры.

половине частоты модуляции:

$$x = e^{\beta t} \sin \omega_0 t. \quad (158)$$

Экспоненциальный множитель  $e^{\beta t}$  фигурирует здесь потому, что при отсутствии модуляции амплитуда будет уменьшаться; мы можем ожидать, что при значительной амплитуде модуляции  $\varepsilon$  могут существовать решения, возрастающие со временем по экспоненциальному закону. Это значит, что модуляция может привести систему к еще большим колебаниям.

Подставляя (158) в (157), мы находим для каждого члена в отдельности:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \omega_0^2 e^{\beta t} \sin \omega_0 t + 2\beta \omega_0 e^{\beta t} \cos \omega_0 t + \beta^2 e^{\beta t} \sin \omega_0 t, \\ \frac{1}{\tau} \dot{x} &= \frac{\beta}{\tau} e^{\beta t} \sin \omega_0 t + \frac{\omega_0}{\tau} e^{\beta t} \cos \omega_0 t, \\ \omega_0^2 x &= \omega_0^2 e^{\beta t} \sin \omega_0 t, \\ -\varepsilon \omega_0^2 x \sin 2\omega_0 t &= -\frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^2 e^{\beta t} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

В последней строчке мы использовали тождество

$$2(\sin 2\omega_0 t) \sin \omega_0 t = \cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t. \quad (160)$$

Теперь мы предположим, что в (159) член, содержащий  $\beta^2$ , где  $\beta \ll \omega_0$ , мал по сравнению с членом, содержащим  $\beta \omega_0$  и  $\omega_0^2$ . Это согласуется с окончательным решением. Кроме того, коэффициент у членов, содержащих  $\sin \omega_0 t$ , стремится к нулю. Условие, что члены, содержащие  $\cos \omega_0 t$ , обращаются в нуль, имеет вид

$$2\beta \omega_0 + \frac{\omega_0}{\tau} - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^2 = 0, \quad (161)$$

или

$$\beta = \frac{1}{4} \varepsilon \omega_0 - \frac{1}{2\tau}. \quad (162)$$

Поэтому  $\beta$  окажется положительным и амплитуда  $x$  будет возрастать экспоненциально со временем, если

$$\varepsilon > \frac{2}{\omega_0 \tau}. \quad (163)$$

Это неравенство представляет собой условие колебаний контура с частотой  $\omega_0$  при частоте модуляции  $2\omega_0$ . Мы не показали, что  $\omega_0$  будет единственной частотой, наблюдаемой в системе. Заметим, что выше мы условились, что  $\beta \ll \omega_0$ . Из уравнения (162) получим

$$\varepsilon \ll 4 + \frac{2}{\omega_0 \tau}. \quad (164)$$

Ясно, что мы можем выбрать  $\varepsilon$  таким образом, чтобы одновременно удовлетворить (162) и (163), если положить  $\frac{2}{\omega_0 \tau} \ll 4$ , т. е. если  $Q = \omega_0 \tau \gg 1/2$ .

Что можно сказать относительно члена, содержащего  $\cos 3\omega_0 t$ ? В пределах рассматриваемого приближения мы не можем учесть этот член. Разумеется, из этого рассмотрения мы не можем судить о важности этого члена. Уравнение (157) можно точно решить с помощью табулированных функций, называемых функциями Матье, и получить результаты, согласующиеся с нашим приближенным рассмотрением. (Теория функций Матье не является элементарной.) Для того чтобы убедиться в существовании параметрического усиления, проще всего заменить синусоидальную модуляцию модулирующей сигналом прямоугольной формы. Это представляется сделать учащемуся. Прежде всего напомним вместо (157) уравнение

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 (1 \pm \varepsilon) x = 0, \quad (165)$$

где  $-e$  относится к промежутку времени от 0 до  $\pi/2\omega_0$ , а  $+e$  — к промежутку от  $\pi/2\omega_0$  до  $\pi/\omega_0$  и т. д. В пределах каждого промежутка времени уравнение (165) выражает поведение простого гармонического осциллятора, и оно легко может быть решено точно. Для любых двух промежутков собственные частоты являются, конечно, разными. Вы получите полное точное решение, выбирая соответствующие граничные условия в конечных точках интервала. Граничные условия заключаются в том, что  $x$  и  $\dot{x}$  всюду должны быть непрерывными.

**Математическое дополнение. Комплексные числа и гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания**

Мы приведем теперь в очень кратком виде решение задачи о гармоническом осцилляторе, совершающем вынужденные колебания, используя комплексные числа по схеме, изложенной в конце гл. 4. Уравнение движения (165) можно записать теперь в такой форме (для удобства вместо  $\sin \omega t$  будем писать  $\cos \omega t$ ):

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \cos \omega t. \quad (166)$$

Заменяем теперь член, характеризующий силу, следующим выражением:

$$\alpha_0 e^{i\omega t} \equiv \alpha_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (167)$$

В конце вычисления мы можем принять за решение вещественную часть  $x$ , если вынуждающая сила равна  $\alpha_0 \cos \omega t$  ( $\alpha_0$  — вещественная величина).

Решение (166) будем искать в виде

$$x = X_0 e^{i\omega t}, \quad (168)$$

где  $X_0$  может быть комплексным числом. Подставляя (168) в (166), получаем

$$\left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \omega_0^2\right) X_0 e^{i\omega t} = \alpha_0 e^{i\omega t}. \quad (169)$$

Отсюда находим, что

$$X_0 = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)}. \quad (170)$$

Полезно отдельно рассмотреть вещественную и мнимую части этой величины. Из (170) находим, что

$$X_0 = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)} = \alpha_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (171)$$

и соответственно вещественная и мнимая части равны

$$\operatorname{Re}(X_0) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}, \quad (172)$$

$$\operatorname{Im}(X_0) = \frac{-(\omega/\tau) \alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}.$$

В предельном случае  $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \omega/\tau$  мы получаем

$$\operatorname{Re}(X_0) \approx \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{Im}(X_0) \approx 0. \quad (173)$$

Это условие называется внерезонансным, и в этом случае вещественная часть  $X_0$  гораздо важнее, чем мнимая часть.

В пределе при  $|\omega_0^2 - \omega^2| \ll \omega/\tau$  мы говорим, что находимся *вблизи резонанса*, и при  $\omega = \omega_0$  наступает *резонанс*, или центр резонанса. При  $\omega = \omega_0$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(X_0) &= 0, \\ \operatorname{Im}(X_0) &= \alpha_0 \frac{\tau}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

При больших значениях  $\tau$  затухание ослабляется и увеличивается мнимая часть смещения при резонансе.

Запишем  $X_0$  в форме  $\rho e^{i\varphi}$ , как в конце гл. 4. Тогда из (170) мы получаем для амплитуды смещения

$$\rho = (X_0 X_0^*)^{1/2} = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{1/2}}. \quad (175)$$

Здесь  $X_0^*$  — комплексная величина, сопряженная  $X_0$ , так что произведение  $X_0 X_0^*$  представляет собой вещественную величину. Из (171) мы находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (176)$$

где  $\varphi$  — угол между  $x$  и  $F$ .

Средняя поглощенная мощность равна

$$\langle P \rangle = \langle F \dot{x} \rangle = \langle \operatorname{Re}(F) \operatorname{Re}(\dot{x}) \rangle = \langle [M\alpha_0 \cos \omega t] [-\rho \omega \sin(\omega t + \varphi)] \rangle. \quad (177)$$

Мы выбрали вещественную часть  $x$  для того, чтобы наше решение соответствовало физическим условиям в том случае, когда вещественная часть  $F$  представляет собой реальную силу. Существуют другие способы вычисления среднего по времени значения, исключаящие необходимость рассмотрения той части  $x$ , которая имеет одинаковую фазу с  $F$ . Используя (172) и соотношение  $\rho \sin \varphi = \operatorname{Im}(X_0)$ , мы получаем из (177)

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= -M\alpha_0 \rho \langle \cos^2 \omega t \rangle \sin \varphi = \\ &= -\frac{1}{2} M\alpha_0 \omega \operatorname{Im}(X_0) = \frac{1}{2} M\alpha_0^2 \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}. \end{aligned} \quad (178)$$

Этот результат аналогичен выводу, полученному ранее в виде соотношения (129).

## ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Динамика твердых тел представляет собой увлекательный и вместе с тем сложный предмет, являющийся венцом классической механики и в то же время наиболее трудным ее разделом. (Эта глава при первом чтении данного тома может быть пропущена \*.) Сложность задачи состоит в том, что нам нужно одновременно искать решение трех дифференциальных уравнений для компонент угловой скорости. Мы должны рассматривать результаты как в системе отсчета, связанной с вращающимся телом, так и в инерциальной системе отсчета, в которой центр масс тела покоится. Прототипом всех задач динамики твердых тел является задача о гироскопе. Весьма полная теория гироскопа изложена в четырехтомной монографии Ф. Клейна и А. Зоммерфельда «Теория волчков».

Основная цель этой небольшой главы заключается в том, чтобы получить точные уравнения движения твердого тела и раскрыть их содержание. Для решения этой задачи у нас есть все необходимое. Под твердым телом мы понимаем собрание частиц, взаимные расстояния между которыми не изменяются. Поэтому мы не рассматриваем задачи, в которых тело деформируется или колеблется в результате вращения. В этой главе приводится решение нескольких элементарных задач, таких, как задача о гироскопе и задача об электроне или ядерном спиновом резонансе в магнитном поле.

## 8.1. Уравнения движения вращающегося тела

В гл. 6 мы видели, что вращательное движение группы частиц описывается уравнением движения

$$\frac{dJ}{dt} = N. \quad (1)$$

Здесь  $J$  — момент импульса и  $N$  — момент вращения. Обе эти величины должны быть отнесены к соответствующим образом выбранному общему началу отсчета, за который обычно (но не всегда)

---

\*) При первом чтении этой главы рекомендуется остановиться на уравнении (6); при втором чтении можно остановиться на уравнении (47). Последующий материал более труден и требует для усвоения много времени и упорства.



принимается центр масс тела. Тогда

$$\mathbf{J} = \sum M_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{N} = \sum \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n, \quad (2)$$

где  $\mathbf{F}_n$  — внешняя сила, действующая на  $n$ -ю частицу.

Основная физическая идея этой главы может быть иллюстрирована на простом примере тонкого круглого обруча (радиуса  $R$ ), вращающегося относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча и проходящей через центр круга. В этом случае вся масса  $M$  обруча находится на одинаковом расстоянии от оси и величина момента импульса  $\mathbf{J}$  равна

$$J = MRv = MR^2\omega. \quad (3)$$

Здесь мы использовали также тот факт, что все точки обруча движутся с одинаковой скоростью, равной  $R\omega$ . Из формулы (3) видно, что произведение  $MR^2$  характеризует свойство самого обруча. Величину

$$I = MR^2 \quad (4)$$

обычно называют *моментом инерции* обруча при его вращении относительно вполне определенной оси. Тогда  $J = I\omega$ , и мы можем написать, что

$$\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (5)$$

В этом случае соблюдается условие, при котором ось вращения остается перпендикулярной к плоскости обруча.

В дальнейшем мы рассмотрим обобщение понятия момента инерции для тел произвольной формы и произвольного распределения массы.

Если радиус обруча равен  $100 \text{ см}$  и масса равна  $1 \text{ кг}$ , то  $I = 10^3 \text{ г} \cdot (10^2 \text{ см})^2 = 10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ . Момент импульса при угловой скорости  $100 \text{ рад/сек}$  равен  $J = 10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot 10^2 \text{ сек}^{-1} = 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек} = 10^9 \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ . Если к ободу приложена сила, равная  $10^4 \text{ дин}$  и направленная параллельно оси вращения, то момент этой силы  $N = 10^2 \text{ см} \cdot 10^4 \text{ дин} = 10^6 \text{ дин} \cdot \text{см}$ . Направление этого момента совпадает с направлением векторного произведения  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  и перпендикулярно к оси вращения.

Из (1) мы видим, что если момент приложен лишь в течение короткого промежутка времени  $\Delta t$ , то  $\Delta \mathbf{J} = \mathbf{N} \Delta t$ . Это указывает на то, что в результате кратковременного приложения момента вектор  $\mathbf{J}$  поворачивается в направлении вектора  $\Delta \mathbf{J}$ ; существенно, однако, заметить, что направление вектора  $\Delta \mathbf{J}$  не совпадает с направлением силы  $\mathbf{F}$ , а перпендикулярно к ней. Это замечательное свойство вращающихся систем. Только что приведенное рассуждение имеет смысл лишь в том случае, когда  $\Delta J \ll J$ , т. е. когда первоначально тело уже вращалось. Для рассмотренного выше числового примера промежуток времени  $\Delta t = 10 \text{ сек}$  может считаться коротким, так как в этом случае величина  $\Delta J = N \Delta t = 10^6 \text{ дин} \cdot \text{см} \cdot 10 \text{ сек} = 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{сек}$  мала по сравнению с величиной  $J = 10^9 \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ .

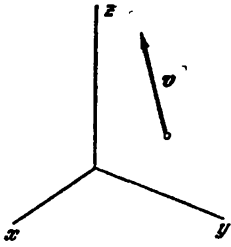


Рис. 8.1. Частица, движущаяся без всяких ограничений, обладает тремя степенями свободы ( $f=3$ ).

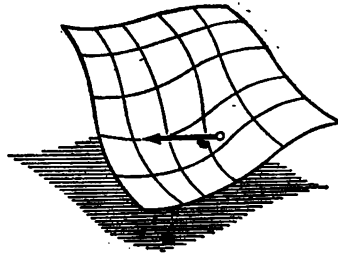


Рис. 8.2. Частица, движение которой ограничено поверхностью, обладает уже только двумя степенями свободы ( $f=2$ ).



Рис. 8.3. Шарик, который скользит по проволоке, имеет всего только одну степень свободы ( $f=1$ ).

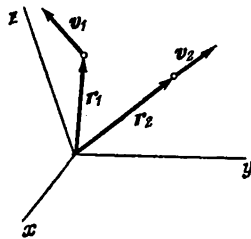


Рис. 8.4. Система из двух свободных частиц обладает  $f=(2 \times 3)=6$  степенями свободы.

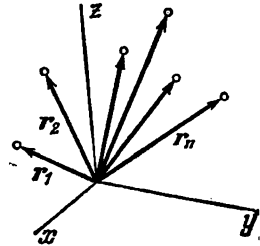
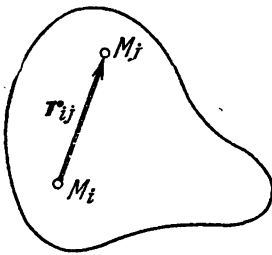
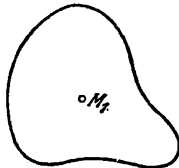


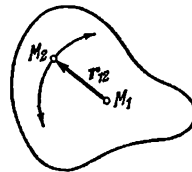
Рис. 8.5. Система из  $N$  свободных частиц имеет  $f=3N$  степеней свободы.



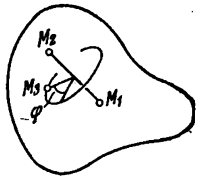
а)



б)



в)



г)

Рис. 8.6. а) Твердое тело состоит из многих частиц, но одновременно существует и много связей. Вектор  $r_{ij}$ , определяющий расстояние между двумя частицами  $M_i$  и  $M_j$ , задан. Поэтому  $f \ll 3N$ . б) Допустим, что в теле мы выбрали частицу  $M_1$ . Эта частица обладает тремя степенями свободы. в) Пусть выбрана система отсчета, в которой точка  $M_1$  неподвижна. Тогда точка  $M_2$  будет иметь уже только две степени свободы, так как она может двигаться по поверхности сферы радиусом  $r_{12}$ . г) Пусть система отсчета выбрана так, что  $M_1$  и  $M_2$  неподвижны, а какая-то другая частица  $M_3$  в теле имеет только одну степень свободы, следовательно, может двигаться по окружности, изображенной на чертеже. В этом случае твердое тело обладает числом степеней свободы  $f=6$ .

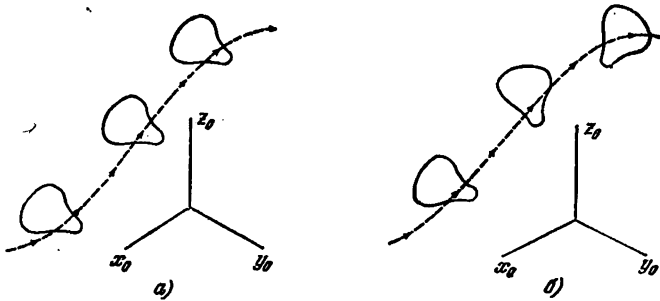


Рис. 8.7. а) Другой случай: наше твердое тело может двигаться поступательно без вращения относительно инерциальной системы отсчета  $(x_0, y_0, z_0)$ . В этом случае имеется три степени свободы поступательного движения. б) Пусть, кроме того, тело может вращаться. В этом случае существует еще три степени свободы вращательного движения, поэтому  $f=3+3=6$ .

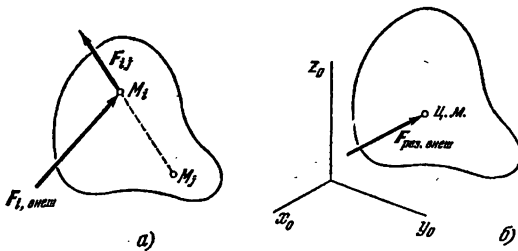


Рис. 8.8. а) Сила, действующая на каждую частицу массы

$M_i$ , равна  $F_i = F_{i, \text{внеш}} + \sum_{j \neq i} F_{ij}$ . Если, однако, внутренние силы удовлетворяют третьему закону Ньютона, то они попарно уничтожаются. Поэтому  $F_{\text{внеш}} = Ma_{\text{Ц.м.}}$ . Центр масс движется поступательно, если к нему приложена результирующая внешняя сила и вся масса сосредоточена в этой точке.

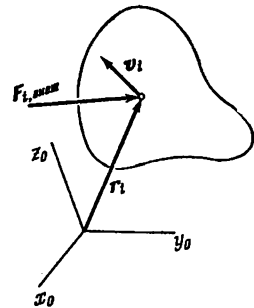


Рис. 8.9. Как вращается тело? Относительно начала инерциальной системы отсчета  $dJ/dt = N_{\text{рез.внеш}}$ , если внутренние силы центральные и удовлетворяют третьему закону Ньютона.

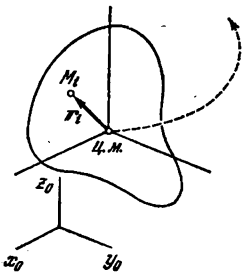


Рис. 8.10. Если тело движется поступательно, то выбор точки с координатами  $x_0, y_0, z_0$  в качестве начала системы отсчета очень удобен! Относительно центра масс, принятого за начало отсчета, мы также имеем  $dJ/dt = N_{\text{рез.внеш}}$ ! При рассмотрении задач, связанных с вращением, во многих случаях центр масс удобно принимать за начало отсчета.

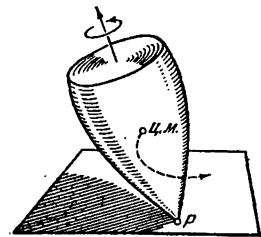


Рис. 8.11. Если точка  $P$  находится в покое (даже в том случае, когда центр масс движется, как это изображено на рисунке), то эта точка (но не центр масс) может служить началом координат.

Очень важно, чтобы был ясен вопрос о выборе начала отсчета и инерциальной системы координат. Если сумма сил равна нулю, то начало отсчета определяется положением центра масс:

$$R_{ц.м.} = \frac{\sum M_n r_n}{\sum M_n}, \quad (6)$$

так как всегда существует такая инерциальная система отсчета, в которой центр масс собрания частиц будет покоиться при условии, что результирующая сила обращается в нуль. В общем случае тело будет вращаться относительно оси, проходящей через начало отсчета.

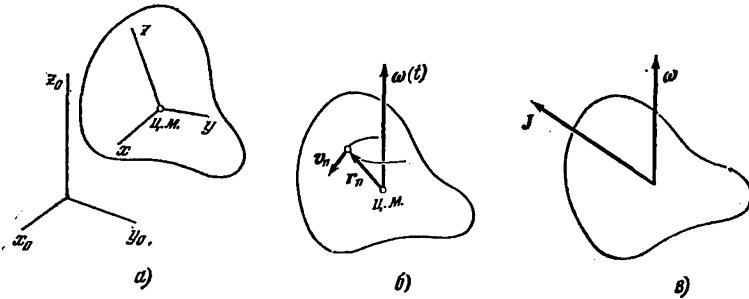


Рис. 8.12. а) Если мы выберем центр масс за начало координат, то получим систему отсчета  $(x, y, z)$ , связанную с телом. Система отсчета  $(x_0, y_0, z_0)$  представляет собой инерциальную систему, и ее не следует путать с системой  $(x, y, z)$ . б) В какой-то момент времени частицы тела могут приобрести угловую скорость  $\omega$  относительно центра масс. Тогда мы используем оси, связанные с телом. в) Так как

$$J = \omega \sum M_n r_n^2 - \sum M_n (r_n \cdot \omega) r_n$$

относительно осей, связанных с телом, то  $J$  и  $\omega$  не параллельны.

Пусть мгновенное значение угловой скорости тела, вращающегося относительно оси, проходящей через начало отсчета, будет равно  $\omega$ . Линейная скорость  $n$ -й частицы относительно начала отсчета, как это было показано в гл. 3, равна

$$v_n = \omega \times r_n, \quad (7)$$

после чего (2) принимает вид

$$J = \sum M_n r_n \times v_n = \sum M_n r_n \times (\omega \times r_n). \quad (8)$$

Теперь нам нужно переписать векторное соотношение между моментом импульса  $J$  и угловой скоростью  $\omega$  в компактной форме. Для этого воспользуемся векторным тождеством

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B), \quad (9)$$

в котором произведем следующие замены:

$$A \rightarrow r_n, \quad B \rightarrow \omega, \quad C \rightarrow r_n.$$

Тогда

$$r_n \times (\omega \times r_n) = \omega r_n^2 - r_n (r_n \cdot \omega). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), получим

$$\mathbf{J} = \sum M_n [\omega \mathbf{r}_n^2 - \mathbf{r}_n (\mathbf{r}_n \cdot \omega)]. \quad (11)$$

Все частицы обладают одной и той же угловой скоростью, и поэтому формулу (11) можно переписать в проекциях на оси координат. Каждая из компонент вектора  $\omega$  будет умножаться на некоторую сумму произведений массы и положений частиц. Например, компонента вектора  $\mathbf{J}$  по оси  $x$  будет равна

$$J_x = \omega_x \sum M_n r_n^2 - \sum x_n (\mathbf{r}_n \cdot \omega). \quad (12)$$

Записывая скалярное произведение  $(\mathbf{r}_n \cdot \omega)$  в виде

$$(\mathbf{r}_n \cdot \omega) = x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z,$$

получаем

$$J_x = \omega_x \sum M_n r_n^2 - \omega_x \sum M_n x_n^2 - \omega_y \sum M_n x_n y_n - \omega_z \sum M_n x_n z_n. \quad (13)$$

Такие же выражения можно написать для  $J_y$  и  $J_z$ .

*Инерциальные коэффициенты.* Мы видим, что выражение (13) содержит три коэффициента:

$$\sum M_n (r_n^2 - x_n^2), \quad - \sum M_n x_n y_n, \quad - \sum M_n x_n z_n.$$

Каждый из этих коэффициентов зависит от распределения масс в теле и от *мгновенной* ориентации тела относительно осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые в рассматриваемом случае совпадают с инерциальной системой отсчета. Поэтому эти коэффициенты будут зависеть от времени. Мы будем называть их *инерциальными коэффициентами* или *моментами инерции*:

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &\equiv \sum M_n (r_n^2 - x_n^2), \\ I_{xy} &\equiv - \sum M_n x_n y_n, \\ I_{xz} &\equiv - \sum M_n x_n z_n. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Аналогичным образом можно написать соответствующие коэффициенты, входящие в выражения для  $J_y$  и  $J_z$ . Теперь мы можем написать три уравнения для компонент вектора  $\mathbf{J}$ , выраженного формулой (11):

$$\left. \begin{aligned} J_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \\ J_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ J_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Итак, мы видим, что для тела произвольной формы и с произвольным распределением массы момент импульса  $\mathbf{J}$  представляет собой не просто произведение скаляра на вектор  $\omega$  угловой скорости. Поэтому в общем случае направление вектора  $\mathbf{J}$  не совпадает с направлением вектора  $\omega$ . Это обстоятельство является причиной сложного поведения вращающихся тел. Сравнительно просто обстоит дело с задачами динамики твердых тел сферической формы, в которых, как мы увидим, вектор  $\mathbf{J}$  всегда параллелен вектору  $\omega$ . В отсутствие момента вращения вектор  $\mathbf{J}$  сохраняет постоянство,

в общем же случае для тел произвольной формы вектор  $\omega$  будет прецессировать вокруг вектора  $\mathbf{J}$ .

Величины  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  и  $I_{zz}$  называются диагональными членами матрицы

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

а все другие величины — недиагональными членами. Заметим, что диагональный член (например,  $I_{xx}$ ), равный  $\sum M_n(r_n^2 - x_n^2) = \sum M_n(y_n^2 + z_n^2)$ , представляет собой сумму произведений каждой массы на квадрат ее расстояния от оси вращения; поэтому мы его называем «моментом инерции относительно оси». Если  $\rho(r)$  представляет собой плотность тела в точке, радиус-вектор которой есть  $\mathbf{r}$ , то мы можем записать величину  $I$  в виде интегралов

$$I_{xx} = \int \rho(r)(r^2 - x^2) dV, \quad I_{xy} = - \int \rho(r)xy dV \text{ и т. д.}, \quad (16)$$

где  $dV$  — элементарный объем. Можно убедиться в правильности перехода от суммирования к интегрированию, приняв во внимание,

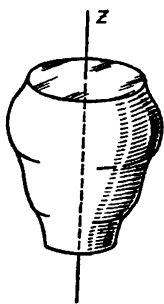


Рис. 8.13. Предположим, что у нас есть тело, обладающее осевой симметрией (например, относительно оси  $z$ ). Тогда  $J_{xy} = 0$ , потому что для любой точки  $M_n$  с координатами  $x_n, y_n$  существует точка  $M'_n$  с координатами  $-x_n, y_n$ .

что  $\int \rho(r) dV$  представляет собой массу, содержащуюся в элементе объема, по которому проводится интегрирование.

Сумма диагональных членов равна

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \sum M_n r_n^2 = 2 \int \rho(r)r^2 dV, \quad (17)$$

что следует из формул (14) и (16) для  $I_{xx}$  и аналогичных формул для  $I_{yy}$  и  $I_{zz}$ . Заметим, что сумма (17) *изотропна*, т. е. не зависит от ориентации тела относительно координатных осей. Укажем также, что недиагональные члены симметричны:

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy}. \quad (18)$$

**Пример.** Случай, когда вектор  $\mathbf{J}$  не параллелен вектору  $\omega$ . Две массы, 200 г и 300 г, соединены легким стержнем длиной 50 см. Центр масс системы принят за начало декартовой системы координат. Стержень расположен в плоскости  $xy$  и образует угол в  $20^\circ$  с осью  $x$ . Найдём инерциальные коэффициенты  $I_{xx}$  и  $I_{xy}$ .

Прежде всего вычислим расстояние центра масс от 200-граммовой массы. Из (6) находим

$$R_{ц.м.} = \frac{200 \cdot 0 + 300 \cdot 50}{200 + 300} = 30 \text{ см.}$$

Обозначим массу в 200 г через  $M_1$  и выпишем ее декартовы координаты, приняв центр масс за начало отсчета:

$$\begin{aligned}x_1 &= 30 \sin 20^\circ = 30 \cdot 0,342 \text{ см} \cong 10,3 \text{ см}, \\y_1 &= 30 \cos 20^\circ = 30 \cdot 0,940 \text{ см} \cong 28,2 \text{ см}, \\z_1 &= 0.\end{aligned}$$

Декартовы координаты массы в 300 г, которую мы обозначим через  $M_2$ , будут равны

$$\begin{aligned}x_2 &= -20 \sin 20^\circ \cong -6,8 \text{ см}, \\y_2 &= -20 \cos 20^\circ \cong -18,8 \text{ см}, \\z_2 &= 0.\end{aligned}$$

Используя эти значения координат, мы можем по формулам (14) вычислить значение инерциальных координат:

$$\begin{aligned}I_{xx} &= M_1 (r_1^2 - x_1^2) + M_2 (r_2^2 - x_2^2) = 200 [(30)^2 - (10,3)^2] + \\&\quad + 300 [(20)^2 - (6,8)^2] = 2,65 \cdot 10^5 \text{ г} \cdot \text{см}^2, \\I_{xy} &= -M_1 x_1 y_1 - M_2 x_2 y_2 = -200 \cdot 28,2 \cdot 10,3 - 300 \cdot 6,8 \cdot 18,8 = \\&= -0,96 \cdot 10^6 \text{ г} \cdot \text{см}^2.\end{aligned}$$

Теперь предположим, что стержень вращается вокруг оси  $x$  с угловой скоростью  $\omega$ . Найдем компоненты вектора  $J$ .

Из (15) получаем

$$J_x = I_{xx}\omega, \quad J_y = I_{xy}\omega, \quad J_z = 0,$$

где мы использовали тот факт, что  $I_{zx} = 0$  для стержня в указанном выше положении, так как  $z_1$  и  $z_2$  равны нулю.

Отсюда

$$\frac{J_y}{J_x} = \frac{I_{xy}}{I_{xx}} = \frac{-0,96 \cdot 10^6}{2,65 \cdot 10^5} = -0,363.$$

Таким образом, мы видим, что в тот момент, когда стержень расположен в плоскости  $xy$ , вектор момента импульса также расположен в этой же плоскости и образует с осью  $x$  угол  $\varphi = \text{arctg}(-0,363) \cong -20^\circ$ . Поэтому вектор  $J$  вращается вокруг оси  $x$  и не параллелен вектору  $\omega$ , а перпендикулярен к стержню.

Каким образом можно понять этот результат? Укажем прежде всего, что момент инерции стержня относительно своей собственной оси равен нулю (по нашему предположению обе массы представляют собой материальные точки). Поэтому у компоненты вектора  $\omega$ , параллельной стержню, отсутствует соответствующая компонента вектора  $J$ .

**Пример. Момент инерции шарового слоя.** Вычислим инерциальные коэффициенты для тонкого однородного шарового слоя, масса единицы поверхности которого равна  $\sigma$ , относительно оси, проходящей через центр шара (рис. 8.14).

Отметим, прежде всего, что вследствие симметрии сферического распределения массы относительно начала системы координат все недиагональные коэффициенты  $I_{xy}$ ,  $I_{yx}$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_{zx}$ ,  $I_{yz}$  и  $I_{zy}$  в (16) равны нулю. Это следует из того, что каждому члену в сумме или при интегральном определении, соответствующему координатам  $xy$ , в случае сферы всегда найдется член, соответствующий координатам  $(-x)y$ . Поэтому среднее значение  $\langle xy \rangle$  по сферической поверхности равно нулю.

Кроме того, так как  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , среднее значение для шарового слоя будет равно

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle. \quad (19)$$

Поэтому все диагональные коэффициенты  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  и  $I_{zz}$  равны между собой, а так как их сумма равна  $2 \sum M_n r_n^2$ , каждый из них равен  $\frac{2}{3} \sum M_n r_n^2$ :

$$I = I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} \sum M_n r_n^2 = \frac{2}{3} r^2 \sum M_n = \frac{2}{3} 4\pi r^2 \sigma. \quad (20)$$

Заметим, что масса слоя равна  $4\pi r^2 \sigma$ , где  $\sigma$  по-прежнему представляет собой поверхностную плотность (масса единицы поверхности) шарового слоя.

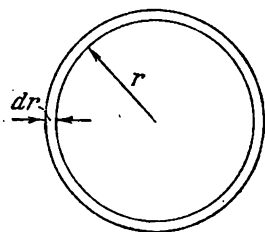


Рис. 8.14.  $M_{\text{шар. сл.}} = 4\pi r^2 \sigma$ . Однородный шаровый слой обладает аксиальной симметрией относительно  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и поэтому  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ . Точно так же из соображений симметрии

или  $I = I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} r^2 M_{\text{шар. сл.}}$

Поэтому  $I = (8\pi/3) \sigma \int_0^R r^4 dr$ , где

$\sigma$  — масса единицы поверхности шарового слоя.

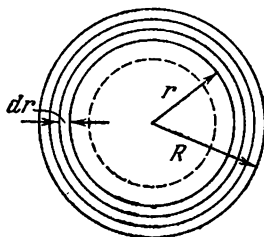


Рис. 8.15.  $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$ . Для того чтобы найти  $I$  для однородного твердого шара, мы делим его на концентрические шаровые слои и интегрируем:

$$I = \frac{8\pi}{3} \rho \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} M R^2.$$

**Пример. Момент инерции шара.** Вычислим  $I$  для однородного шара, объемная плотность которого равна  $\rho$ , относительно оси, проходящей через его центр (рис. 8.15). Мы можем разбить шар на шаровые слои толщиной  $dr$  и обладающие поверхностной



плотностью  $\sigma = \rho dr$ . Тогда из (20) для шара мы получаем

$$I \equiv I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} \int_0^R (4\pi r^2) (\rho dr) = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^R r^4 dr = \\ = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} MR^2. \quad (21)$$

Здесь  $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$  — масса,  $R$  — радиус шара.

Отметим, что и для шара и для шарового слоя компоненты момента импульса, вычисляемые по формулам (15), приводят к выводу, что  $\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega}$ . Таким образом, в случае шаровой симметрии вектор момента импульса всегда параллелен вектору угловой скорости.

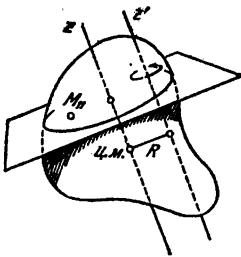
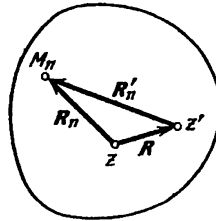
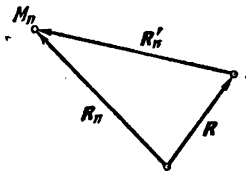


Рис. 8.16. Допустим, что мы хотим вычислить  $I_{z'z'}$ , где ось  $z'$  параллельна оси  $z$ . Как это можно сделать?



а)



б)

Рис. 8.17. а) Для любой материальной точки  $M_n$  мы можем провести плоскость, перпендикулярную к осям  $z$  и  $z'$  и проходящую через эту точку  $M_n$  (см. рис. 8.16). Тогда  $R_n^2 = x_n^2 + y_n^2$ . б) Поэтому  $I_{z'z'} = \sum M_n R_n'^2 = \sum M_n \times \times (R_n - R)^2 = \sum M_n R_n^2 + R^2 \sum M_n - 2 \sum M_n (R_n \cdot R)$ . Так как  $\sum M_n R_n = 0$ , то  $I_{z'z'} = MR^2 + I_{zz}$ ; в этом и состоит теорема о параллельных осях. Здесь  $M = \sum M_n$  представляет собой полную массу.

**Пример. Теорема о параллельных осях \*).** Вычислим  $I_{xx}$  для произвольного тела относительно оси, параллельной  $\hat{x}$  и расположенной на расстоянии  $a$  вдоль оси  $y$  от центра массы.

Для этого заменим в (14) все  $y_n$  на  $y_n + a$ , оставляя неизменными  $x_n$  и  $z_n$ . Тогда

$$\sum M_n r_n^2 \rightarrow \sum M_n (r_n^2 + 2y_n a + a^2), \quad (22)$$

но в то же время  $\sum M_n y_n = 0$  вследствие выбора положения центра масс. Поэтому новое значение  $I_{xx}$  будет равно

$$I_{xx} = \sum M_n (r_n^2 + a^2 - x_n^2) = I_{xx}^0 + a^2 \sum M_n, \quad (23)$$

где  $I_{xx}^0 = \sum M_n (r_n^2 - x_n^2)$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Таким образом, мы видим, что момент

\* В русской литературе эту теорему часто называют теоремой Гюйгенса — Штейнера. (Прим. ред.)

инерции относительно данной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс момент инерции относительно данной оси, вычисленный в предположении, что вся масса тела сосредоточена в центре масс. Этот результат очень полезен при рассмотрении вращающихся тел.

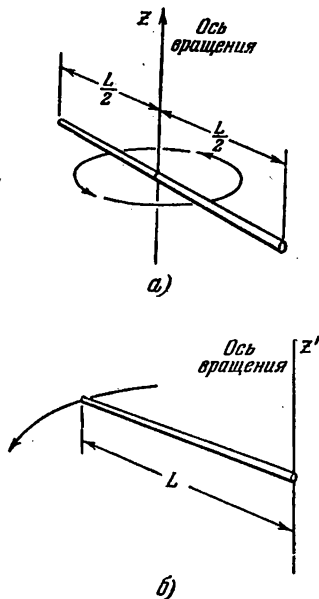


Рис. 8.18. а) Для тонкого твердого стержня  $I_{zz} \geq 2 \int_0^{L/2} x^2 \left( \frac{M}{L} \right) dx$ , где  $M$  — полная масса. Поэтому  $I_{zz} = \frac{1}{12} ML^2$ .

б) В этом случае  $I_{z'z'} = \int_0^L x^2 \left( \frac{M}{L} \right) dx = \frac{1}{3} ML^2$ ; в то же время  $\frac{1}{3} ML^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M \left( \frac{L}{2} \right)^2$ , что подтверждает теорему о параллельных осях.

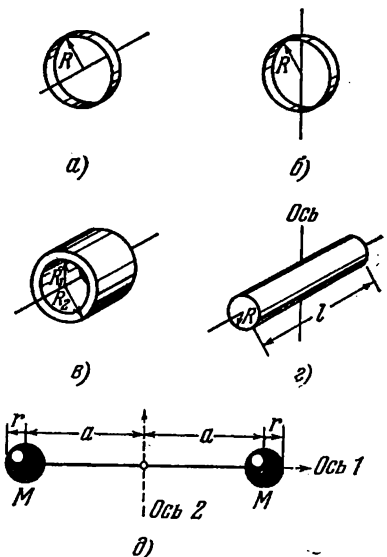


Рис. 8.19. Примеры моментов и инерции относительно осей, указанных на рисунке. а) Тонкое кольцо:  $I = MR^2$  (относительно оси цилиндра). б) Тонкое кольцо:  $I = \frac{1}{2} MR^2$  (относительно любого диаметра). в) Кольцевой цилиндр:  $I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$  (относительно оси цилиндра). г) Твердый цилиндр (или диск):  $I = \frac{1}{2} MR^2$  (относительно центрального диаметра). д) Два твердых шарика в виде гантели:  $I_1 = 2 \left( \frac{2}{5} Mr^2 \right)$  (относительно оси 1);  $I_2 = 2 \left( Ma^2 + \frac{2}{5} Mr^2 \right)$  (относительно оси 2).

Так как  $MR^2$  представляет собой момент инерции обруча (рис. 8.19, а) относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к его плоскости, то  $2MR^2$  будет равен моменту инерции обруча относительно параллельной оси, проходящей через обод обруча.

Из (21) и (23) видно, что момент инерции однородного шара (рис. 8.20) относительно оси, касательной к его поверхности, равен

$$I_{xx} = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2. \quad (24)$$

**Правила суммирования.** Соотношения (14), (15) и (16) могут быть записаны в очень краткой и компактной форме, если использовать тензорную символику записи, кратко изложенную в Математическом дополнении 2 к гл. 2. Повторим правила записи:

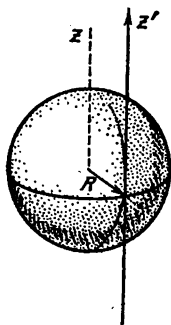


Рис. 8.20. Однородный шар:  $I_{z'z'}$  относительно ося, касательной к поверхности:

$$I_{z'z'} = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2.$$

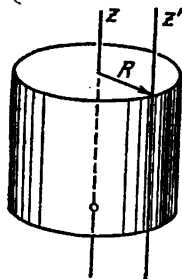


Рис. 8.21. Однородный цилиндр:

$$I_{zz} = \frac{1}{R^2} 2 \int_0^R Mr^3 dr = \frac{1}{2} MR^2;$$

$$I_{z'z'} = MR^2 + \frac{1}{2} MR^2 = \frac{3}{2} MR^2.$$

1. Если индексы, обозначенные греческими буквами, в произведении встречаются дважды, то складываются члены для  $x$ ,  $y$  и  $z$ , т. е.

$$I_{\mu\nu}\omega_\nu \equiv I_{\mu x}\omega_x + I_{\mu y}\omega_y + I_{\mu z}\omega_z. \quad (25)$$

2. Если индекс в произведении не встречается дважды, то он может относиться к  $x$ , к  $y$  или к  $z$ . Так, уравнение

$$J_\mu = I_{\mu\nu}\omega_\nu \quad (26)$$

эквивалентно системе уравнений (15). Сначала, например, мы можем вместо  $\mu$  написать  $x$ , и тогда (26) будет иметь вид

$$J_x = I_{x\nu}\omega_\nu \equiv I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z. \quad (27)$$

Гораздо короче написать (26), чем писать три уравнения (15).

3. Под  $x_\mu$  мы можем подразумевать  $x$ ,  $y$  или  $z$ . Если в произведении  $x_\mu x_\nu$  индекс  $\mu$  встречается дважды, то

$$x_\mu x_\mu = x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (28)$$

Если же в произведении  $x_\mu x_\nu$  греческие индексы дважды не встречаются, то  $x_\mu x_\nu$  должны писаться для  $xx$ , или для  $xy$ , или для  $yz$  и т. д. С помощью введенных обозначений выражению (16)

можно придать следующий вид:

$$I_{\mu\nu} = \int \rho(\mathbf{r}) (x_\alpha x_\alpha \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu) dV. \quad (29)$$

Здесь  $\delta_{\mu\nu}$  — символ Кронекера; он не равен нулю только при  $\mu=\nu$ , когда он равен единице. Допустим, что мы имеем дело с  $I_{xx}$ ; тогда член  $x_\alpha x_\alpha \delta_{\mu\nu}$  в (29) представляет собой  $r^2$ , а член  $x_\mu x_\nu$  — просто  $x^2$ . Разумеется, вполне можно обойтись и без этого способа записи. Его следует применять для сокращения письма только в тех случаях, когда вы совершенно уверены в ваших действиях.

## 8.2. Кинетическая энергия вращательного движения

Кинетическая энергия твердого тела относительно покоящегося центра масс называется энергией вращательного движения тела. Эта энергия выражается следующим образом:

$$K = \frac{1}{2} \sum M_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum M_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 dV. \quad (30)$$

Здесь  $v_n = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)$  и  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) \equiv (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2$ .

Рассмотрим сначала кинетическую энергию вращательного движения однородного шара. Пусть вектор  $\boldsymbol{\omega}$  параллелен оси  $z$ . Тогда

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (31)$$

Момент инерции однородного шара, плотность которого  $\rho$ , по формуле (16) равен

$$I = I_{zz} = \rho \int (x^2 + y^2) dV. \quad (32)$$

Поэтому из (30) получаем

$$K = \frac{1}{2} \rho \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 dV = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int (x^2 + y^2) dV = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (33)$$

Перейдем теперь к выражению для кинетической энергии вращательного движения твердого тела произвольной формы:

$$K = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x \omega_y I_{xy} + 2\omega_y \omega_z I_{yz} + 2\omega_z \omega_x I_{zx}). \quad (34)$$

Используя векторное соотношение

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad (35)$$

находим

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2. \quad (36)$$

Сокращенно эта формула может быть записана в следующем виде \*):

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \omega_\mu \omega_\nu x_\nu x_\nu - \omega_\mu x_\mu \omega_\nu x_\nu = \omega_\mu \omega_\nu (x_\alpha x_\alpha \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu). \quad (37)$$

\* На тот случай, если у вас есть какие-нибудь сомнения в том, как прочитать формулу (37), мы запишем ее в развернутом виде:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \left( \sum_\mu \omega_\mu^2 \right) \left( \sum_\nu x_\nu^2 \right) - \left( \sum_\mu \omega_\mu x_\mu \right) \left( \sum_\nu \omega_\nu x_\nu \right),$$

где  $\mu$  и  $\nu$  принимают значения  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Заметим, что  $\sum_\nu x_\nu^2 = r^2$ .

[Это соотношение легко могло быть написано непосредственно, без применения формулы (36), если воспользоваться символом  $\varepsilon_{\lambda\mu\nu}$ , введенным в Математическом дополнении 2 к гл. 2.]

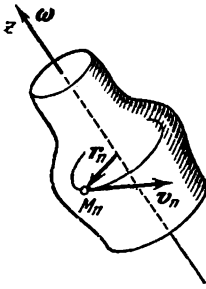


Рис. 8.22. Кинетическая энергия аксиально симметричного тела, вращающегося относительно оси симметрии, равна

$$K = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2.$$

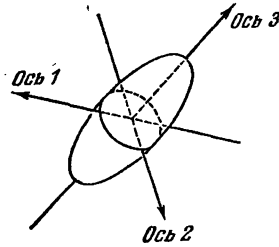


Рис. 8.23. Для любого твердого тела  $K = \frac{1}{2} I_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu$ . Поверх-

ность  $\frac{1}{2} I_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu = \text{const}$  представляет собой эллипсоид в пространстве  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ . На рисунке указаны главные оси (1, 2, 3) эллипсоида.

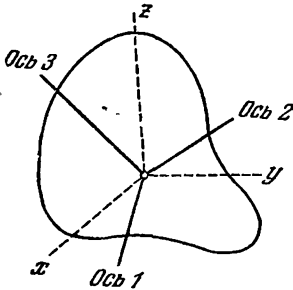


Рис. 8.24. Если мы повернем оси тела  $(x, y, z)$  соответствующим образом, то они совпадут с главными осями (1, 2, 3) эллипсоида. Отныне мы будем применять главные оси тела.

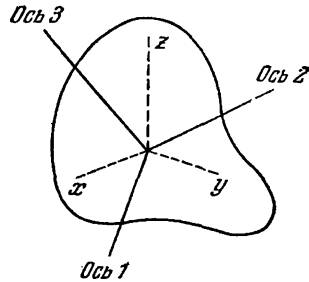


Рис. 8.25. Относительно главных осей 1, 2 и 3

$$K = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

и

$$J = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + I_3 \omega_3.$$

Эти выражения не содержат перекрестных членов!

В тех случаях, когда существо вопроса достигает приблизительно такой же степени сложности, как в рассматриваемом нами случае, использование сокращенного метода при суммировании произведений становится уже более целесообразным, чем применение обычной векторной символики.

Подставляя (37) в (30) и используя (29), получаем выражение для кинетической энергии:

$$K = \frac{1}{2} \omega_\mu \omega_\nu \int \rho (r) (x_\alpha x_\alpha \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu) dV = \frac{1}{2} I_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu, \quad (38)$$

что аналогично (34)\*).

Для шара, у которого  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ , соотношение (38) упрощается:

$$K = \frac{1}{2} I (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (39)$$

в соответствии с (33). Инерциальные коэффициенты удобно использовать при описании как момента импульса, так и кинетической энергии вращательного движения твердого тела.

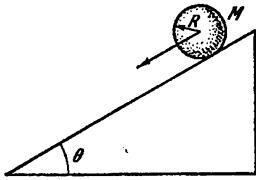


Рис. 8.26. Шар, скатывающийся с наклонной плоскости.

**Пример. Скатывающийся шар.** Шар радиусом  $R$  и массой  $M$  скатывается с наклонной плоскости длиной  $L$ , образующей угол  $\theta$  с горизонтом (рис. 8.26). Какова скорость центра масс шара в конце наклонной плоскости?

Это стандартный тип задачи из задачника. Один из способов решения этой задачи состоит в том, что пишется выражение для потенциальной энергии шара на верхнем конце плоскости:

$$U = Mgh = MgL \sin \theta, \quad (40)$$

и приравнивается выражению для кинетической энергии на нижнем конце:

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2, \quad (41)$$

равной сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений. Заметим, что оба члена в (41) совершенно независимы. Первый член выражает кинетическую энергию поступательного движения, связанную с перемещением центра масс; второй член выражает кинетическую энергию, связанную с вращением относительно центра масс. Интуитивно ясно, что эти члены независимы, так как шар может соскальзывать вниз без вращения, касаясь при этом плоскости в некоторой точке контакта, и может вращаться вокруг неподвижного центра масс. При движении шара по плоскости вниз возможна любая комбинация этих двух независимых движений.

Существует одна из комбинаций, которая во многих отношениях представляет особый интерес. Это качение без скольжения. Качение без скольжения — это такое движение, в котором точка

\*) Следует заметить, что для твердого тела  $J_\nu = \partial K / \partial \omega_\nu$ . Это можно показать, сравнивая (26) и (38) или уравнения (15) и (34).

контакта тела с плоскостью в каждый данный момент времени находится в состоянии покоя. Это движение может быть также получено из условия, что скорость центра масс равна  $R\omega$ . Поэтому (41) можно переписать следующим образом:

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I \left( \frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} Mv^2 = \frac{7}{10} Mv^2, \quad (42)$$

где мы воспользовались выражением для момента инерции однородного шара  $I = \frac{2}{5} MR^2$ . Приравнявая (40) и (42), находим выражение для квадрата скорости шара в нижнем конце плоскости:

$$v^2 = \frac{10}{7} gL \sin \theta. \quad (43)$$

Другой путь решения этой задачи состоит в том, что катящееся тело можно рассматривать как тело, вращающееся в каждый данный момент времени вокруг точки контакта. Точка контакта катящегося тела всегда находится в покое. С этой точки зрения полная кинетическая энергия представляет собой кинетическую энергию вращательного движения вокруг точки контакта, при котором  $I = \frac{7}{5} MR^2$ , как это видно из формулы (24) для вращения вокруг оси, касательной к поверхности шара. Поэтому

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} MR^2 \omega^2 = \frac{7}{10} Mv^2, \quad (44)$$

в согласии с формулой (42).

*Главные оси.* Вернемся к сложному общему выражению (34) для кинетической энергии вращательного движения. Это выражение, справедливое для произвольного расположения осей координат, всегда можно упростить и свести к трем членам. Хитрость состоит в выборе системы координат (для тел правильной формы это сделать очень просто): В такой удачно выбранной системе координат остаются только три диагональных коэффициента:  $I_{xx} \equiv I_1$ ,  $I_{yy} \equiv I_2$ ,  $I_{zz} \equiv I_3$ . Такие оси координат называются *главными осями*. Недиагональные коэффициенты обращаются в нуль, и кинетическая энергия вращательного движения становится равной

$$K = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2. \quad (45)$$

(Для цилиндра главными осями являются ось цилиндра и две взаимно перпендикулярные оси, перпендикулярные в свою очередь к оси цилиндра.) Уравнения (15), связывающие векторы  $\mathbf{J}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , принимают простой вид:

$$\mathbf{J}_1 = I_1 \boldsymbol{\omega}_1, \quad \mathbf{J}_2 = I_2 \boldsymbol{\omega}_2, \quad \mathbf{J}_3 = I_3 \boldsymbol{\omega}_3, \quad (46)$$

и соответственно изменяется формула (45) для кинетической

энергии вращательного движения:

$$K = \frac{1}{2I_1} J_1^2 + \frac{1}{2I_2} J_2^2 + \frac{1}{2I_3} J_3^2. \quad (47)$$

Заметим, что вектор  $\mathbf{J}$  параллелен вектору  $\boldsymbol{\omega}$ , если тело вращается относительно главной оси.

### 8.3. Уравнения Эйлера

Уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N} \quad (48)$$

справедливо для инерциальной системы отсчета. Инерциальные коэффициенты  $I_{\alpha\alpha}$  удобнее всего определяются по отношению к координатным осям, покоящимся во вращающемся теле, с которым связана неинерциальная система отсчета (мы рассматриваем вопрос о том, являются ли оси покоящимися или нет). Из гл. 3 мы знаем, как преобразовать вектор из инерциальной системы отсчета во вращающуюся систему отсчета:

$$\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{\text{ин}} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}, \quad (49)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращающейся системы отсчета. Все другие величины в правой части (49) относятся к вращающейся системе отсчета. Поэтому (48) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \mathbf{N}, \quad (50)$$

где  $\mathbf{J}$  относится к вращающейся системе отсчета.

Предположим, что оси координат во вращающейся системе отсчета расположены вдоль главных осей 1, 2, 3. Принимая во внимание (46), мы можем написать для проекции на ось 1, вместо (50),

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_1 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J})_1 = \frac{dJ_1}{dt} + \omega_2 J_3 - \omega_3 J_2 = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 = N_1, \quad (51)$$

или, преобразуя (50), мы можем также написать уравнения для компонент вдоль осей 1, 2 и 3:

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = N_1, \quad (52a)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = N_2, \quad (52b)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = N_3. \quad (52в)$$

Эти уравнения известны под названием *уравнений Эйлера*. Они являются исходными уравнениями при решении задач на вращение твердых тел. Следует всегда помнить, что при использовании уравнений Эйлера главные оси 1, 2 и 3 связаны с телом.



**Пример. Прецессия шара, на который не действует момент вращения.** Для однородного шара, у которого  $I_1 = I_2 = I_3$ , уравнения Эйлера принимают вид

$$I\dot{\omega}_1 = N_1, \quad I\dot{\omega}_2 = N_2, \quad I\dot{\omega}_3 = N_3. \quad (53)$$

Для свободного движения  $N=0$  и из (53) следует, что  $\omega = \text{const}$ . Вывод о том, что  $\omega = \text{const}$ , является характерным отличительным признаком свободно вращающегося шара.

**Пример. Симметричный волчок.** Для симметричного волчка  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Из (52) видно, что если не действует внешний момент вращения, то  $\omega_3$  (и только  $\omega_3$ ) постоянна. Уравнения (52a) и (52b) приобретают вид

$$\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0, \quad (54)$$

где

$$\Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3, \quad (55)$$

так как  $I_1 = I_2$ .

Решения уравнений (54) имеют вид

$$\omega_1 = A \cos \Omega t, \quad \omega_2 = A \sin \Omega t, \quad (56)$$

где  $A$  — постоянная величина. Мы видим, что компонента угловой скорости перпендикулярна к оси волчка (ось 3) и вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Компонента  $\omega_3$  угловой скорости вдоль оси волчка постоянна. Поэтому вектор  $\omega$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\Omega$  относительно оси волчка. Другими словами, волчок, вращающийся относительно своей геометрической оси с угловой скоростью  $\omega_3$  в пространстве, в котором не действуют силы, будет раскачиваться из стороны в сторону с частотой  $\Omega$ , выражаемой формулой (55).

Для Земли  $I_3$  не равно в точности  $I_1$ , потому что Земля не является точным шаром. Колебания, описываемые уравнениями (56), очень хорошо наблюдаются на опыте, приводя к возникновению эффекта, называемого вариацией широты. Эти колебания представляют настолько большой интерес, что для их изучения Международная широтная служба организовала несколько обсерваторий. Одна из них находится в Юкиа в Северной Калифорнии. Из формулы (55) следует, что для Земли период равен 305 дням. Наблюдаемое движение имеет годичную компоненту (интерпретируемую как вынужденное колебание) и свободный период в 420 дней. Когда в конце девятнадцатого века Ньюкомб, исходя из деформации Земли под влиянием изменения направления центробежной силы, объяснил увеличение периода с 305 до 420 дней, это было подлинным триумфом и позволило получить первые данные о жесткости Земли.

Подробный рассказ об этом очень увлекателен. Свободная компонента движения кажется нам затухающей со временем затухания 30 лет или даже меньше и дает информацию о неупругих

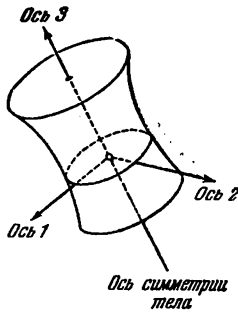


Рис. 8.27. Рассмотрим «свободное» вращение ( $N=0$ ) тела, обладающего осью симметрии (например, осью 2). Тогда  $I_1=I_2$  и  $\omega_1=\text{const}$ .

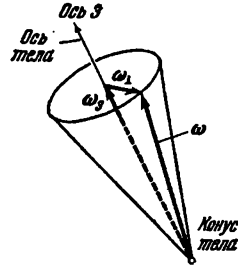


Рис. 8.28. При этих условиях  $|\omega| = \text{const}$  (см. рис. 8.27). Вектор  $\omega$  прецессирует с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии тела.

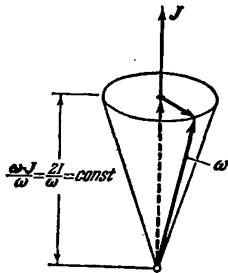


Рис. 8.29. Пространственный конус. В этом случае  $N=0$ . Вектор  $J$  имеет определенное направление в пространстве. Проекция вектора  $\omega$  на направление вектора  $J$  постоянна

$$\left[ K = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{const} \right]$$

Поэтому  $\omega$  прецессирует с постоянной скоростью вокруг вектора  $J$ .

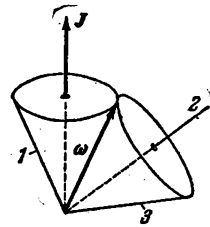


Рис. 8.30. Таким образом, в случае «свободного» вращения аксиально симметричного тела конус тела катится по пространственному конусу (без скольжения). 1 – пространственный конус; 2 – ось симметрии тела; 3 – конус тела.

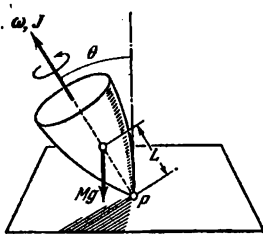


Рис. 8.31. Другая задача: симметричный волчок. В этом случае  $|dJ/dt| = |N| = MgL \sin \theta \neq 0$ . Если волчок вращается быстро, то  $\omega$  и  $N$  приблизительно совпадают с осью тела.

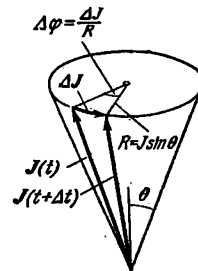


Рис. 8.32. Так как  $N \perp J$ , то  $\Delta J = N \Delta t$  перпендикулярен к  $J$ . Поэтому  $|J| = \text{const}$ , но  $J$  прецессирует вокруг вертикальной оси. Частота прецессии равна

$$\Omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta J}{\Delta t} \frac{1}{J \sin \theta} = \frac{MgL \sin \theta}{J \sin \theta} = \frac{MgL}{J}$$

характеристиках Земли. Однако до настоящего времени еще не дано удовлетворительного объяснения причин, поддерживающих это движение.

Уравнение (50) или уравнения Эйлера показывают нам, что компоненты угловой скорости и, следовательно, компоненты момента импульса (относительно осей, связанных с телом) не постоянны, даже когда момент равен нулю. Но если момент отсутствует, то величина угловой скорости постоянна:

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \text{const.} \quad (57)$$

Для того чтобы доказать этот результат, рассмотрим (50) при  $N=0$ :

$$\dot{\mathbf{J}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}. \quad (58)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}) = 2\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{J}} = -2\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}) = 0, \quad (59)$$

так как  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}$  перпендикулярно к  $\mathbf{J}$ . Поэтому

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = \text{const} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad (60)$$

что и требовалось доказать.

#### 8.4. Прецессия спина в постоянном магнитном поле

Будем называть спином момент импульса частицы относительно ее центра масс. Прецессия вектора момента импульса в магнитном поле представляет собой интересную задачу, имеющую важное значение для атомной физики, для физики твердого тела, для химии, биологии и геологии.

Сделаем два предположения:

1. Магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  элементарной частицы пропорционален моменту импульса  $\mathbf{J}$ :

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J}, \quad (61)$$

где  $\gamma$  — постоянная величина, называемая *гиромагнитным отношением*. Для свободного электрона

$$\gamma \cong \frac{e}{mc}.$$

2. Момент, испытываемый магнитным моментом в магнитном поле, равен  $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ . Этот результат будет выведен во втором томе, однако хорошо известно из опыта, что магнитное поле действует на магнит или на контур с током.

В лабораторной системе отсчета, исходя из соотношения  $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{N}$ , мы получаем уравнение

$$\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \gamma \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (62)$$

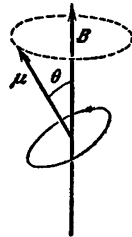


Рис. 8.33. Аналогичная задача: магнитный момент  $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J}$  в магнитном поле, в котором момент  $\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$  перпендикулярен к  $\mathbf{J}$ . Частота прецессии равна  $\omega = \gamma B$  и снова не зависит от  $\theta$ .

Теперь положим  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , тогда (62) можно записать в виде

$$J_x = \gamma J_y B, \quad \dot{J}_y = -\gamma J_x B, \quad \dot{J}_z = 0. \quad (63)$$

Эти уравнения аналогичны (54). Решение системы (63) мы получим в следующей форме:

$$J_x = A \sin \Omega t, \quad J_y = A \cos \Omega t, \quad J_z = \text{const}, \quad (64)$$

где  $A$  — постоянная величина и

$$\Omega = \gamma B. \quad (65)$$

Величина  $\Omega$  называется *частотой свободной прецессии*.

**Спиновый резонанс.** Рассмотрим теперь движение спина в магнитном поле, которое имеет постоянную компоненту  $B$  в направлении оси  $z$  и небольшую переменную компоненту  $H_1$  в направлении оси  $x$  частоты  $\omega$ . Сумма этих двух полей будет равна

$$\mathbf{B} = H_1 \sin \omega t \cdot \hat{x} + B\hat{z}. \quad (66)$$

Три компоненты уравнения движения (62) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{J}_x &= \Omega J_y, & \dot{J}_y &= -\Omega J_x + \gamma J_z H_1 \sin \omega t, \\ \dot{J}_z &= -\gamma J_y H_1 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Несмотря на то, что эти уравнения могут быть решены точно, удобно рассмотреть приближенное решение для случая  $J_y \ll J_z$ , когда спин образует малый угол с осью  $z$ . Тогда мы можем считать, что  $\dot{J}_z \approx 0$ , т. е.  $J_z = \text{const}$ . Решение для  $J_x$  и  $J_y$ , зависимость от времени которых та же, что и для вынуждающего поля (66), имеет вид

$$J_x = A \sin \omega t, \quad J_y = C \cos \omega t, \quad (68)$$

где  $A$  и  $C$  — постоянные величины. Синусоидальная и косинусоидальная зависимости вытекают из нашего представления о том, что  $\mathbf{J}$  вращается вокруг оси  $z$ . Подставляя (68) в (67), получаем

$$\omega A \cos \omega t = \Omega C \cos \omega t - \omega C \sin \omega t = -\Omega A \sin \omega t + \gamma J H_1 \sin \omega t. \quad (69)$$

Отсюда следует, что

$$\omega A = \Omega C, \quad -\omega C = -\Omega A + \gamma J H_1, \quad (70)$$

и, следовательно,

$$C = \frac{\gamma \omega J}{\omega^2 - \Omega^2} H_1. \quad (71)$$

И, наконец, из (68) находим, что

$$J_x = \frac{\gamma \Omega J}{\omega^2 - \Omega^2} H_1 \sin \omega t, \quad J_y = \frac{\gamma \omega J}{\omega^2 - \Omega^2} H_1 \cos \omega t. \quad (72)$$

Из этих формул следует, что резонансный максимум наступает при  $\omega = \Omega = \gamma B$ . [Здесь не рассматриваются бесконечные и особые

решения, получающиеся при точном решении уравнения (67), когда не пренебрегают величиной  $J_x$ .] Мы видим, что при действии переменного магнитного поля в направлении оси  $x$  система реагирует как в направлении оси  $x$ , так и в направлении оси  $y$ .

Явления электронного и ядерного спинового резонанса широко используются в физике. Одно из наиболее важных приложений в ядерной физике состоит в определении гиромангнитного отношения  $\gamma = M/J$  для различных ядер. Для этого определяют частоту и напряженность магнитного поля, при которых наблюдается резонанс. В этом случае

$$\omega = \gamma B. \quad (73)$$

### 8.5. Простой гироскоп

Рассмотрим движение в поле силы тяжести симметричного волчка, который (в рассматриваемом нами случае) вращается с угловой скоростью  $\omega_3$  вокруг горизонтальной оси. Ось волчка может поворачиваться вокруг некоторой точки практически без трения. Сила тяжести создает момент определенной величины  $N$  относительно этой точки. Направление  $N$  перпендикулярно к оси волчка и к вертикальной оси. В дальнейшем мы придем к поразительному выводу о том, что волчок будет устойчив в том случае, когда его ось расположена горизонтально. Нам нужно найти угловую скорость прецессии  $\Omega$ , с которой ось медленно вращается вокруг вертикальной оси в горизонтальной плоскости. Сделаем упрощающее предположение, что  $\omega_3$  постоянна и не зависит от угловой скорости прецессии. Это вполне разумное приближение в том случае, когда волчок вращается очень быстро и частота прецессии невелика.

Пусть  $J$  равно  $I_3\omega_3$ ; в соответствии с нашим допущением величина  $J$  постоянна. Момент  $N$  расположен в горизонтальной плоскости и перпендикулярен к оси волчка. Пусть, далее, угол  $\phi$  измеряет поворот оси волчка в горизонтальной плоскости. Тогда  $N = N\hat{\phi}$  и уравнение движения  $\dot{J} = N$  мы напомним в форме

$$\dot{J} = N\hat{\phi}. \quad (74)$$

Если, как мы предположили, величина  $J$  сохраняется постоянной, то решение уравнения (74) будет иметь вид

$$J = J\dot{\phi} = J\Omega\hat{\phi}. \quad (75)$$

Здесь  $\Omega$  — угловая скорость прецессии, с которой ось вращения гироскопа поворачивается относительно вертикальной оси. Комбинируя (74) и (75), получаем

$$\Omega = \frac{N}{J} = \frac{N}{I_3\omega_3}. \quad (76)$$

Свойство вращающегося твердого тела или гироскопа сохранять направление оси вращения особенно наглядно проявляется при сравнении его поведения с поведением невращающегося тела.

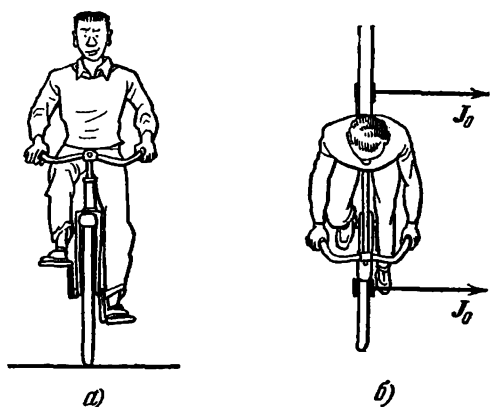


Рис. 8.34. Существует много примеров проявления гироскопического эффекта в обыденной жизни. а) На этом рисунке изображен студент, едущий на велосипеде прямо вперед. б) Вид сверху показывает направление моментов импульса, связанных с колесами.

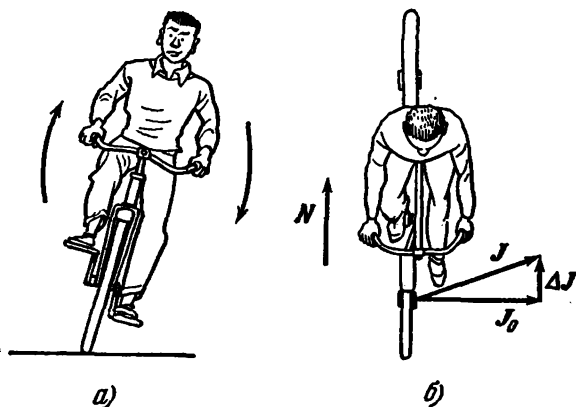


Рис. 8.35. а) Для того чтобы повернуть налево, велосипедист прикладывает момент, как это изображено на рисунке (наклоняясь налево). б) При этом момент направлен в сторону, противоположную направлению движения велосипеда, и так же должен быть направлен вектор  $\Delta J$ . Новое направление вектора  $J$  показано на рисунке. Велосипед поворачивается налево.

Предположим, что оба тела, вращающееся и невращающееся, находятся в пространстве, в котором не действуют никакие силы. Пусть в течение короткого промежутка времени на оба тела действует небольшой момент. Тогда невращающееся тело под влиянием приложенного момента начнет вращаться, и это вращение будет происходить бесконечно и после того, как действие момента прекратится. Ось же гироскопа может лишь слегка отклониться, пока действует момент, и перестает отклоняться после того, как действие момента прекращается. Такое поведение объясняется (это следует из  $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{N}$ ) тем, что для постоянного изменения вектора момента импульса необходимо постоянное действие момента. Другими словами, малое изменение момента импульса  $\Delta \mathbf{J} = \mathbf{N} \Delta t$  велико лишь по сравнению с нулем; это изменение представляет собой продолжительное вращение относительно неподвижной оси тела, первоначально невращавшегося. Но если перпендикулярно к первоначальному большому моменту импульса гироскопа  $\mathbf{J}$  прибавить тот же вектор  $\Delta \mathbf{J}$ , то это вызовет отклонение оси гироскопа самое большее на угол  $\Delta J/J$ . В этом и состоит основное объяснение свойств гироскопа. Гироскоп широко применяется в инерциальных навигационных приборах.

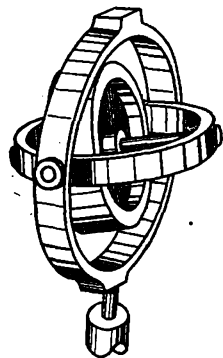


Рис. 8.36. Гироскоп на кардановом подвесе.

Гироскоп на кардановом подвесе (как это изображено на рис. 8.36) не испытывает действия момента в результате вращения Земли или в результате движения самолета, на котором он укреплен. Поэтому ось вращающегося тела всегда будет сохранять определенное направление в пространстве. Следует указать, что в гироскопах всегда применяются симметричные вращающиеся тела для того, чтобы ось вращения могла совпадать с направлением вектора момента импульса.

При использовании гироскопов применяются различные способы их крепления. Вращение Земли создает момент, действующий на вращающееся тело, за исключением случая, когда ось вращения тела направлена на север.

### Задачи

1. *Вращающийся обруч.* Круглый металлический обруч массой  $M=10^3$  г и радиусом  $R=20$  см вращается относительно своего центра с угловой скоростью  $10$  об/сек, или  $2\pi \cdot 10$  рад/сек. Ось вращения перпендикулярна к плоскости обруча.

а) Показать, что момент инерции относительно этой оси равен  $4 \cdot 10^5$  г·см<sup>2</sup>.  
 б) Показать, что момент импульса относительно той же оси равен  $2,5 \times 10^7$  врг·сек.

в) Требуется увеличить момент импульса относительно той же оси на  $1 \cdot 10^7$  врг·сек. Если момент  $N$  приложен в течение  $10$  сек, то показать, что его величина в этом случае должна быть равна  $N=1 \cdot 10^6$  дин·см.

г) Допустим, что этот момент осуществлялся силой, действующей тангенциально по отношению к ободу обруча; показать, что необходимая для этого сила равна  $5 \cdot 10^4$  *дин*.

2. *Велосипедное колесо*. а) Произведите разумную оценку порядка величины момента импульса велосипедного колеса (велосипедист взрослый), если скорость велосипедиста  $30$  *км/час* (прежде всего выразите скорость в *см/сек*).

О т в е т.  $10^8$  *г·см<sup>2</sup>/сек*.

б) Чему должен быть равен момент, который следует приложить к рулю для того, чтобы повернуть его со скоростью  $1$  *рад* в  $0,1$  *сек*?

О т в е т.  $\sim 10^9$  *г·см<sup>2</sup>/сек<sup>2</sup>*.

3. *Комптоновская длина волны*. Предположим, что электрон, масса которого  $m \approx 1 \cdot 10^{-27}$  *г*, движется по круговой орбите радиусом  $R \approx 4 \cdot 10^{-11}$  *см* (этот радиус приблизительно равен величине  $h/(2\pi mc)$ , или  $\hbar/mc$ , представляющей собой фундаментальную длину в атомной физике, известную под названием комптоновской длины волны). С какой скоростью (в *см/сек*) должен двигаться электрон чтобы обладать наблюдаемым значением момента импульса, который равен  $1/2 \hbar \approx 1/2 \cdot 10^{-27}$  *эрг·сек*? Здесь  $\hbar$  представляет собой постоянную Планка, деленную на  $2\pi$ . Эту задачу удобно решать в общем виде, начиная с выражения для момента импульса  $mR^2\omega = 1/2 \hbar$  и затем находя  $v = R\omega = \hbar/2mR$ .

О т в е т.  $1,5 \cdot 10^{10}$  *см/сек*.

4. *Момент инерции гантели*. На каждом конце легкого стержня длиной  $L = 200$  *см* расположено по одинаковой массе, равной  $1 \cdot 10^8$  *г*. Считая, что массы можно принять за материальные точки, рассмотрите следующие вопросы:

а) Где расположен центр масс этой системы?

б) Чему равен момент инерции относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через центр масс?

в) Предположим, что стержень расположен в плоскости *xy* прямоугольной системы координат и образует с осью *x* угол в  $45^\circ$ . Определите инерциальные коэффициенты  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  относительно начала, расположенного в центре стержня.

г) Определите  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  для той же самой геометрии.

5. *Момент инерции однородного стержня*. Вычислите момент инерции тонкого однородного стержня массой *M* и длиной *L*:

а) Относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр масс.

б) Относительно оси, перпендикулярной к его оси и проходящей через один из его концов.

6. *Момент инерции цилиндра*. Покажите, что момент инерции однородного твердого круглого цилиндра (или диска) длиной *L*, радиусом *R* и массой *M* равен  $I = 1/2 MR^2$ , если он вычислен относительно его продольной оси. (*У к а з а н и е*: сначала найдите момент инерции тонкого цилиндрического слоя плотностью  $\rho$ , радиусом *r* и толщиной  $\Delta r$ . Для твердого цилиндра полученный результат нужно интегрировать.)

7. *Скатывающийся цилиндр*. Чему равно отношение кинетических энергий вращательного и поступательного движения твердого цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения?

О т в е т.  $1/2$ .

8. *Скатывающийся цилиндр*. Твердый цилиндр массой *M* скатывается без скольжения по плоскости длиной *L*, наклоненной под углом  $\theta$  к горизонту (трением пренебречь).

а) Чему равна скорость центра масс цилиндра в нижней части плоскости?

О т в е т.

$$(2\sqrt{3})(gL \sin \theta)^{1/2}.$$

б) Чему равна конечная скорость цилиндра, если он соскальзывает по плоскости (без вращения)?

9. *Правило суммирования*. При решении следующих задач используйте Математическое дополнение 2 к гл. 2, а также параграф, посвященный правилу суммирования, приведенный в гл. 8.



а) Используя единичный вектор  $\hat{e}_\mu$ , выразите в компактной форме векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  через их компоненты.

б) Раскройте двойную сумму  $\delta_{\mu\nu} A_\mu A_\nu$ , подробно выписав каждый член суммы. Покажите, как упростится эта сумма для случая  $A_\mu A_\mu$ .

в) Воспользовавшись результатами, полученными в а) и б), а также свойствами единичного вектора, покажите, что  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\mu B_\mu$ . Используйте символ Кронекера и правило суммирования.

г) Используя символ  $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$  и правило суммирования, выразите  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  через компоненты  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

О т в е т.  $\epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\nu B_\lambda \hat{e}_\mu$ .

10. *Гироскопическая стабилизация.* Корабль массой  $10^7$  кг гироскопически стабилизируется однородным круглым диском массой  $5 \cdot 10^4$  кг и радиусом 2 м, который вращается с угловой скоростью 15 об/сек.

а) Чему равен момент импульса стабилизатора?

Ширина корабля 20 м; мы можем считать, что эффективный радиус поперечного сечения корабля равен 10 м. Время свободного поворота при крене (считая крен от  $-20^\circ$  до  $+20^\circ$ ) составляет 12 сек.

б) Оцените величину момента импульса корабля при таком крене.

в) Каким путем гироскопический стабилизатор может помочь уменьшить угол крена?

11. *Вращение молекулы дезоксирибонуклеиновой кислоты.* Молекулярный вес дезоксирибонуклеиновой кислоты из бактериофага T2 составляет  $1,2 \cdot 10^8$ . Молекула этой кислоты представляет собой двойную спираль, в которой содержится  $1,2 \cdot 10^4$  витков. Радиус витка спирали равен 6,7 Å.

а) Чему равен момент инерции относительно оси спирали?

О т в е т.  $I \approx 5 \cdot 10^{-31}$  г·см<sup>2</sup>.

б) Если кинетическую энергию вращательного движения  $\frac{1}{2} I \omega^2$  относительно оси спирали приравнять кинетической энергии теплового движения  $\frac{1}{2} kT$  при 300° К, то чему окажется равна угловая частота  $\omega$  вращательного движения?

О т в е т.  $3 \cdot 10^8$  рад/сек.

в) Если двойную спираль «развинчивать» со скоростью  $3 \cdot 10^8$  рад/сек на две отдельные спирали, то сколько на это понадобится времени? (В действительности этот процесс «развинчивания» в растворах происходит совершенно случайно под влиянием бомбардировок молекулами воды спиралей; поэтому то время, которое вы вычислите, будет давать лишь порядок нижнего предела времени «развинчивания».)

## ГЛАВА 9

### СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ

Величина электростатической или гравитационной силы, действующей между двумя неподвижными материальными точками, определяется следующим уравнением:

$$F = \frac{C}{r^2}, \quad (1a)$$

где  $C$  — постоянная. Такие силы называются центральными силами, действующими по закону обратных квадратов. Слово *центральная* означает, что сила направлена вдоль линии, соединяющей обе материальные точки. Если одна из материальных точек находится в начале координат, а другая — в положении  $\mathbf{r}$ , то сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой, равна

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (16)$$

Для силы всемирного тяготения, действующей между двумя материальными точками с массами  $M_1$  и  $M_2$ ,

$$C = -GM_1M_2, \quad G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см/г} \cdot \text{сек}^2, \quad (2)$$

а для электростатической силы, действующей между точечными зарядами  $q_1$  и  $q_2$ ,

$$C = q_1q_2 \quad (3)$$

при условии, что величина заряда выражается в единицах гауссовой системы СГСЭ (см. гл. 4). Сила тяготения (гравитационная сила) всегда имеет характер притяжения. Электростатическая (кулоновская) сила является силой притяжения, если заряды  $q_1$  и  $q_2$  имеют противоположные знаки, и силой отталкивания, если  $q_1$  и  $q_2$  имеют одинаковые знаки.

На основании очень точных измерений установлено, что показатель степени при  $r$  в уравнении (1a) равен 2,000...; для электростатических сил это проверено вплоть до расстояний порядка  $10^{-13}$  см. Имеется большое число результатов измерений, выпол-

ненных настолько точно, что они позволили бы обнаружить даже небольшие отклонения от закона обратных квадратов. Основные данные этих измерений излагаются в т. II в связи с обсуждением электростатических сил. В качестве экспериментального подтверждения справедливости закона обратных квадратов для сил тяготения можно прежде всего указать на превосходное соответствие между результатами наблюдения за движением планет в Солнечной системе и расчетами их движения на основании этого закона.

Закон обратных квадратов, определяющий величину центральной силы, может быть также выражен в виде соотношения, согласно которому потенциальная энергия обратно пропорциональна первой степени расстояния. Как мы видели в гл. 5, абсолютная величина силы  $F$  равна  $-\partial U/\partial r$ . Тогда, согласно уравнению (1а),

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C}{r^2} \quad (4а)$$

и

$$U(r) = \frac{C}{r} + \text{const.} \quad (4б)$$

Если мы выберем постоянную так, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль, когда материальные точки бесконечно удалены одна от другой, то получим

$$U(r) = \frac{C}{r}, \quad (4в)$$

где величина  $C$  для сил тяготения или электростатических сил определяется соответственно уравнениями (2) или (3). Таким образом,

$$U(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \quad \text{или} \quad U(r) = \frac{q_1q_2}{r}. \quad (4г)$$

Из опытов по рассеянию элементарных частиц известно, что на малых расстояниях (во много раз меньших, чем размеры атома) закон притяжения между двумя нуклонами (протонами или нейтронами) сильно отличается от закона Кулона, согласно которому потенциальная энергия взаимодействия двух частиц равна  $e^2/r$ . Существуют особые ядерные силы притяжения, которым соответствует приблизительно такая зависимость потенциальной энергии от расстояния между частицами:

$$U_{\text{яд}}(r) = -D \frac{e^{-r/r_0}}{r}, \quad (5)$$

где  $r_0$  — постоянная, имеющая размерность длины;  $r_0 \sim 2 \cdot 10^{-13}$  см (рис. 9.1). Постоянная  $D$  имеет порядок величины  $10^{-18}$  эрг·см. Кроме того, между двумя протонами (поскольку они заряжены) действует сила кулоновского отталкивания, но при  $r \leq r_0$  преобладающим видом взаимодействия является ядерное взаимодействие. Заметим, что порядок величины энергии ядерного взаимодействия

определяется экспоненциальным множителем в уравнении (5). На расстоянии  $2 \cdot 10^{-10}$  см, которое в  $10^3$  раз больше  $r_0$ , отношение потенциальной энергии ядерного взаимодействия (5) к электростатической потенциальной энергии  $e^2/r$  составляет  $(D/e^2)\exp(10^{-3}) \approx 10^{-400}$ , т. е. оно ничтожно мало. Для сил взаимодействия между двумя электронами закон Кулона точно выполняется вплоть до самых малых известных нам расстояний между электронами. Однако электроны, помимо заряда, имеют магнитный момент, а сила взаимодействия магнитных моментов двух электронов является нецентральной и ее величина обратно пропорциональна кубу расстояния (см. т. II).



Рис. 9.1. Потенциал сил гравитационного притяжения, как и потенциал сил электростатического притяжения, пропорционален величине  $1/r$ . При больших расстояниях эта функция убывает с увеличением расстояния относительно медленно; таким образом, сила, действующая по закону обратных квадратов, является силой «дальнего порядка» (дальнодействия). Потенциал ядерных сил притяжения пропорционален величине  $e^{-r/r_0}$  и на больших расстояниях быстро совпадает до нуля.

Если известно, что величина силы обратно пропорциональна квадрату расстояния, то какие особые заключения следуют из этого? Какие принципиальные свойства Вселенной являются следствиями закона обратных квадратов? Займемся теперь этими важными вопросами. Мы будем чаще иметь дело с величиной потенциальной энергии, а не силы. При решении задач на определение

потенциальной энергии или силы студенту почти всегда легче сначала получить ответ для потенциальной энергии, а затем рассчитать величину силы или ее составляющих, дифференцируя по расстоянию, как это показано в гл. 5. Потенциальная энергия — скаляр, сила — вектор. Проще сначала найти один скаляр, чем три составляющих вектора.

### 9.1. Сила взаимодействия между материальной точкой и тонким шаровым слоем

Из закона обратных квадратов можно вывести важное следствие: сила, действующая на материальную точку с массой  $M_1$  (пробную массу), находящуюся на расстоянии  $r$  от центра однородного тонкого шарового слоя радиусом  $R$ , имеет при  $r > R$  (т. е. если эта материальная точка находится вне шара) такую величину и направление, как если бы вся масса слоя была сконцентрирована в его центре. Второе следствие: сила, действующая на материальную точку, находящуюся внутри слоя, т. е. при  $r < R$ , равна нулю. Эти следствия настолько важны, что мы дадим их вывод со всеми под-

робностями. Мы применим специальный метод решения, в котором используется геометрическая симметрия условий задачи.

Сначала выделим из слоя кольцо, имеющее угловую ширину  $\Delta\theta$  или линейную ширину  $R \Delta\theta$ , как показано на рис. 9.2 и 9.3. Пусть  $\sigma$  — масса, приходящаяся на единицу площади поверхности слоя. Все это кольцо находится на расстоянии  $r_1$  от пробной массы  $M_1$ .

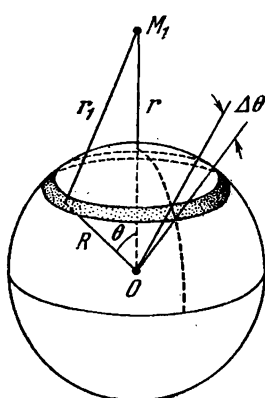


Рис. 9.2. Перспективный чертёж, показывающий, как шаровой слой разделяется на кольца.  $M_1$  — материальная точка, являющаяся пробной массой. Масса единицы поверхности шарового слоя равна  $\sigma$ .

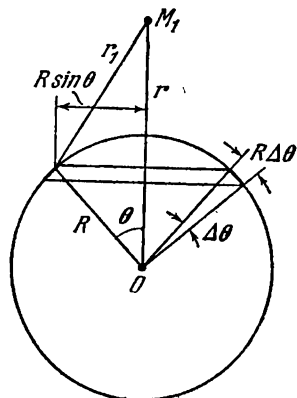


Рис. 9.3. Чертёж, показывающий в разрезе тот же шар (см. рис. 9.2) и выделенное на его поверхности кольцо с площадью  $2\pi R^2 \sin \theta \Delta\theta$ .

Радиус кольца равен  $R \sin \theta$ , а длина его окружности равна  $2\pi R \sin \theta$ . Таким образом, площадь кольца равна

$$(2\pi R \sin \theta) (R \Delta\theta) = 2\pi R^2 \sin \theta \Delta\theta. \quad (6)$$

Произведение всей площади кольца на массу  $\sigma$ , приходящуюся на единицу площади, дает массу кольца:

$$M_k = (2\pi R^2 \sin \theta \Delta\theta) \sigma. \quad (7)$$

Потенциальная энергия  $U_k$  пробной массы в гравитационном поле этого кольца определяется согласно уравнению (7) и соотношению  $U = -GM_1 M_k / r_1$  для потенциальной энергии сил тяготения между двумя массами:

$$U_k = - \frac{GM_1 (2\pi R^2 \sin \theta \Delta\theta) \sigma}{r_1}, \quad (8)$$

где  $r_1$  — расстояние от пробной массы до поверхности кольца.

Все элементы кольца находятся на одинаковом расстоянии от пробной массы. Применяя к треугольнику, образованному отрезками  $R$ ,  $r$  и  $r_1$ , теорему косинусов [уравнение (35) на стр. 56], получим

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta. \quad (9)$$

Величины  $R$  и  $r$  постоянны для любого кольца, потому что  $R$  — это

радиус слоя, а  $r$  — расстояние от центра слоя до пробной массы  $M_1$ . При этих условиях почленное дифференцирование уравнения (9) дает следующий результат:

$$2r_1 dr_1 = -2rR d(\cos \theta) = 2rR \sin \theta d\theta. \quad (10)$$

С помощью полученного соотношения можно преобразовать уравнение (8):

$$U_k = \frac{-GM_1 (2\pi R \Delta r_1) \sigma}{r}. \quad (11)$$

Отметим, что знаменатель правой части представляет собой расстояние от пробной массы до центра шарового слоя.

Теперь можно представить суммарную потенциальную энергию  $U_{\text{сл}}$  пробной массы в гравитационном поле шарового слоя как сумму слагаемых  $U_k$  для всех колец, которые в совокупности образуют этот слой. При суммировании складываются только величины  $\Delta r_1$ . Для случая, когда пробная масса находится вне слоя, величина  $r_1$  изменяется от  $(r-R)$  до  $(r+R)$  так, что

$$\sum \Delta r_1 = (r+R) - (r-R) = 2R. \quad (12)$$

Таким образом, решение всей задачи можно свести к простому суммированию. Используя соотношение (12), чтобы просуммировать слагаемые (11), получаем

$$U_{\text{сл}} = \sum U_k = -\frac{GM_1 2\pi R \sigma}{r} \sum \Delta r_1 = -\frac{GM_1 \cdot 4\pi R^2 \sigma}{r}. \quad (13)$$

Но  $4\pi R^2$  — это площадь поверхности слоя, а  $4\pi R^2 \sigma$  — его масса  $M_{\text{сл}}$ . Поэтому можно переписать уравнение (13) в таком виде:

$$U_{\text{сл}} = -\frac{GM_1 M_{\text{сл}}}{r} \quad (r > R), \quad (14)$$

где  $r$  — расстояние между пробной массой и центром шарового слоя. Мы показали, что шаровой слой оказывает такое действие на находящиеся вне его материальные точки, как если бы вся его масса  $M_{\text{сл}}$  находилась в центре шара.

Если пробная масса находится где-то внутри шара, то пределы суммирования  $\Delta r_1$  в  $\sum U_k$  изменяются от  $(R-r)$  до  $(R+r)$ , так что в этом случае

$$\sum \Delta r_1 = (R+r) - (R-r) = 2r. \quad (15)$$

Используя теперь формулу (15), чтобы просуммировать слагаемые (11), получим

$$\begin{aligned} U_{\text{сл}} &= \sum U_k = -\frac{GM_1 \cdot 2\pi R \sigma}{r} \sum \Delta r_1 = \\ &= -GM_1 \cdot 4\pi R \sigma = -\frac{GM_1 \cdot 4\pi R^2 \sigma}{R} = -\frac{GM_1 M_{\text{сл}}}{R} \quad (r < R). \end{aligned} \quad (16)$$

Как следует из уравнения (16), во всех точках внутри слоя потен-

циальная энергия постоянна и равна  $U_{\text{сл}}$ , т. е. величине, которая может быть получена из уравнения (14) при  $r=R$  (рис. 9.4).

Выше было указано, что величина силы  $F$ , действующей на пробную массу, равна  $-\partial U/\partial r$ , потому что эта сила действует в радиальном направлении. Из уравнений (14) и (16) получаем следующие соотношения для определения силы, действующей на материальную точку с массой  $M$  со стороны слоя:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{GM_1 M_{\text{сл}}}{r^2} & (r > R), \\ 0 & (r < R). \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, на находящуюся внутри слоя пробную массу не действует никакая сила. Это свойство характерно только для сил, подчиняющихся закону обратных квадратов. Вне слоя сила изменяется пропорционально  $1/r^2$ , причем  $r$  отсчитывается от центра слоя.

## 9.2. Сила взаимодействия между материальной точкой и сплошным шаром

Непрерывно накладывая концентрические шаровые слои друг на друга, можно образовать сплошной шар, имеющий массу  $M$  и радиус  $R_0$ . Пользуясь уравнением (14), мы получим для точек, находящихся вне шара, следующую формулу, определяющую потенциальную энергию пробной массы в поле тяготения сплошного шара:

$$U_{\text{ш}} = \sum U_{\text{сл}} = -\frac{GM_1}{r} \sum M_{\text{сл}} = -\frac{GM_1 M}{r}. \quad (18)$$

Напомним, что  $r$  — это расстояние пробной массы от центра шара (рис. 9.5). Величина силы, действующей на материальную точку с массой  $M_1$  при  $r > R_0$ , равна

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM_1 M}{r^2}. \quad (19)$$

Этот основной результат можно было бы получить также и непосредственным интегрированием элементов силы по поверхности шарового слоя, но наш путь решения математически более краток.

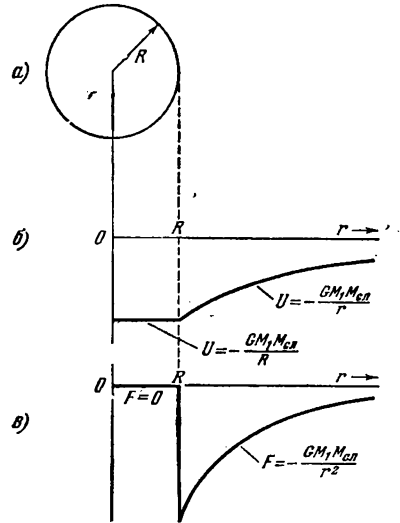


Рис. 9.4. а) Слой радиусом  $R$  и массой  $M_{\text{сл}}$ . б) Потенциальная энергия материальной точки  $M_1$ , находящейся на расстоянии  $r$  от центра слоя радиусом  $R$  и массой  $M_{\text{сл}}$ . в) Сила, действующая на материальную точку  $M_1$  (знак минус означает притяжение). При  $r < R$  эта сила равна нулю.

Обобщая уравнение (19), легко можно убедиться, что сила взаимодействия между двумя однородными шарами с массами  $M_1$  и  $M_2$  равна силе взаимодействия между двумя материальными точками с массами  $M_1$  и  $M_2$ , находящимися в центрах соответствующих шаров. Заменяв один шар материальной точкой, мы можем затем заменить материальной точкой и второй шар. Этот вывод следует считать большой удачей, так как он позволяет упростить многие расчеты.

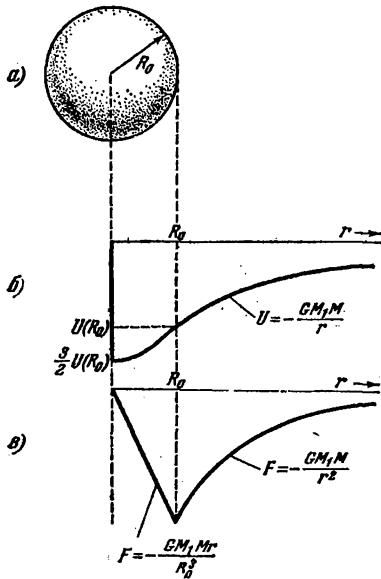


Рис. 9.5. а) Однородный сплошной шар радиусом  $R_0$  и массой  $M_0$ ; б) Потенциальная энергия материальной точки  $M$ , находящейся на расстоянии  $r$  от центра сплошного шара радиусом  $R_0$  и массой  $M_0$ ; в) Сила, действующая на материальную точку  $M$ . При  $r < R_0$  эта сила пропорциональна  $r$ .

### 9.3. Собственная гравитационная и электростатическая энергия

По определению собственная энергия системы равна работе, которую нужно произвести, чтобы образовать эту систему из бесконечно малых элементов, первоначально находившихся на бесконечно больших расстояниях друг от друга. Рассмотрим собственную энергию сил тяготения — гравитационную энергию; она всегда отрицательна, потому что силы тяготения являются силами притяжения и нужно произвести положительную работу против них, чтобы разделить, например, атомы, входящие в состав звезды, удалив каждый атом в бесконечность. Собственная гравитационная энергия обычно определяется при решении

задач небесной механики, относящихся к звездам и галактикам. Расчеты собственной электростатической энергии часто производятся в теории кристаллов — как диэлектриков, так и металлов.

Потенциальная энергия системы из  $N$  отдельных атомов, обусловленная их взаимным притяжением под действием гравитационных сил, равна сумме потенциальных энергий всех пар атомов (рис. 9.6):

$$U = -G \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{парам} \\ l \neq j}} \frac{M_l M_j}{r_{lj}} = -G \sum_{l > j}^N \sum_{j=1}^N \frac{M_l M_j}{r_{lj}}. \quad (20)$$

Мы даем это выражение в двух видах. В том виде, как оно написано посередине строки, мы указываем, что надо выполнить суммирование по всем парам атомов с индексами  $l$  и  $j$ , за исключе-



нием случаев, когда  $i=j$ , так как при этом вообще нет пары атомов. Случай  $i=j$  может относиться только к собственной гравитационной энергии одиночного атома, а мы обычно исключаем ее из рассмотрения, потому что считаем, что она не меняется при соединении атомов в звезду. Выражение справа представляет собой лишь другое обозначение того же способа суммирования, при котором каждая пара индексов  $i, j$  засчитывается только один раз, т. е., например, мы засчитываем их в сочетании 4, 3, а не 3, 4. С таким же успехом мы можем написать:

$$U = -\frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{M_i M_j}{r_{ij}}. \quad (21)$$

Здесь мы учитываем каждую пару индексов два раза, например, один раз — как 3, 4, а другой раз — как 4, 3. Это удваивание исправляется коэффициентом  $1/2$ , который обычно появляется в уравнениях, выражающих собственную энергию. Штрих у первого знака суммирования  $\Sigma$  — это условный знак, указывающий читателю, что из суммирования надо исключить слагаемое, в котором  $i=j$ .

**Пример. Гравитационная энергия Галактики.** Оценим величину гравитационной энергии Галактики. Если не учитывать собственную гравитационную энергию отдельных звезд, то мы должны оценить только величину выражения (21).

Предположим, что Галактика состоит из  $N$  звезд, каждая из которых имеет массу  $M$ , и что расстояние между любыми двумя звездами равно  $R$ . Тогда уравнение (21) сводится к следующему соотношению:

$$U \approx \frac{1}{2} G (N-1) N \frac{M^2}{R}. \quad (22)$$

(Сумма  $\sum_{j=1}^N$  состоит из  $N$  одинаковых слагаемых, а сумма  $\sum_{i=1}^N$  — из  $N-1$  слагаемых). Если  $N \approx 1,6 \cdot 10^{11}$ ,  $R \approx 10^{23}$  см, а  $M \approx 2 \cdot 10^{33}$  г (масса Солнца), то

$$U \approx -\frac{1}{2} (7 \cdot 10^{-8}) \cdot (1,6 \cdot 10^{11})^2 \cdot (2 \cdot 10^{33})^2 \text{ эрг} / 10^{23} \approx -4 \cdot 10^{53} \text{ эрг}. \quad (23)$$

**Пример. Гравитационная энергия однородного шара.** Нетрудно рассчитать собственную гравитационную энергию однородного шара с массой  $M$  и радиусом  $R$ . Заменим в уравнении (21) двойные суммы интегралами и выполним кратное интегрирование. Но сначала попытаемся угадать форму ответа. Какой должна быть эта энергия? В ответ должны входить  $G$ ,  $M$  и  $R$ , и притом

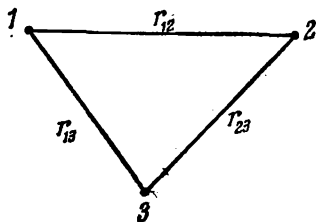


Рис. 9.6. Гравитационная энергия системы трех атомов с массами  $M_1, M_2, M_3$  равна

$$U = -G \left( \frac{M_1 M_2}{r_{12}} + \frac{M_1 M_3}{r_{13}} + \frac{M_2 M_3}{r_{23}} \right).$$

так, чтобы размерности обеих частей равенства были одинаковыми. Почему бы не написать этот ответ так:

$$U_{\text{ш}} \approx -\frac{GM^2}{R} \quad (24)$$

С точностью до числового коэффициента порядка единицы это действительно соответствует правильному ответу.

Выполнив точный расчет, мы получим для однородного шара следующий результат:

$$U_{\text{ш}} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R}, \quad (25)$$

так что наша оценка (24) довольно близка к истине. Чтобы показать, что числовой коэффициент равен  $3/5$ , образуем мысленно твердый шар особым образом. Сначала рассмотрим энергию взаимодействия твердого шарового ядра с радиусом  $r$  и окружающего его шарового слоя, толщина которого равна  $dr$  (рис. 9.7). Если  $\rho$  — плотность вещества, то масса центрального шара равна  $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , а масса слоя равна  $(4\pi r^2)(dr)\rho$ . Тогда из (14) следует, что потенциальная энергия сил тяготения между слоем и ядром равна

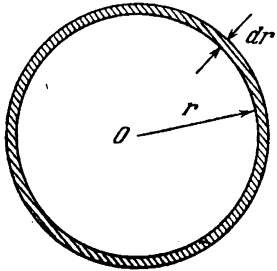


Рис. 9.7. Шаровой слой толщиной  $dr$ , окружающий сплошное шаровое ядро радиусом  $r$ . Последовательно наращивая такие слои, мы образуем сплошной шар радиусом  $R$ . Площадь одной из поверхностей слоя равна  $4\pi r^2$ , его толщина равна  $dr$ , так что объем слоя равен  $4\pi r^2 dr$ .

$$-\frac{G\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \cdot (4\pi r^2 dr \rho)}{r} = -\frac{1}{3} G (4\pi\rho)^2 r^4 dr. \quad (26)$$

Собственная гравитационная энергия сплошного шара радиусом  $R$  выражается интегралом, взятым от (26) в пределах от  $r=0$  до  $r=R$ . Интегрирование соответствует

последовательному накладыванию слоев на ядро до тех пор, пока радиус шара не достигнет  $R$ . Вначале ядро имеет нулевой радиус. Интегрирование выражения (26) дает следующий результат:

$$U_{\text{ш}} = -\frac{1}{3} G (4\pi\rho)^2 \cdot \frac{1}{5} R^5 = -\frac{3}{5} G \left(\frac{4}{3} \pi\rho R^3\right)^2 \frac{1}{R} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R}, \quad (27)$$

потому что масса шара

$$M = \frac{4}{3} \pi\rho R^3. \quad (28)$$

Пользуясь уравнением (27), можно определить собственную гравитационную энергию Солнца, считая  $M_{\text{С}} \approx 2 \cdot 10^{33}$  г и  $R_{\text{С}} \approx 7 \cdot 10^{10}$  см:

$$U_{\text{С}} = -\frac{3(2 \cdot 10^{33})^2}{5(7 \cdot 10^{10})} \text{ эрг} \approx -2 \cdot 10^{48} \text{ эрг}. \quad (29)$$

Это огромная энергия! Эволюция Солнца может завершиться

образованием плотной белой карликовой звезды с радиусом около 0,1 его нынешнего радиуса. Очевидно, что при сжатии высвободится большое количество гравитационной энергии.

Если подставить в уравнение (25)  $e^2$  вместо  $-GM^2$ , то можно получить величину собственной электростатической энергии равномерно заряженного шара с общим зарядом  $e$  и радиусом  $R$ :

$$U_{э.с.} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R}. \quad (30)$$

Для того чтобы рассчитать собственную электростатическую энергию электрона, надо знать его радиус  $R$ . Так как у нас нет общей теории электрона, мы можем проделать это в обратном порядке, определяя радиус электрона по его энергии.

Имеется известный закон Эйнштейна, который гласит, что масса  $M$  всегда связана с энергией  $E$  следующим уравнением:

$$E = Mc^2, \quad (31)$$

где  $c$  — скорость света. (Мы выведем это уравнение в гл. 12.) Если бы вся энергия электрона представляла собой электростатическую энергию равномерно распределенного заряда, то мы получили бы

$$U_{э.с.} = \frac{3e^2}{5R} = mc^2, \quad (32)$$

откуда можно было бы определить радиус электрона. Однако мы не знаем строения электрона. Модель, которую мы наметили, нельзя считать вполне удовлетворительной, так как неясно, чем скрепляется воедино заряд электрона. Почему он не разлетается под действием кулоновского отталкивания элементов этого заряда? В настоящее время мы не имеем теории, объясняющей строение электрона.

Опустим коэффициент  $3/5$  в (32). Было бы чересчур самонадеянно сохранять этот коэффициент, потому что это означало бы, что имеются точные сведения о строении электрона, которых на самом деле нет. Определим (условно) величину  $r_0$  из соотношения

$$\frac{e^2}{r_0} \equiv mc^2; \quad r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (33)$$

Эта величина называется *классическим радиусом электрона*. Она имеет какое-то отношение к электрону, но мы точно не знаем, какое. Тем не менее она называется характеристической длиной. Теперь мы сделаем небольшое отступление по поводу пристрастия физиков к характеристическим величинам.

#### 9.4. Характеристические длины и характеристические числа

Перечень характеристических чисел — это не физика, так же как астрология — это не астрономия. Однако характеристические числа играют важную роль в физике. Когда мы видим, что постоянные, имеющие отношение к данному вопросу (как  $e$ ,  $m$  и  $c$  имеют

отношение к электромагнетизму и электрону), можно так скомбинировать, что образуется характеристическая величина с размерностью длины, то мы стремимся узнать, что эта длина означает. Это законный вопрос, и его постановка очень полезна. Некоторые характеристические величины имеют ясный смысл, а другие — не имеют его.

Особенно интересны безразмерные числовые постоянные. В гидродинамике мы встречаемся с безразмерным числом, называемым числом Рейнольдса. Когда число Рейнольдса велико, то наблюдается турбулентное течение жидкости; когда оно мало, течение является нетурбулентным, т. е. ламинарным. В атомной физике мы можем положить важную безразмерную числовую постоянную, комбинируя величины  $e$ ,  $h$  и  $c$ . Величина  $h$  — это постоянная Планка; мы предпочитаем оперировать с  $\hbar = h/2\pi$ . Постоянная Планка определяется из соотношения  $E = h\nu$  для световых волн; она выражает связь между частотой  $\nu$  и энергией  $E$  фотона. Следовательно,  $h$  (и  $\hbar$ ) имеет размерность [энергия · время]. Мы знаем, что  $e^2/r_0$  имеет размерность энергии, таким образом,  $e^2$  имеет размерность [энергия × длина].

Поделив  $e^2$  на  $\hbar$ , мы получим величину, имеющую размерность [длина/время], т. е. размерность скорости. Очевидно, что характеристическая скорость — это  $c$ , скорость света. Если мы поделим  $e^2/\hbar$  на  $c$ , то получим безразмерную величину  $\alpha$ :

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,04}. \quad (34)$$

Эта величина называется *постоянной тонкой структуры*. Такое название имеет исторические причины, связанные с теорией расщепления спектральных линий. Нам неизвестно, почему  $e^2/\hbar c$  имеет именно эту числовую величину, а также неизвестно, можно ли ее вывести на основании какой-либо теории. Эти вопросы рассматриваются в т. IV.

Можно получить целый ряд важных характеристических длин, если делить классический радиус электрона на различные степени числа  $\alpha$ . Одна из важных характеристических длин, часто встречающаяся в квантовой физике, — это *комптоновская длина волны*  $\lambda_k$  электрона:

$$\lambda_k = \frac{r_0}{\alpha} = \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \frac{e^2}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см}. \quad (35)$$

Иногда комптоновской длиной волны называется величина  $\lambda_k = 2\pi\lambda_k$ .

Другая важная характеристическая длина — это *боровский радиус основного состояния атома водорода*:

$$a_0 = \frac{r_0}{\alpha^2} = \lambda/\alpha = \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}. \quad (36)$$

По существу, это радиус атома водорода. Если  $a_0$  имеет отношение к расстоянию между протоном и электроном в атоме водорода

и если электрон связан с протоном силами электростатического взаимодействия, то можно предположить, что энергия их связи (энергия ионизации) должна иметь величину порядка  $e^2/a_0$ , т. е. около 27 эв. Как было определено экспериментально, а также на основании более строгой теории, эта энергия связи равна  $e^2/2a_0$ .

Чем богаче будет ваш опыт в физике, технике, астрономии или химии, тем больше вы будете убеждаться в важном значении физических постоянных. Разберем другой пример. Рассмотрим характеристическую длину, которая получится, если приравнять  $Mc^2$  собственной гравитационной энергии тела:

$$\frac{GM^2}{R_0} = Mc^2, \quad (37)$$

$$R_0 = \frac{GM}{c^2}.$$

Мы можем назвать  $R_0$  гравитационной длиной. С чем она связана?

В таблице физических постоянных, данной в приложении, вы найдете, что число нуклонов (протонов и нейтронов) в известной нам части Вселенной равно приблизительно  $10^{80}$ . Масса нуклона — около  $10^{-24}$  г, так что масса известной нам Вселенной — величина порядка  $10^{56}$  г. Тогда из (37) следует:

$$R_0 \approx \frac{(10^7) \cdot (10^{56}) \text{ см}}{(3 \cdot 10^{10})^2} \approx 10^{28} \text{ см}, \quad (38)$$

что согласуется с приведенным в этой таблице значением так называемого радиуса Вселенной. Это совпадение означает только, что при оценке массы известной нам части Вселенной всегда использовалось соотношение размерностей (37) (радиус  $R_0$  можно оценить независимым путем). Однако имеются другие способы оценки, основанные на определении верхнего и нижнего пределов массы известной нам части Вселенной. Мы считаем, что число  $10^{56}$  г соответствует правильному порядку этой величины. Действительно, общая теория относительности указывает, что соотношение, из которого мы определили  $R_0$ , имеет фундаментальное значение. Согласно этой теории, световой сигнал (фотон) не может уйти с поверхности, ограничивающей данную массу, если ее радиус  $R$  меньше, чем  $R_0$ . Следовательно, тело, размер которого  $R < R_0$ , не может светиться и должно быть невидимым.

Если за  $M$  взять массу Солнца, то

$$R_0 \approx \frac{(7 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{33}) \text{ см}}{(3 \cdot 10^{10})^2} \approx 10^5 \text{ см}, \quad (39)$$

что во много раз меньше радиуса Солнца  $R = 7 \cdot 10^{10}$  см. Таким образом, величина  $R_0$  оказывает влияние на решение задачи в том случае, если эта величина велика, и не оказывает влияния, если она мала ( $R_0$  обратится в нуль, если  $G=0$ ). Из-за того, что для Солнца  $R \gg R_0$ , величина  $R_0$  никак не определяет его состояние,

по крайней мере в нынешних условиях. Величина  $R_0$ , возможно, приобретает значение для Солнца намного позднее, когда оно почти полностью «выгорит» и сильно сожмется. Известны звезды — белые карлики, имеющие массу, равную массе Солнца, при радиусе порядка радиуса Земли ( $6 \cdot 10^8$  см). Но из расчета (39) видно, что даже для белого карлика гравитационная длина очень мала по сравнению с радиусом.

Недавно некоторые астрономы выдвинули теорию, что действительно существуют звезды (нейтронные звезды), размеры которых сравнимы с их гравитационной длиной.

Мы можем образовать другие характеристические величины, имеющие размерность времени (или частоты), массы, скорости и т. д. Построение и оценка характеристических величин, имеющих физический смысл, является превосходным приемом при поисках решения конкретных физических проблем. Определение порядка этих величин служит своего рода сигналом, предостерегающим нас от пренебрежения особенностями явления, несущественными в одних случаях, но имеющими решающее значение в других. Строители мостов и конструкторы самолетов иногда сталкивались с катастрофическими результатами случайной недооценки эффектов, порядок величины которых можно было бы определить путем несложного расчета на листке бумаги.

#### 9.5. Силы, действующие по закону обратных квадратов, и статическое равновесие

В т. II мы покажем, что группа материальных точек (или точечных электрических зарядов), силы взаимодействия между которыми подчиняются закону обратных квадратов, не может находиться в устойчивом *статическом* равновесии. Слово «статическое» означает, что все материальные точки неподвижны. Этот результат становится наглядным при рассмотрении рис. 9.8 и рис. 9.9, где изображены линии равного потенциала в системе, состоящей из двух или четырех неподвижных материальных точек или электрических зарядов одного знака (например, положительных). Пробная масса, помещенная в центре схемы, обязательно станет двигаться по направлению к той или другой из неподвижных материальных точек.

#### 9.6. Орбиты планет

Рассмотрим теперь задачу Кеплера: требуется найти орбиты двух тел, силы взаимодействия между которыми определяются законом обратных квадратов. Классическим примером объекта для этой задачи является движение планет Солнечной системы. Другие важные примеры — это движение спутников вокруг планет и относительное движение компонентов двойной звезды. Уравнение движения  $F=Ma$  для  $i$ -й материальной точки из системы  $N$  таких

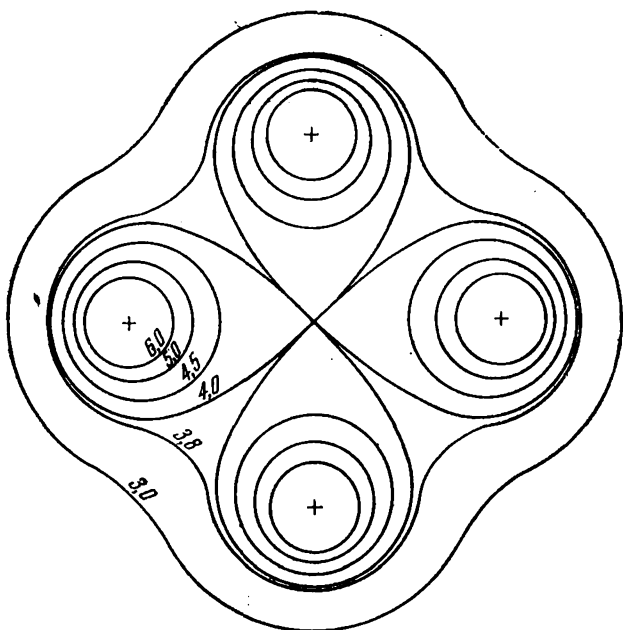


Рис. 9.8. Контурная карта эквипотенциальных поверхностей между четырьмя равными массами.

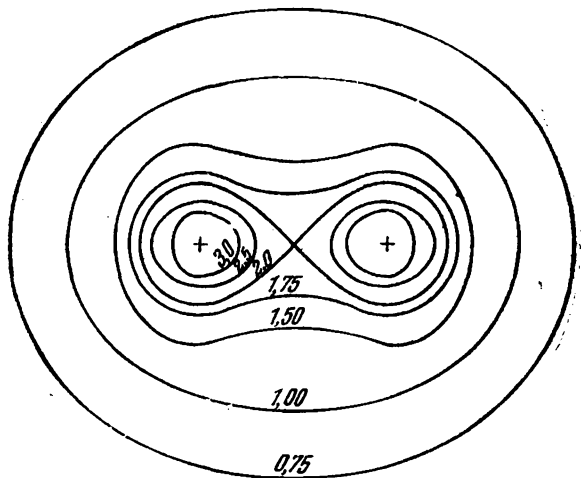


Рис. 9.9. Контурная карта эквипотенциальных поверхностей между двумя равными массами.

точек имеет следующий вид:

$$M_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -GM_i \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}. \quad (40)$$

Штрих при  $\Sigma$  означает, что из суммирования надо исключить слагаемое, для которого  $j=i$ . В уравнении (40)

$$\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad (41)$$

т. е.  $\mathbf{r}_{ij}$  — это вектор, проведенный из точки  $i$  в точку  $j$ . В правой части уравнения (40) суммируются силы тяготения, действующие на материальную точку  $i$  со стороны  $N-1$  других материальных точек. Это уравнение написано в векторной форме, и, следовательно, его можно заменить тремя отдельными уравнениями для составляющих радиуса-вектора  $\mathbf{r}_i$ . Для  $N$  материальных точек мы должны решить  $3N$  совместных уравнений с  $6N$  начальными условиями для  $3N$  координат и  $3N$  скоростей. Это совсем не простая задача.

Если число материальных точек невелико, то легко можно решить эти уравнения числовыми методами с помощью аналоговой или цифровой электронной счетной машины. Числовые методы являются общепринятыми для расчетов орбит систем, состоящих более чем из двух материальных точек. Решение задачи двух тел может быть выражено в аналитической форме, когда эти тела представляют собой однородные шары; ниже мы получим это общее аналитическое решение задачи двух тел. Точные аналитические решения редко встречаются в физике. Они изящны сами по себе, но их научная ценность отнюдь не больше, чем ценность числовых решений. Не следует недооценивать удобства и возможности, создаваемые применением числовых методов расчета. В конце этой главы, в Дополнении 2, мы даем пример числового расчета орбиты.

### 9.7. Задача двух тел. Приведенная масса

Задачу о движении двух тел под действием центральных сил всегда можно свести к разновидности задачи о движении одного тела. Это является значительным упрощением. Хотя процесс решения, дающего форму орбиты, состоит из большого числа операций, ход рассуждений несложен. Уравнения движения (в одной и той же инерциальной системе отсчета) двух однородных сферических тел, притягиваемых друг к другу силами тяготения, имеют следующий вид:

$$M_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad M_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (42)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  (рис. 9.10). В результате почленного сложения двух уравнений (42) получается

$$M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0. \quad (43)$$

Отсюда можно вывести закон сохранения полного импульса для



системы, состоящей из двух тел; интегрируя (43) по времени, получаем

$$M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const.} \quad (44)$$

Левая часть представляет собой полный импульс системы.

Положение центра масс системы двух тел определяется как

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м.}} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}. \quad (45)$$

Дифференцируя обе части уравнения (45) по времени, получаем

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м.}} = \frac{M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{M_1 + M_2}. \quad (46)$$

Сравнивая с (44), мы видим, что  $\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м.}} = \text{const.}$  Следовательно, центр масс системы движется с постоянной скоростью. Мы всегда можем принять эту скорость равной нулю, выбрав соответствующую инерциальную систему отсчета.

Теперь перепишем уравнения движения (42) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= -\frac{1}{M_1} \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \frac{1}{M_2} \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt^2} &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \\ &= -\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (48)$$

В это уравнение входит только один вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Мы можем упростить уравнение (48), введя *приведенную массу*  $\mu$ :

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}. \quad (49)$$

Тогда уравнение (48) принимает следующий вид:

$$\boxed{\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}}. \quad (50)$$

Эта задача на движение одного тела; нам надо решить ее, чтобы найти вектор  $\mathbf{r}$  как функцию времени. В исходной задаче двух тел, сформулированной в виде системы уравнений (42), нужно было определить зависимость *двух* векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  от времени.

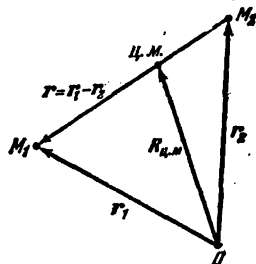


Рис. 9.10. Силы взаимодействия материальных точек  $M_1$  и  $M_2$  — центральные силы, коллинеарные с вектором  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — векторы, описывающие положение  $M_1$  и  $M_2$  в инерциальной системе отсчета с началом в точке  $O$ . Если не действуют внешние силы, то  $\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м.}} = 0$ .

Используем уравнения (49) и (50) следующим образом. Вспомним, что  $\mathbf{r}$  — это вектор, идущий из точки  $M_2$  в точку  $M_1$ .

Исходя из уравнения (50), мы можем найти решение для движения тела  $M_1$  относительно  $M_2$ , как если бы  $M_2$  было закреплено в начале координат инерциальной системы отсчета, но только в качестве массы надо подставить в левую часть уравнения (50)  $\mu$ , а не  $M_1$ . Таким образом, мы свели задачу двух тел к задаче о движении одного тела, имеющего массу  $\mu$ . Заметим, однако, что величина силы, входящей в уравнение (50), не равна  $-G\mu M_2/r^2$ ! Чтобы найти орбиты двух тел, нам достаточно решить задачу о движении одного тела. Сведение задачи двух тел к задаче об одном теле может быть выполнено таким же способом для любой центральной силы; при этом всегда появляется приведенная масса.

Приведенная масса должна быть меньше, чем любая из масс  $M_1$  и  $M_2$ . При  $M_1 = M_2 = M$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{M}, \quad \mu = \frac{M}{2}. \quad (51)$$

Если  $M_1 \ll M_2$ , то из (49) следует:

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = M_1 \frac{1}{(M_1/M_2) + 1} \cong M_1 \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right). \quad (52)$$

Применив формулу бинома Ньютона, мы разложили дробь в степенной ряд и оставили только слагаемое низшего порядка относительно  $M_1/M_2$ . Если  $M_1$  равно  $m$  (массе электрона), а  $M_2$  равно  $M_p$  (массе протона), то приведенная масса равна

$$\mu \approx m \left(1 - \frac{1}{1836}\right). \quad (53)$$

Значение приведенной массы сильнее зависит от величины более легкой из двух масс. Отклонение  $\mu$  атома водорода от  $m$  легко можно обнаружить по спектру атомарного водорода.

Атом позитрония — это водородоподобный атом без протона, состоящий из позитрона и электрона. Позитрон — частица с массой, равной массе электрона, но имеющая положительный заряд  $e$ . Из уравнения (51) следует, что линейчатые спектры атомарного водорода и позитрония сходны (рис. 9.11), а их различие обусловлено только тем обстоятельством, что приведенная масса атома позитрония составляет около половины приведенной массы атома водорода. Характер кулоновского взаимодействия между электроном и позитроном такой же, как между электроном и протоном.

Пр и м е р. *Колебания двухатомной молекулы.* Два атома, соединенные в устойчивую молекулу, обладают потенциальной энергией, представляющей собой квадратичную функцию разности  $r - r_0$  между фактическим расстоянием между ними  $r$  и равновесным расстоянием  $r_0$ :

$$U(r) = \frac{1}{2} C (r - r_0)^2, \quad (53a)$$

если  $(r - r_0)/r_0 \ll 1$ . Сила, соответствующая этой потенциальной энергии, направлена вдоль линии, соединяющей атомы, а ее ве-

личина определяется из следующего уравнения (если молекула не вращается):

$$F = -\frac{dU}{d(r-r_0)} = -C(r-r_0). \quad (53б)$$

Уравнения (53а) и (53б) представляют собой уравнения гармонического осциллятора с силовой постоянной  $C$ . Какова частота колебаний этого осциллятора, если массы атомов равны  $M_1$  и  $M_2$ ?

При свободных колебаниях оба атома находятся в движении, а их центр масс неподвижен. Естественно представить уравнение движения двухатомной молекулы в виде (50), заменив силу тяготения на силу, заданную уравнением (53б):

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -C(r-r_0) \hat{r}. \quad (53в)$$

Если молекула не вращается, то направление  $\hat{r}$  остается неизменным и при этом условии

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{r}. \quad (53г)$$

(Если же направление  $\hat{r}$  меняется, то производная от  $\hat{r}$  не выражается так просто — см. ниже уравнение (58).) Используя соотношение (53г), мы можем переписать уравнение (53в) в следующем виде:

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -C(r-r_0), \quad (53д)$$

а это представляет собой уравнение движения простого гармонического осциллятора с угловой частотой колебаний

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{\mu}\right)^{1/2}. \quad (53е)$$

Из спектральных измерений известно, что основные колебательные частоты молекул HF и HCl равны

$$\nu_0(\text{HF}) = \frac{\omega_0(\text{HF})}{2\pi} = 1,202 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1},$$

$$\nu_0(\text{HCl}) = \frac{\omega_0(\text{HCl})}{2\pi} = 0,871 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}.$$

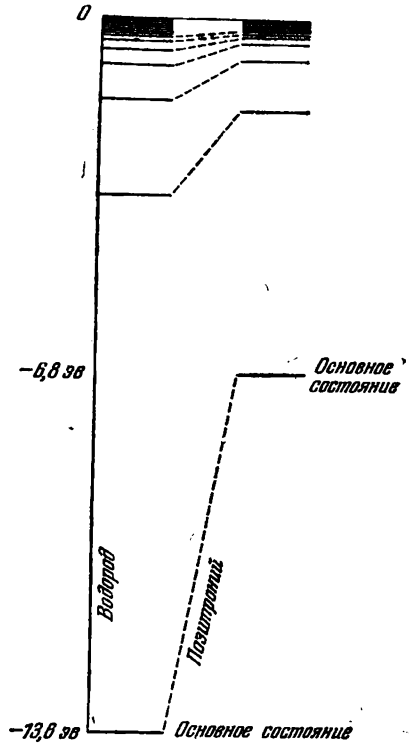


Рис. 9.11. Энергетические уровни атома водорода и атома позитрония. Приведенная масса атома водорода равна

$$\mu = \frac{m_e}{1 + \frac{1}{1836}} \approx m_e.$$

Приведенная масса атома позитрония равна  $\mu = \frac{1}{2} m_e$ . Это является причиной различия энергий в 2 раза.

Воспользуемся этими данными, чтобы сравнить силовые постоянные  $C_{\text{HF}}$  и  $C_{\text{HCl}}$ . Определим приведенные массы этих молекул в атомных единицах массы:

$$\frac{1}{\mu_{\text{HF}}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{19} = \frac{20}{19}, \quad \mu_{\text{HF}} \approx 0,950;$$

$$\frac{1}{\mu_{\text{HCl}}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{35} = \frac{36}{35}, \quad \mu_{\text{HCl}} \approx 0,973.$$

Для хлора мы подставили атомную массу его наиболее распространенного изотопа  $\text{Cl}^{35}$ . Заметим, что приведенные массы близки по величине друг к другу. Это вызвано тем, что основную роль в колебаниях играет атом водорода, являющийся в молекуле более легким.

Теперь по формуле (53е) мы можем рассчитать отношение силовых постоянных:

$$\frac{C_{\text{HF}}}{C_{\text{HCl}}} = \frac{(\mu\omega_0^2)_{\text{HF}}}{(\mu\omega_0^2)_{\text{HCl}}} \approx \frac{54,0 \cdot 10^{28}}{29,0 \cdot 10^{28}} \approx 1,86, \quad (53ж)$$

а силовая постоянная молекулы HF равна

$$C_{\text{HF}} = (54,0 \cdot 10^{28}) \cdot (1,66 \cdot 10^{-24}) \text{ дин/см} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ дин/см}, \quad (53з)$$

причем мы ввели здесь коэффициент, переводящий массу из единиц атомной массы в граммы.

Правильно ли полученное значение  $C$ ? Предположим, что мы растягиваем молекулу (имеющую длину около 1 Å, т. е.  $1 \cdot 10^{-8}$  см) на 0,5 Å. Работа, затрачиваемая на это, вероятно, будет примерно достаточна для того, чтобы разъединить молекулу на отдельные атомы H и F. Согласно (53а) работа растяжения на 0,5 Å должна быть величиной такого порядка:

$$\frac{1}{2} C (r - r_0)^2 \approx \frac{1}{2} (9 \cdot 10^6) \cdot (0,5 \cdot 10^{-8})^2 \text{ эрг} \approx 1 \cdot 10^{-11} \text{ эрг},$$

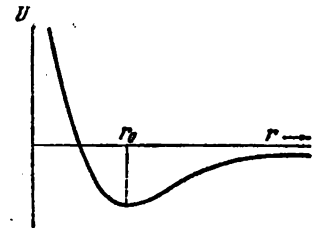


Рис. 9.12. График потенциальной энергии как функции расстояния  $r$  между двумя атомами, образующими молекулу. Равновесному положению соответствует расстояние  $r_0$ .

или

$$(1 \cdot 10^{-11}) \text{ эрг} / (1,6 \cdot 10^{-12}) \approx 6 \text{ эв}.$$

Это как раз порядок величины энергии разложения молекулы на отдельные атомы. При выполнении этого оценочного расчета мы использовали уравнение (53ж) за пределами той области расстояний между атомами, для которой оно справедливо. В действительности график внутримолекулярной потенциальной энергии имеет вид, показанный на рис. 9.12.

## 9.8. Задача о движении одного тела

Задача двух тел для однородных шаров или материальных точек была выше сведена к задаче о движении одного тела, задаваемой уравнением (50):

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (54)$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, соединяющий две материальные точки (рис. 9.13). Движение центра масс системы из двух материальных точек не зависит от силы их взаимодействия, а определяется только внешними силами, если они имеются. Займемся относительным движением

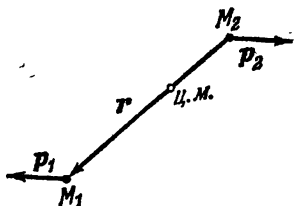


Рис. 9.13. В инерциальной системе отсчета, относительно которой центр масс неподвижен,  $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$ . Сумма моментов импульсов материальных точек  $M_1$  и  $M_2$  относительно центра масс — это постоянная величина; полный момент импульса системы  $\mathbf{J}$ .

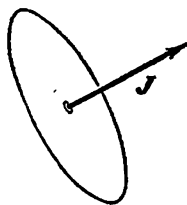


Рис. 9.14. Так как момент импульса  $\mathbf{J}$  постоянен, движение под действием центральной силы является плоским.

двух материальных точек, определяемым уравнением (54). Это одна из наиболее важных задач в классической механике. В решении ее используется почти все, что мы знаем, а также еще некоторые приемы.

Из гл. 6 нам известно, что момент импульса материальной точки, движущейся вокруг неподвижного центра сил, остается постоянным (рис. 9.14). Следовательно, момент импульса должен оставаться постоянным и для нашей задачи, сводимой к задаче о движении одного тела:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} = \text{const}. \quad (55)$$

Он постоянен как по направлению, так и по величине. Это приводит к важным упрощениям при решении уравнения (54). Легко показать, что момент импульса в уравнении (55) в точности равен моменту импульса, определенному по обычной формуле:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times M_2 \dot{\mathbf{r}}_2,$$

где векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  определяют положение обеих материальных точек в системе отсчета с началом в центре масс  $R_{\text{ц.м.}}$ . Для этого

надо просто переписать уравнение (55) в виде.

$$\mathbf{J} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \times (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \quad (55a)$$

и подставить в него соотношения, получающиеся из (46) при  $\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц.м.}} = 0$ , а именно:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = -(M_2/M_1)\dot{\mathbf{r}}_2, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = -(M_1/M_2)\dot{\mathbf{r}}_1.$$

Из уравнения (55) следует, что движение системы должно совершаться в одной плоскости, потому что вектор  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  должен иметь постоянное направление, если имеет постоянное направление вектор  $\mathbf{J}$ . Положение материальной точки на плоскости определяется

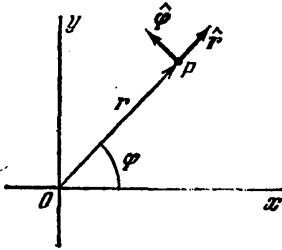


Рис. 9.15. Система полярных координат на плоскости удобна для описания движения приведенной массы  $\mu$ , находящейся в точке  $P$ , если это движение совершается под действием центральной силы вокруг неподвижного центра сил в точке  $O$ ;  $\hat{r}$  и  $\hat{\phi}$  — ортогональные единичные векторы.

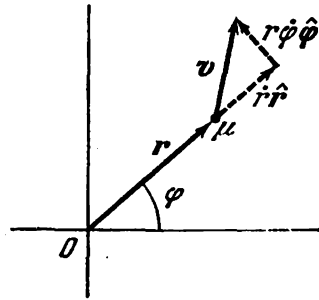


Рис. 9.16. Разложение  $v$  материальной точки на радиальную и азимутальную составляющие. Кинетическая энергия равна

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2).$$

Полная энергия равна

$$E = K + U = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}^2 + U.$$

только двумя координатами. Выберем  $\hat{r}$  — единичный вектор, идущий в направлении вектора, соединяющего избранное начало координат с данной материальной точкой, и  $\hat{\phi}$  — единичный вектор, лежащий в данной плоскости и перпендикулярный к  $\hat{r}$  (рис. 9.15). Скорость  $\dot{\mathbf{r}}$  имеет составляющую в направлении  $\hat{r}$  и составляющую в направлении  $\hat{\phi}$  (рис. 9.16):

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} = \dot{r} \hat{r} + r \omega \hat{\phi}, \quad (56)$$

где  $\dot{\phi} \equiv \omega$ . Пользуясь этим результатом, можно согласно (55) преобразовать момент импульса таким образом:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mu (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi}) = \mu r^2 \omega \hat{z}, \quad (57)$$

где  $\hat{z}$  — единичный вектор  $\hat{r} \times \hat{\phi}$ , перпендикулярный к плоскости, в которой совершается движение. Мы использовали здесь тождество  $\mathbf{r} \times \hat{r} = 0$ .

Рассмотрим теперь уравнение для скалярной величины  $\ddot{r}$ . Напомним (см. гл. 3), что для описания движения во вращающейся системе координат необходимо ввести центробежную силу инерции, равную по абсолютной величине  $\mu\omega^2 r$  и направленную по радиусу от центра вращения. Уравнение движения во вращающейся системе координат:

$$\mu\ddot{r} = \text{сила тяготения} + \text{центробежная сила}, \quad (58)$$

или

$$\mu\ddot{r} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} + \mu\omega^2 r. \quad (59)$$

В этом уравнении и  $r$  и  $\omega$  могут изменяться со временем.

Теперь используем уравнение (57), чтобы выразить  $\omega$  через  $J$ :

$$\omega^2 = \frac{J^2}{\mu^2 r^4}, \quad (60)$$

и тогда можно написать уравнение (59) в следующем виде:

$$\mu\ddot{r} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} + \frac{J^2}{\mu r^3}, \quad (61)$$

где от времени зависит только  $r$ , потому что момент импульса является постоянной величиной. Решение уравнения (61) имело огромное значение в истории небесной механики. Оно позволило рассчитать движение планет, двойных звезд и спутников.

Для решения уравнения (61) удобно выразить  $r$  как функцию  $r(\varphi)$  угла  $\varphi$ . Мы получим, пользуясь уравнением (57),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \omega = \frac{dr}{d\varphi} \frac{J}{\mu r^2}. \quad (62)$$

Далее, дифференцируя еще раз и используя еще раз уравнение (57), а также (62), получим

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2} \left(\frac{J}{\mu r^2}\right)^2 + \frac{dr}{d\varphi} \frac{J}{\mu} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{d^2r}{d\varphi^2} \left(\frac{J}{\mu r^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3} \frac{J}{\mu} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{J}{\mu r^2}. \quad (63)$$

Введем функцию  $w(\varphi)$ , определив ее так:

$$w(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}. \quad (64)$$

Оказалось (в итоге столетнего опыта), что введение этой функции

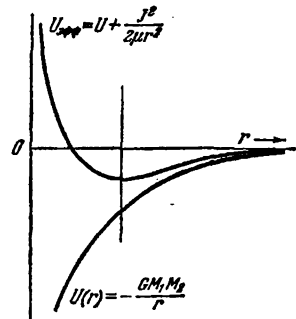


Рис. 9.17. Эффективная сила, величина которой равняется правой части уравнения (61), может быть определена как  $-\partial U_{\text{эфф}}/\partial r$ , где  $U_{\text{эфф}}$  — эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{J^2}{2\mu r^2}.$$

Введение понятия эффективной потенциальной энергии полезно при рассмотрении следствий закона сохранения момента импульса в отношении движения материальной точки. При этом мы видим, что если момент импульса остается постоянным, то при малых расстояниях  $r$  действует сила отталкивания.

позволяет получить более простое дифференциальное уравнение, чем уравнение относительно  $r$ . Продифференцируем (64) два раза:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \quad \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2. \quad (65)$$

Сравнивая (65) с (63), мы видим, что

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{J}{\mu}\right)^2 \frac{d^2\omega}{d\varphi^2}, \quad (66)$$

и уравнение движения (61) можно переписать в следующем виде:

$$-\omega^2 \frac{J^2}{\mu} \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} = -\omega^2 GM_1 M_2 + \omega^3 \frac{J^2}{\mu^2}, \quad (67)$$

или

$$\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \omega = \frac{\mu GM_1 M_2}{J^2}. \quad (68)$$

Это очень простое уравнение: его правая часть — постоянная величина.

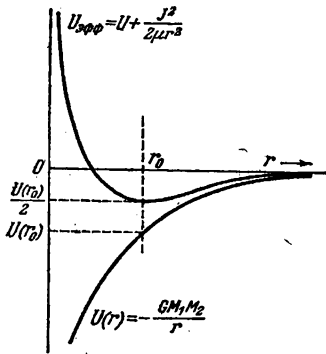


Рис. 9.18.  $U_{\text{эфф}}$  достигает минимума при  $r=r_0$ . В этой точке  $U_{\text{эфф}}=U/2$ .

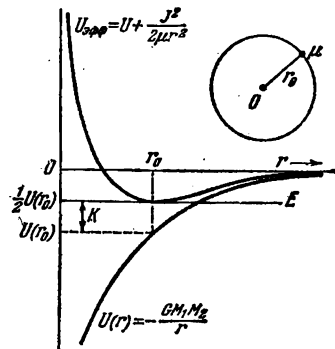


Рис. 9.19. Полная энергия не может быть меньше минимального значения  $U_{\text{эфф}}$ . Если она точно равна этому значению, то  $\mu r^2/2=0$  и  $r=r_0$  всегда. Движение является круговым, причем

$$K = E - U = -\frac{U(r_0)}{2} = \frac{GM_1 M_2}{2r_0}.$$

Левая часть уравнения (68) напоминает уравнение движения гармонического осциллятора. Такое же уравнение, но без правой части:

$$\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \omega = 0, \quad (69)$$

имеет решение  $\omega = A \cos \varphi$ , где  $A$  — произвольная постоянная. Если к  $\omega$  прибавить постоянную  $\mu GM_1 M_2 / J^2$ , то получим следующую функцию:

$$\omega = A \cos \varphi + \frac{\mu GM_1 M_2}{J^2}, \quad (70)$$



являющуюся решением уравнения (68). (Проверьте это!) Вспомним, что  $\omega \equiv 1/r$ .

Уравнение (70) как раз представляет собой уравнение конического сечения (эллипс, окружность, парабола или гипербола) в полярных координатах (рис. 9.20). Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение конического сечения (т. е. сечения

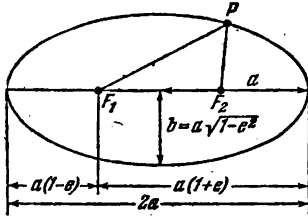


Рис. 9.20. Свойства эллипса. Для любой точки  $P$  сумма расстояний  $F_1P + F_2P = \text{const} = 2a$ . Уравнение эллипса, в полярных координатах:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi}, \quad 0 < e < 1.$$

Малая полуось эллипса равна  $b = a\sqrt{1-e^2}$ .  
Площадь эллипса равна  $\pi ab$ .

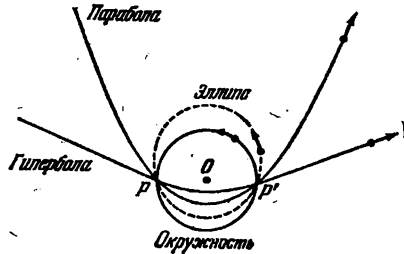


Рис. 9.21. Орбиты тел, имеющих одни и те же приведенную массу  $\mu$  и момент импульса  $J$ , но различные энергии  $E$ , причем центр сил всех орбит находится в одной и той же точке  $O$ . Все орбиты пересекаются в точках  $P$  и  $P'$ .

Орбита	Эксцентриситет
Окружность	$e=0, \quad E < 0$
Эллипс	$e=1/3, \quad E < 0$
Парабола	$e=1, \quad E=0,$
Гипербола	$e=1, \quad E > 0$

конуса плоскостью) в полярных координатах может быть написано в таком общем виде:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se} (1 - e \cos \varphi). \quad (71)$$

Как известно, постоянная  $e$  называется *эксцентриситетом*. Другая постоянная  $s$  определяет размеры фигуры. Уравнению (71) соответствуют четыре возможных типа кривых (рис. 9.21):

- гипербола,  $e > 1$ ;
- парабола,  $e = 1$ ;
- эллипс,  $0 < e < 1$ ;
- окружность,  $e = 0$ .

Нетрудно убедиться, что уравнение (71) действительно описывает одну из этих кривых, например эллипс. Надо только рассчитать  $r$  для интервала значений  $\varphi$ . Результаты расчета удобно вычертить на бумаге с полярной координатной сеткой. На такой бумаге нанесены линии постоянного радиуса и линии с постоянным полярным углом. Ниже приводятся результаты приближенного расчета по уравнению (71) для случая, когда  $s=1$  и  $e=1/2$ ; если нанести эти значения  $r$  и  $\varphi$  на бумагу с полярной координатной

сеткой, можно удостовериться, что кривая представляет собой эллипс (рис. 9.22—9.24).

$\varphi$	$\cos \varphi$	$2(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi)$	$r$	$\varphi$	$\cos \varphi$	$2(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi)$	$r$
$0^\circ$	1,00	1,00	1,00	$100^\circ$	-0,17	2,17	0,46
$20^\circ$	0,94	1,06	0,94	$120^\circ$	-0,50	2,50	0,40
$40^\circ$	0,77	1,23	0,81	$140^\circ$	-0,77	2,77	0,36
$60^\circ$	0,50	1,50	0,67	$160^\circ$	-0,94	2,94	0,34
$80^\circ$	0,17	1,83	0,55	$180^\circ$	-1,00	3,00	0,33
$90^\circ$	0,00	2,00	0,50				

Проделайте такой же расчет для  $s=1$ ,  $e=2$ . Эта кривая является гиперболой.

Сравнивая уравнения (70) и (71), находим

$$\frac{1}{se} = \frac{\mu G M_1 M_2}{J^2}, \quad \frac{1}{s} = -A. \quad (72)$$

Теперь постараемся выразить  $e$  (или  $s$ ) через полную энергию системы  $E$ . (Энергия — это еще одна величина, остающаяся постоянной при движении.) Чтобы сделать это наиболее легким способом, заметим, что значение энергии можно определить особенно просто, когда расстояние материальной точки от начала координат достигает минимума или максимума, т. е. когда вектор скорости перпендикулярен к  $r$ . Пользуясь уравнениями (56) и (57), можно выразить кинетическую энергию в этих точках в простейшем виде (потому что только в этих точках  $\dot{r}=0$ , а во всех других точках орбиты кинетическая энергия содержит также слагаемое, пропорциональное  $r^2$ ):

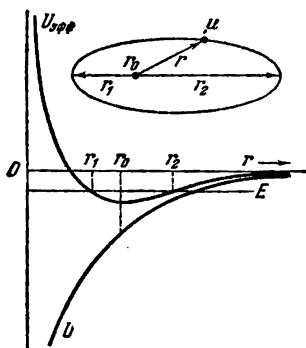


Рис. 9.22. При  $0 > E > U_{эфф}(r)$  движение совершается между «поворотными» точками  $r_1$  и  $r_2$ . Орбита представляет собой эллипс, причем одному из фокусов соответствует расстояние  $r_0$ , для которого функция  $U_{эфф}$  минимальна. При  $E \rightarrow 0$  величина  $r_2 \rightarrow \infty$ , эксцентриситет

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \rightarrow 1,$$

т. е. орбита превращается в параболу.

Энергию  $E$  с минимальным и максимальными значениями  $r$ :

$$E = K + U = \frac{J^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_{\min}} \right)^2 - \frac{GM_1 M_2}{r_{\min}} = \frac{J^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_{\max}} \right)^2 - \frac{GM_1 M_2}{r_{\max}}. \quad (74)$$

$$K = \frac{1}{2} \mu \dot{r} \cdot \dot{r} = \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{J}{\mu r} \right)^2. \quad (73)$$

Из уравнения (73) мы получаем следующее соотношение, связывающее полную

Из (71) следует, что при  $\varphi=\pi$  и  $\varphi=0$

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{se} (1+e), \quad \frac{1}{r_{\max}} = \frac{1}{se} (1-e). \quad (75)$$

Подставив (75) в (74) и используя (72), получаем после некоторых алгебраических преобразований следующие соотношения:

$$e = \left(1 + \frac{2EJ^2}{\mu G^2 M_1^2 M_2^2}\right)^{1/2}, \quad E = -\frac{\mu G M_1^2 M_2^2}{2J^2} (1-e^2). \quad (76)$$

Заметим, что из (75) следует также

$$\frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = e. \quad (77)$$

Эта формула для эксцентриситета эллипса легко запоминается.

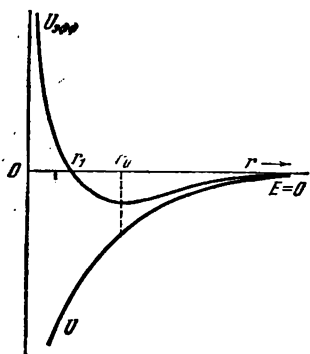


Рис. 9.23. Если  $E=0$ , то  $r_2=\infty$  и  $e=1$ . Орбита представляет собой параболу.

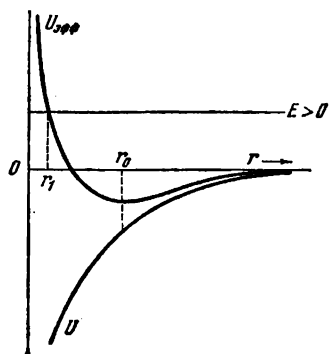


Рис. 9.24. Если  $E > 0$ , то  $e > 1$  и орбита представляет собой гиперболу. Расстояние  $r_1$  называется расстоянием наибольшего приближения.

**Пример. Круговая орбита.** Каково соотношение между полной энергией и моментом импульса для круговой орбиты?

Так как для круговой орбиты  $e=0$ , из (76) следует:

$$E = -\frac{\mu G^2 M_1^2 M_2^2}{2J^2}. \quad (78)$$

Полная энергия отрицательна при условии, что  $U(\infty)=0$ , потому что система в своем движении не выходит за пределы ограниченной области пространства.

Некоторые студенты склонны думать, что все замкнутые орбиты должны быть круговыми. Чтобы понять, что такое эллиптические орбиты, рассмотрим рис. 9.25. На этом рисунке изображено семейство траекторий материальной точки, притягиваемой к началу координат, обозначенному крестиком, с силой, определяющейся по закону обратных квадратов. Это семейство кривых выбрано

так, чтобы все траектории проходили через общую точку  $P$ , в которой скорость перпендикулярна к отрезку прямой, соединяющему  $O$  и  $P$ . Различные орбиты характеризуются различными величинами скорости  $v_p$  в точке  $P$ . Вообще, величину скорости  $v_p$  в этой точке  $P$  удобно выразить так:

$$\frac{v_p}{v_0} = \alpha, \quad (79)$$

где  $v_0$  — скорость на круговой орбите с центром в  $O$ , проходящей через точку  $P$ . Если  $\alpha=1$ , то орбита представляет собой окружность; при  $\alpha < \sqrt{2}$  орбита является эллипсом; при  $\alpha = \sqrt{2}$  орбита

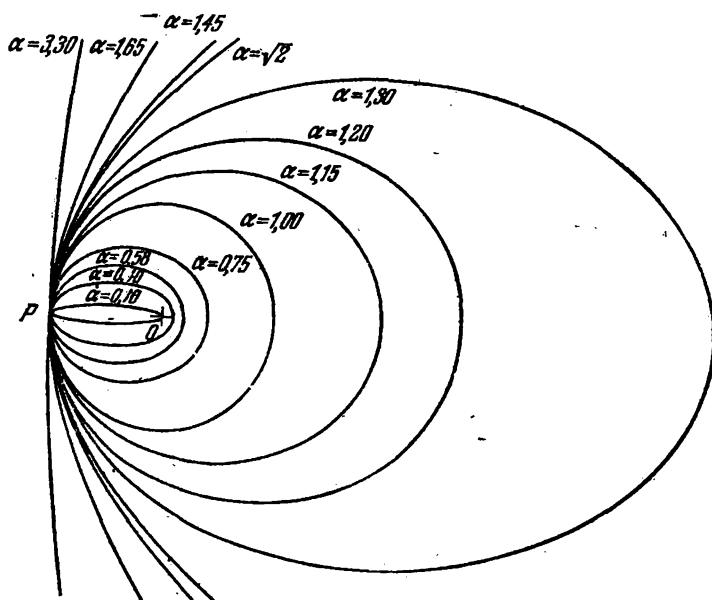


Рис. 9.25. Орбиты, проходящие через общую точку  $P$  и имеющие в этой точке нормаль  $OP$ , где  $O$  — центр действия силы. Если  $v_0$  — скорость на круговой орбите, то параметр  $\alpha$  определяется из следующего равенства:

$$v_p(\alpha) = \alpha v_0.$$

Уравнение (83) показывает, что

$$E(\alpha) = (2 - \alpha^2) E_0.$$

становится параболой, а если  $\alpha > \sqrt{2}$ , то орбита является гиперболой. (Эти результаты становятся ясными при рассмотрении уравнения (83), приводимого ниже.)

Рассчитывая энергию движения, мы можем подтвердить, что переход от замкнутых орбит к открытым совершается при  $\alpha = \sqrt{2}$ .

Полную энергию в точке  $P$  можно выразить следующим соотношением:

$$E = \frac{1}{2} \mu v_P^2 - \frac{B}{r_0} = \frac{1}{2} \mu \alpha^2 v_0^2 - \frac{B}{r_0} = \\ = \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \mu v_0^2 + \frac{1}{2} \mu v_0^2 - \frac{B}{r_0} = E_0 + \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \mu v_0^2, \quad (80)$$

где через  $E_0$  и  $v_0$  обозначены соответственно энергия и скорость для движения по круговой орбите;  $B$  — постоянная, равная  $GM_1 M_2$ ;  $r_0$  — расстояние между  $P$  и  $O$ . Но для круговой орбиты

$$\frac{\mu v_0^2}{r_0} = \frac{B}{r_0^2}, \quad (81)$$

где левая часть представляет собой произведение массы на центростремительное ускорение, а правая часть — силу тяготения. Используя этот результат, можно переписать выражение для полной энергии движения по круговой орбите таким образом:

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 - \frac{B}{r_0} = \frac{1}{2} \mu v_0^2 - \mu v_0^2 = -\frac{1}{2} \mu v_0^2, \quad (82)$$

а уравнение (80) —

$$E = E_0 - (\alpha^2 - 1) E_0 = (2 - \alpha^2) E_0 = (\alpha^2 - 2) |E_0|. \quad (83)$$

Если  $\alpha^2 > 2$ , то полная энергия положительна и орбита является разомкнутой. Если  $\alpha^2 < 2$ , то полная энергия отрицательна и орбита получается замкнутой: в этом случае материальная точка не может удалиться на бесконечно большое расстояние от центра сил.

## 9.9. Законы Кеплера

Одним из величайших экспериментальных открытий в истории науки был установленный Кеплером факт, что орбиты планет являются эллипсами, внутри которых находится Солнце. Эмпирические формулировки законов движения планет, данные Кеплером, послужили исходным экспериментальным материалом для вывода основных законов механики и теории всемирного тяготения. Кеплер сформулировал свои три закона следующим образом:

I. Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов орбиты.

II. Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, описывает равные площади за равные промежутки времени.

III. Квадраты периодов обращения нескольких планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей эллипсов. (Эта формулировка является более общей, чем первоначальная формулировка Кеплера.) Здесь мы не учитываем влияния других планет на движение данной планеты.

Мы только что показали, что замкнутые орбиты являются эллипсами. Второй закон Кеплера был рассмотрен в виде уравнения (65) в гл. 6, где было показано, что он выражает собой просто закон сохранения момента импульса.

Перейдем теперь к выводу третьего закона Кеплера. Если  $dS$  — площадь, описываемая за время  $dt$  радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, то можно показать, что

$$\frac{dS}{dt} = \frac{J}{2\mu} = \text{const}, \quad (84)$$

где  $J$  — момент импульса, а  $\mu$  — приведенная масса. Интегрируя уравнение (84) по времени за один период  $T$  движения, мы получим

$$S = \frac{JT}{2\mu}, \quad \text{или} \quad T = \frac{2S\mu}{J} = \frac{2\pi ab\mu}{J}, \quad (85)$$

причем  $S = \pi ab$  — это площадь эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ .

Очевидным свойством эллипса является равенство  $2a = r_{\max} + r_{\min}$ ; используя формулы (75), получаем

$$2a = \frac{se}{1+e} + \frac{se}{1-e} = \frac{2se}{1-e^2}. \quad (86)$$

Если учесть еще формулы (72), то это равенство принимает следующий вид:

$$2a = \frac{2}{1-e^2} \frac{J^2}{GM_1M_2\mu}. \quad (87)$$

Определяя  $T^2$  из уравнения (85) и подставляя  $J^2$  из (87), получаем

$$T^2 = \frac{(2\pi ab\mu)^2}{aGM_1M_2\mu(1-e^2)^2} = \frac{4\pi^2 ab^2\mu}{GM_1M_2(1-e^2)}. \quad (88)$$

Но эксцентриситет  $e$  имеет такое свойство:

$$b^2 = a^2(1-e^2), \quad (89)$$

используя которое можно получить из соотношения (88) следующую формулу:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}. \quad (90)$$

Можно проверить (90) для круговой орбиты; это легко сделать, потому что для круговой орбиты из условия равновесия сил получается, что  $\mu\omega^2 r = GM_1M_2/r^2$ , т. е. произведение  $\omega^2 r^3$  постоянно.

Подробные данные об орбитах больших планет Солнечной системы приведены в таблице. Обратите внимание, что орбита Земли очень близка к круговой. *Астрономическая единица* длины, по определению, представляет собой полусумму самого длинного и самого короткого расстояний от Земли до Солнца:

$$1 \text{ а. е.} = 1,495 \cdot 10^{13} \text{ см.}$$

Не следует смешивать эту единицу с парсеком. *Парсек* — это

расстояние, на котором длина в одну астрономическую единицу стягивает угол, равный одной угловой секунде:

$$1 \text{ парсек} = 3,084 \cdot 10^{18} \text{ см.}$$

Наименование планеты	Длина большой полуоси орбиты, а. е.	Период обращения, сек	Эксцентриситет орбиты	Угол наклона орбиты	Масса планеты, $z$
Меркурий	0,387	$7,60 \cdot 10^6$	0,205	$7^{\circ}00'$	$3,28 \cdot 10^{26}$
Венера	0,723	$1,94 \cdot 10^7$	0,006	$3^{\circ}23'$	$4,83 \cdot 10^{27}$
Земля	1,000	$3,16 \cdot 10^7$	0,016	0	$5,98 \cdot 10^{27}$
Марс	1,523	$5,94 \cdot 10^7$	0,093	$1^{\circ}51'$	$6,37 \cdot 10^{26}$
Юпитер	5,202	$3,74 \cdot 10^8$	0,048	$1^{\circ}18'$	$1,90 \cdot 10^{30}$
Сатурн	9,554	$9,30 \cdot 10^8$	0,055	$2^{\circ}29'$	$5,67 \cdot 10^{29}$
Уран	19,218	$2,66 \cdot 10^9$	0,046	$0^{\circ}46'$	$8,80 \cdot 10^{28}$
Нептун	30,109	$5,20 \cdot 10^9$	0,008	$1^{\circ}46'$	$1,03 \cdot 10^{29}$
Плутон	39,60	$7,82 \cdot 10^9$	0,246	$17^{\circ}7'$	$5,4 \cdot 10^{27}$

Расстояние от ближайшей звезды до Солнца равно 1,31 парсека. Угол наклона орбиты в пятом столбце таблицы — это угол между плоскостью орбиты планеты и плоскостью орбиты Земли (эклиптикой).

Для проверки третьего закона Кеплера сравним орбиту Урана с орбитой Земли. Куб отношения длин больших полуосей равен

$$\left(\frac{19,22}{1}\right)^3 \approx 71,0 \cdot 10^3, \quad (91)$$

а квадрат отношения периодов обращения равен

$$(84,2)^2 \approx 70,9 \cdot 10^3, \quad (92)$$

т. е. эти числа довольно точно совпадают. Все это было рассчитано с помощью обычной логарифмической линейки. Произведите такой же расчет, сравнивая, например, орбиту Меркурия с орбитой Земли.

На рис. 9.26 данные для планет нанесены на график с логарифмическим масштабом по обеим осям. В таком двойном логарифмическом масштабе любая степенная зависимость выражается прямой линией; угловой коэффициент этой прямой равен показателю в степени в формуле этой зависимости.

Ньютон проверил третий закон Кеплера также по наблюдаемым величинам периода обращения четырех самых больших спутников Юпитера и обнаружил очень хорошее совпадение.

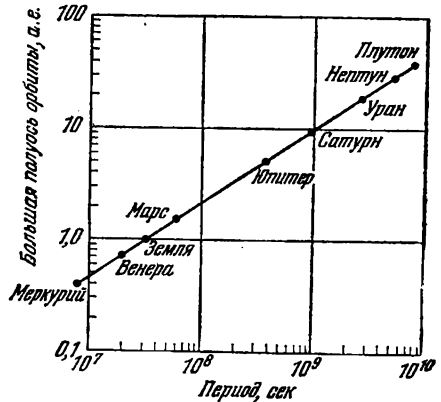


Рис. 9.26. По наклону прямой линии можно легко определить, что период обращения  $T$  изменяется пропорционально  $a^{3/2}$ .

## Задачи

1. *Приведенная масса.* Основную частоту колебаний двухатомной молекулы можно выразить следующей формулой:

$$\omega = \left( \frac{C}{\mu} \right)^{1/2},$$

где  $C$ , по аналогии с макроскопической пружиной, представляет собой силовую постоянную, а  $\mu$  — приведенная масса двух атомов. Колебательная частота молекулы окиси углерода  $\text{CO}$  равна  $\omega \approx 0,6 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ .

а) Рассчитать  $\mu$  в граммах по значениям атомных масс.

Ответ.  $1 \cdot 10^{-23} \text{ г}$ .

б) Рассчитать силовую постоянную для растяжения этой молекулы.

Ответ.  $4 \cdot 10^6 \text{ дин/см}$ .

2. *Гравитационное притяжение к нити бесконечной длины.* Доказать, что на массу  $M_1$ , находящуюся на расстоянии  $R$  от бесконечной прямолинейной нити с плотностью  $\rho$  на единицу длины, действует сила тяготения  $2G\rho M_1/R$  (обратите внимание на направление силы, действующей со стороны элемента длины).

3. *Гравитационное притяжение к нити конечной длины.* Рассматривается точка с абсциссой  $x$ , находящаяся на перпендикуляре к середине прямолинейной нити, имеющей длину  $2L$ . Масса нити равна  $M$ ; начало системы координат находится в одной из точек нити.

а) Найти выражение для потенциальной энергии, обращаемой в нуль при  $x \rightarrow \infty$ .

Ответ.  $-(GMm/L) \ln \{ [L + (x^2 + L^2)^{1/2}] / x \}$ .

б) Найти выражение для силы тяготения, с которой эта нить действует на материальную точку с массой  $m$ , имеющую абсциссу  $x$ .

в) Доказать, что результат, полученный в а), переходит в  $U \approx -GMm/L$ , когда  $x \gg L$ . В качестве примера рассмотреть проволоку длиной  $2 \text{ м}$ , имеющую плотность на единицу длины  $2 \text{ г/см}$ .

г) Какова величина (в динах) силы тяготения, с которой эта проволока действует на материальную точку с массой  $M=0,5 \text{ г}$ , находящуюся на расстоянии  $3 \text{ м}$  от середины проволоки по ее продольной оси?

Ответ.  $1,7 \cdot 10^{-10} \text{ дин}$ .

д) Какова потенциальная энергия (в эргах) этой материальной точки в силовом поле проволоки в положении, заданном в а)?

Ответ.  $-4,6 \cdot 10^{-8} \text{ эрг}$ .

4. *Сила, величина которой обратно пропорциональна расстоянию в степени 2,1.* Найти потенциальную энергию пробной частицы с массой  $M_1$ , находящейся внутри шарового слоя радиусом  $R$  на расстоянии  $r$  от его центра. Масса слоя равна  $4\pi \rho R^2$ . Предполагается, что между двумя материальными точками с массами  $M_1$  и  $M_2$  действует сила

$$F = -G' \frac{M_1 M_2}{r^{2,1}},$$

где  $G'$  — постоянная. Такой закон действия сил неизвестен в физике; заметьте, насколько результат расчета чувствителен к отклонению показателя степени при  $r$  от величины 2,0.

5. *Гравитационная потенциальная энергия группы звезд.* Найти величину взаимной гравитационной энергии (в эргах) системы восьми звезд, каждая из которых имеет массу, равную массе Солнца, и расположена в одной из вершин куба с длиной ребра 1 парсек (собственную энергию каждой звезды не учитывать).

Ответ.  $2 \cdot 10^{42} \text{ г} \cdot \text{см}^2 / \text{сек}^2$ .

6. *Ускорение силы тяжести на поверхности звезды — белого карлика.* Рассмотрим звезду белый карлик с массой, равной массе Солнца, и радиусом, равным 0,02 радиуса Солнца. Эти данные приближенно характеризуют наиболее



известный белый карлик, Сириус В, являющийся одним из компонентов Сириуса — самой яркой звезды небесного свода (рис. 9.27). Предполагают, что белые карлики представляют собой конечные продукты цикла эволюции звезд.

а) Какую величину имеет  $g$ , ускорение силы тяжести, на поверхности Сириуса В?

б) Какова плотность Сириуса В?

Ответ.  $2 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$ .

7. Орбитальное движение двойных звезд. Наиболее массивная звезда, известная в настоящее время, — это звезда Дж. С. Пласкета. Она является двойной звездой\*, т. е. состоит из двух звезд, связанных между собой силой тяготения. Из спектральных исследований известно:

а) Период обращения этих звезд вокруг их центра масс равен 14,4 суток ( $1,2 \cdot 10^6 \text{ сек}$ ).

б) Скорость движения каждого из компонентов — около  $220 \text{ км/сек}$ . Поскольку скорости обоих компонентов почти равны по величине (но противоположны по направлению), мы можем предположить, что они отстоят на равных расстояниях от центра масс и, следовательно, их массы почти равны.

в) Их орбиты почти круговые.

По этим данным рассчитать приведенную массу и расстояние между двумя компонентами.

О т в е т.  $\mu \approx 0,6 \cdot 10^{35} \text{ г}$ ; расстояние  $\approx 0,8 \cdot 10^{13} \text{ см}$ .

8. Движение внутри галактики. Рассмотрим однородное сферическое распределение звезд в галактике с общей массой  $M$  и радиусом  $R_0$ . Звезда с массой  $M_{зв}$ , находящаяся на расстоянии  $r < R_0$  от центра галактики, будет двигаться под действием центральной силы, величина которой зависит от массы, заключенной внутри сферы радиусом  $r$ .

а) Какая сила действует на расстоянии  $r$ ?

б) Какова скорость звезды, если она движется вокруг центра галактики по круговой орбите?

9. Соотношения для эллиптических орбит. а) Доказать, что момент импульса планеты, движущейся по эллиптической орбите, проходящей через точку  $P$  (см. текст, предшествующий уравнению (79)), равен  $J = \alpha J_0$ , где  $J_0$  относится к круговой орбите, проходящей через точку  $P$ , а  $\alpha$  определяется из уравнения (79).

б) Доказать, что эксцентриситет орбиты равен

$$e = |\alpha^2 - 1|.$$

10. Движение карликовой галактики. Недавно было найдено, что наша Галактика окружена несколькими (не менее шести) очень маленькими карликовыми галактиками. Их малая масса, близость к нашей Галактике и малые скорости относительно нее (измеренные скорости некоторых из галактик — менее  $10^2 \text{ см/сек}$ ) наводят на мысль, что эти галактики гравитационно связаны с нашей звездной системой. Одна из этих галактик — это так называемая система в созвездии Скульптора. На основании измерений по некоторым ее переменным звездам было найдено, что расстояние этой системы от центра нашей Галактики составляет около  $2 \cdot 10^{23} \text{ см}$ . Общая масса галактики в созвездии Скульптора, приближенно рассчитанная по ее светимости, в  $3 \cdot 10^6$  раз больше массы Солнца. Величина массы нашей

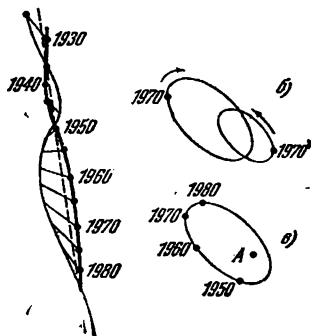


Рис. 9.27. Визуально наблюдаемые траектории звезд — компонентов Сириуса: а) Жирная кривая показывает синусоидальное движение главной звезды, тонкая кривая соответствует синусоидальному движению спутствующего ей белого карлика, а пунктирной кривой изображено движение центра масс системы. б) Орбиты движения обоих компонентов вокруг их общего центра масс. в) Орбита движения спутствующей звезды вокруг главной. (По книге Струве, Линдса и Пилланса)

\*) Хороший обзор по двойным звездам см. в книге: O. S t r u v e, B. L i n d s, P i l l a n s, Elementary Astronomy, Oxford Univ. Press, New York, 1959. Из пятидесяти ближайших к Солнцу звезд по крайней мере половину составляют двойные или множественные звезды.

Галактики оценивается приблизительно в  $4 \cdot 10^{11}$  масс Солнца. Предположите, что система в созвездии Скульптора обращается вокруг нашей Галактики по круговой орбите.

а) Рассчитайте период ее обращения.

б) Определите скорость движения по орбите.

в) Рассчитайте относительное ускорение карликовой галактики.

11. *Орбиты метеоритов.* Метеориты — это малые тела, движущиеся в межпланетном пространстве по замкнутым орбитам вокруг Солнца. Иногда они сталкиваются с атмосферой Земли, образуя метеоры, видимые на высоте до  $10^7$  см над земной поверхностью и имеющие скорость от  $1,1 \cdot 10^8$  до  $7,5 \cdot 10^8$  см/сек. Орбита метеорита остается замкнутой, если его скорость в данной точке меньше, чем скорость  $v_{\max}$ , необходимая для преодоления солнечного притяжения, когда метеорит находится на расстоянии  $R$  от Солнца:

$$v_{\max} = \left( \frac{2GM_{\text{С}}}{R} \right)^{1/2}.$$

Мы пренебрегаем трением, а также притяжением метеорита к Земле. Чему равна скорость  $v_{\max}$ , соответствующая какой-либо точке на орбите Земли?

12. *Гравитационное давление в центре Земли.* Рассмотрим однородную сферическую массу, находящуюся в гидростатическом равновесии. Радиус ее  $R$ , а плотность равна  $\rho$ .

а) Доказать, что давление на расстоянии  $r$  от центра этой массы равно

$$\rho = \frac{2\pi}{3} \rho^2 G (R^2 - r^2).$$

б) Рассчитать давление в центре Земли, приняв ее радиус равным  $R = 6,3 \cdot 10^8$  см, а плотность — постоянной и равной  $\rho = 5,5$  г/см<sup>3</sup>.

О т в е т.  $1,7 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>.

13. *Измерение  $G$ .* Можно произвести очень чувствительные измерения, пользуясь кварцевыми нитями. Прочность нити на разрыв изменяется пропорционально квадрату ее радиуса, а упругая постоянная кручения пропорциональна четвертой степени радиуса. Поэтому желательно применять нити малого радиуса, если мы хотим добиться такой высокой чувствительности, которая достигается с малыми значениями постоянной кручения. Постоянная кручения, по определению, равна крутящему моменту, приходящемуся на один радиан, т. е.  $N = -K\phi$ , где  $N$  — крутящий момент. Нередко в приборах применяются кварцевые нити с постоянной  $K$  в интервале  $0,01 - 1$  дин·см/рад. Применение зеркал и электронных систем дает возможность в исключительных условиях измерять углы поворота величиной вплоть до  $10^{-8}$  рад. Задав для всех необходимых величин разумный порядок их числовых значений, составьте схему лабораторного прибора для измерения гравитационной постоянной  $G$ . (Не ожидайте, что удастся довести точность до  $10^{-8}$  рад!) Упругая постоянная кручения имеет следующий порядок величины:

$$K \approx \frac{10^{11} R^4}{L} \text{ дин·см/рад,}$$

где  $R$  и  $L$  — соответственно радиус и длина кварцевой нити (в см).

14. *Источники энергии звезд.* По интенсивности излучения Солнца было определено, что суммарная отдача им энергии равна  $4 \cdot 10^{38}$  эрг/сек. Предположим, что Солнце отдавало энергию с этой скоростью в течение  $Y$  лет, прошедших с того момента, как началось его сжатие. Половина гравитационной потенциальной энергии Солнца перешла в кинетическую энергию составляющих его молекул (согласно теореме о вирнале), а другая половина — в энергию излучения. Доказать, что  $Y \approx 3 \cdot 10^7$  лет. Результат, полученный для  $Y$ , слишком мал, если сравнить его с известным возрастом Солнца  $5 \cdot 10^9$  лет. (Предполагается, что возраст Солнца по крайней мере равен возрасту Земли.) Значительно большим источником энергии излучения Солнца является ядерная, а не гравитационная энергия.

15. *Планковская длина.* Показать, что можно так скомбинировать гравитационную постоянную  $G$ , скорость света  $c$  и постоянную Планка  $h$  (размерность —

энергия, помноженная на время), чтобы получилась величина, имеющая размерность длины. Каков порядок величины этой длины? Ее иногда называют планковской длиной, а ее значение пока остается в какой-то степени умозрительным.

16. *Шаровые скопления звезд* (рис. 9.28). Шаровое скопление звезд — это группа примерно из  $10^5$  звезд, распределенных внутри сферы диаметром порядка 40 парсек.

а) Если звезды равномерно распределены по объему скопления, то какое их количество приходится в среднем на кубический парсек?

б) Каков порядок величины собственной гравитационной энергии шарового скопления звезд? Принять среднюю массу звезды равной массе Солнца. (При расчете собственной гравитационной энергии скопления звезд исключить собственную гравитационную энергию отдельных звезд.)

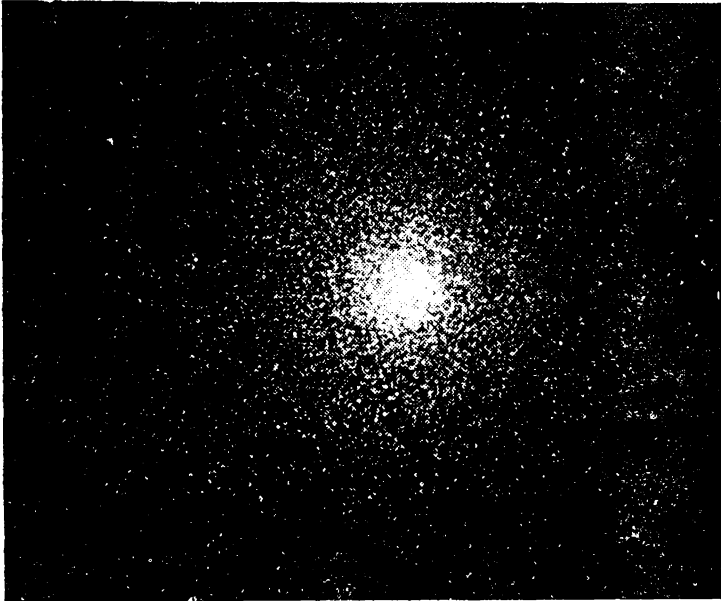


Рис. 9.28. Шаровое скопление звезд М3. (Фото Ликской обсерватории)

17. *Форма поверхности моря на однородной Земле.* Представим себе, что Земля — это однородный шар, полностью покрытый водой, плотность которой  $\rho=1$ . При вращении Земли с угловой скоростью  $\omega$  поверхность воды, покрывающей ее (поверхность уровня моря), принимает форму сплюснутого сфероида. Найти приближенное выражение для разности глубины моря на полюсе и на экваторе, предполагая, что поверхность уровня моря является поверхностью постоянной потенциальной энергии (на чем основано это предположение?). Гравитационное притяжение частиц воды друг к другу не учитывать.

**У к а з а н и е.** На равных расстояниях  $r$  от центра Земли силы тяготения  $F(r)$ , действующие на единицу массы на полюсе и на экваторе, одинаковы, но вследствие вращения Земли на экваторе на эту же массу действует еще центробежная сила инерции, равная  $-\omega^2 r$ , так что результирующая сила равна

$$F_{\text{рез}} = F_{\text{под}}(r) - \omega^2 r,$$

а потенциальная энергия единицы массы равна (при условии, что в центре Земли потенциальная энергия равна нулю)

$$U_{\text{экив}}(r) = U_{\text{пол}}(r) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2,$$

где  $U_{\text{экив}}(r)$  и  $U_{\text{пол}}(r)$  — значения потенциальной энергии соответственно на экваторе и на полюсе. Пусть величины деформации поверхности уровня моря по сравнению с ее шаровой формой радиуса  $R_3$  равны соответственно  $D_{\text{экив}}$  и  $D_{\text{пол}}$ . Так как

$$U_{\text{экив}}(R_3 + D_{\text{экив}}) = U_{\text{пол}}(R_3 + D_{\text{пол}}),$$

то для решения надо доказать, что

$$g(D_{\text{экив}} - D_{\text{пол}}) \cong \frac{1}{2} \omega^2 R_3^2,$$

где  $g$  — имеет обычное значение. Из этого приближенного равенства следует:

$$\frac{D_{\text{экив}} - D_{\text{пол}}}{R_3} \cong \frac{\omega^2 R_3}{g} \cong \frac{3,4}{980} = \frac{1}{288}.$$

Это очень близко к  $\frac{1}{298,4}$  — величине, измеренной для фактической формы поверхности Земли.

18. *Причина приливов и отливов.* Разберем причину приливов и отливов. Основной приливообразующей силой является разность между силой притяжения Луны, действующей на воду океана, и силой ее притяжения, действующей на саму Землю. Более подробное объяснение причины приливов и отливов можно прочесть в элементарном курсе астрономии. На основе этого объяснения дайте правильный ответ на следующий вопрос:

Почему приливы одновременно происходят в двух точках Земли, из которых одна ближе всего к Луне, а другая находится на противоположной стороне Земли? Иными словами, почему приливы происходят не один, а два раза в сутки?

### Дополнение 1. Теорема о вириале

Выше мы привели без доказательства следующий важный вывод: *невозможно устойчивое равновесие системы материальных точек, взаимодействующих по закону обратных квадратов.* Это означает, что в системе, где действуют только силы, величина которых определяется законом обратных квадратов, состояние с кинетической энергией, равной нулю, не может быть устойчивым. Этот вывод относится как к электронам в атоме, так и к атомам в звезде или к звездам в галактике. Из него следует, что окружающая нас материя должна во всех своих формах состоять из движущихся тел и только в каком-то среднем, относительном смысле мы можем считать определенную ее часть неподвижной.

Мы можем встретиться с *установившимся состоянием*, где в среднем не происходят значительные изменения, но не со *статическим состоянием*, где вообще нет движения.

Применение *теоремы о вириале* \*) дает нам возможность определить среднюю (за большой промежуток времени) величину кинетической энергии системы частиц, движущихся в ограниченной области пространства под влиянием сил, действующих по закону обратных квадратов:

$$\langle \text{кинетическая энергия} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \text{потенциальная энергия} \rangle, \quad (93)$$

\*) Область применения теоремы о вириале не ограничивается силами, действующими по закону обратных квадратов. Однако только для сил, подчиняющихся закону обратных квадратов, коэффициент в правой части уравнения (93) равен  $-1/2$ .

где угловые скобки означают среднюю величину за очень большой промежуток времени. Обычно в каждом конкретном случае ясно, что мы подразумеваем под «очень большим промежутком времени». Входящая в соотношение (93) потенциальная энергия определяется так, чтобы она обращалась в нуль, когда все частицы удалены друг от друга на бесконечно большое расстояние.

Докажем теперь теорему о вириале для сил, действующих по закону обратных квадратов. Сначала рассмотрим движение одной материальной точки в поле центральных сил, описываемых следующим уравнением для потенциальной энергии:

$$U(r) = \frac{C}{r}, \quad (94)$$

где  $C$  — постоянная. Уравнение движения этой материальной точки для нерелятивистских скоростей:

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^3} \hat{\mathbf{r}} = M \dot{\mathbf{v}}. \quad (95)$$

Помножим скалярно на  $\mathbf{r}$  обе части уравнения (95):

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = M \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{C}{r} = U(r). \quad (96)$$

Далее, заметим, что

$$M \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = M \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + M \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}} = M \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + M \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}. \quad (97)$$

Комбинируя (96) и (97), получим

$$M \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = 2K + U, \quad (98)$$

где  $K = \frac{1}{2} M v^2$  — кинетическая энергия. Следовательно,

$$\frac{1}{2} M \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{C}{2r} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} U(r), \quad (99)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  изменяются со временем. Для сил притяжения величина  $C$  отрицательна, и можно представить себе такое состояние пространственно ограниченного движения материальной точки, при котором она в течение какого угодно большого промежутка времени остается в пределах конечного объема, окружающего центр действия сил. Рано или поздно материальная точка, не выходящая за пределы конечной области пространства, должна изменить направление движения, и поэтому должна существовать верхняя граница для величины  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ . В среднем эта величина должна увеличиваться так же часто, как и уменьшаться. Если мы усредним ее за большое число циклов движения, то среднее по времени значение величины  $d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/dt$  для частицы, движущейся в пределах конечной области пространства, должно быть равно нулю. Следовательно, если усреднить по времени уравнение (99) для такого пространственно ограниченного движения, то получится

$$\frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle, \quad (100)$$

или:

*Средняя кинетическая энергия материальной точки, совершающей пространственно ограниченное движение под действием сил притяжения, подчиняющихся закону обратных квадратов, равна половине ее средней потенциальной энергии с обратным знаком.*

Уравнение (100) называется *теоремой о вириале* \*). Оно не означает, что кинетическая и потенциальная энергии материальной точки в любой момент должны быть связаны этим соотношением; утверждение теоремы относится только к средним значениям за длительные периоды времени \*\*).

Та же теорема справедлива и для любого числа материальных точек, удерживаемых внутри некоторого ограниченного объема взаимными силами притяжения, действующими по закону обратных квадратов, если даже не все массы этих точек одинаковы и если некоторые из сил являются силами отталкивания (например, в молекуле, представляющей собой систему из электронов и атомных ядер). Чтобы доказать это, рассмотрим  $N$  материальных точек (обозначим их  $1, 2, \dots, N$ ) с массами  $M_1, M_2, \dots, M_N$ . Мы можем выразить потенциальную энергию взаимодействия между  $i$ -й и  $j$ -й материальными точками в следующем виде:

$$U_{ij} = \frac{C_{ij}}{r_{ij}}, \quad (101)$$

где  $C_{ij}$  — положительная или отрицательная постоянная, а  $r_{ij} = r_i - r_j$ . По определению

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad (102)$$

Полная потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}}, \quad (103)$$

куда введена дробь  $1/2$ , так как каждая пара индексов входит в сумму дважды. Штрих при одном из знаков суммирования означает, что мы исключаем из суммы те слагаемые, для которых  $i=j$ . Теперь докажем обобщенную теорему о вириале, исходя из  $N$  уравнений движения, по одному для каждой материальной точки:

$$M_i \dot{v}_i = \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}^2} (r_i - r_j). \quad (104)$$

Сначала помножим обе части скалярно на  $r_i$  и просуммируем для всех материальных точек:

$$\sum_{i=1}^N M_i (r_i \cdot \dot{v}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}^2} (r_i - r_j) \cdot r_i. \quad (105)$$

Каждое слагаемое в левой части можно преобразовать, используя формулу (97), так что левая часть (л. ч.) уравнения (105) примет следующий вид:

$$\text{л. ч.} = - \sum_{i=1}^N M_i v_i^2 + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N M_i (r_i \cdot v_i), \quad (106)$$

или

$$\text{л. ч.} = -2 \text{ (кинетическая энергия)} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N M_i r_i^2. \quad (106a)$$

\*) Для движения одной материальной точки *вириалом* называется величина

$$-1/2 \langle r \cdot F \rangle,$$

которая, согласно уравнению (96), равна  $-1/2 \langle U \rangle$ , если сила  $F$  определяется по закону обратных квадратов. (Прим. ред.)

\*\*\*) При первом чтении этой главы можно пропустить дальнейший текст, начиная с этого места, и сразу перейти к примерам.

Для последнего преобразования мы использовали следующее тождество:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \equiv 2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) \equiv 2(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}).$$

Правая часть (п. ч.) уравнения (105) равна \*)

$$\text{п. ч.} = \sum_i' \sum_j \frac{C_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3}. \quad (107)$$

В этом выражении  $i$  и  $j$  представляют собой просто индексы, которые мы можем заменить любыми другими индексами, не меняя величину п. ч. Таким образом, получим

$$\text{п. ч.} = \sum_i' \sum_j \frac{C_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{r}_j}{r_{ji}^3}. \quad (108)$$

Но  $r_{ij} = r_{ji}$  и, на основании (102),  $C_{ij} = C_{ji}$ , так что мы можем переписать (108) так:

$$\text{п. ч.} = - \sum_i' \sum_j \frac{C_{ij}}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_j. \quad (109)$$

Сложив половину от двойной суммы (107) с половиной от двойной суммы (109) и используя тождество  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \equiv r_{ij}^2$ , получаем

$$\text{п. ч.} = \frac{1}{2} \sum_i' \sum_j \frac{C_{ij}}{r_{ij}} = U, \quad (110)$$

т. е. потенциальную энергию, согласно уравнению (103). Приравнявая л. ч. и п. ч. в (106а) и (110), получаем

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_i M \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) + \text{полная кинетическая энергия} = \\ = - \frac{1}{2} (\text{полная потенциальная энергия}). \end{aligned} \quad (111)$$

Среднее за большой период времени от первого слагаемого в левой части (111) равно нулю, если частицы остаются неограниченно долго внутри некоторого ограниченного объема, и мы приходим к следующему равенству:

$\langle \text{полная кинетическая энергия} \rangle = - \frac{1}{2} \langle \text{полная потенциальная энергия} \rangle \quad (112)$

для системы материальных точек, движущихся в ограниченной части пространства под действием электростатических или гравитационных сил.

Когда эти материальные точки заключены в каком-либо сосуде, то от действия на них стенок сосуда возникают дополнительные силы, не учитывающиеся при этом выводе и изменяющие вид формулы (112), иногда совсем незначительно. Результат, выражаемый формулой (112), остается верным даже в тех случаях, когда при описании состояния системы материальных точек следует учитывать и квантовые поправки. Теорема о вириале сохраняет силу как для взаимодействия электронов и атомных ядер в молекулах или кристаллах, так и для взаимодействия между атомами, образующими звезду, или между звездами, образующими галактику.

Из теоремы о вириале в ее общем виде (112) следует не только то, что материальные точки, связанные между собой силами, действующими по закону обрат-

\*) Половина среднего по времени значения этой двойной суммы, взятая с обратным знаком, называется *вириалом* системы материальных точек, между которыми действуют силы, подчиняющиеся закону обратных квадратов. (Прим. ред.)

ных квадратов, должны иметь кинетическую энергию, но и то, что кинетическая и потенциальная энергии такой системы всегда сравнимы по величине. Даже если часть материальных точек в начальный момент не движется, силы притяжения, величина которых обратно пропорциональна квадрату расстояния, сближают эти точки друг с другом, увеличивая значение как потенциальной, так и кинетической энергии до тех пор, пока средняя кинетическая энергия не станет равной с обратным знаком половине средней потенциальной энергии. В приводимом ниже примере мы воспользуемся теоремой о вириале, чтобы оценить величину температуры внутри Солнца, представляющего собой, как почти все звезды, массу сжатого раскаленного газа.

Теорема о вириале служит ключом к пониманию строения любого вещества, в котором силы сцепления обусловлены главным образом притяжением частиц по закону обратных квадратов. Среднее расстояние между атомами или атомными ядрами в типичной звезде, по-видимому, всегда больше  $10^{-10}$  см, так как плотность такой звезды не превышает  $10^{-7}$  г/см<sup>3</sup>. Такие расстояния слишком велики для сильных ядерных взаимодействий, эффективных в пределах около  $10^{-13}$  см; поэтому только силы гравитационного притяжения соединяют звезду в единое целое.

П р и м е р. *Температура внутри Солнца.* Оценим величину средней температуры внутри Солнца. Собственная гравитационная энергия  $U_C$  однородной звезды массой  $M_C$  и радиусом  $R_C$ , согласно расчету, произведенному выше, равна

$$U_C = -\frac{3GM_C^2}{5R_C}. \quad (113)$$

Средняя кинетическая энергия одного атома пропорциональна \*) абсолютной температуре  $T$ :

$$\langle \text{кинетическая энергия материальной точки} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (114)$$

где постоянная  $k$  (постоянная Больцмана) равна

$$k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град К.} \quad (115)$$

Суммарная кинетическая энергия всех атомов звезды равна  $\frac{3}{2} NkT_{\text{ср}}$ , где  $T_{\text{ср}}$  — средняя температура внутри звезды. Используя уравнение (113), можно получить на основании теоремы о вириале:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} NkT_{\text{ср}} &= \langle \text{кинетическая энергия всех атомов} \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \langle \text{потенциальная энергия Солнца} \rangle \approx \frac{3GM_C^2}{10R_C}. \end{aligned} \quad (116)$$

Таким образом,

$$T_{\text{ср}} \approx \frac{GM_C^2}{5R_C Nk} = \frac{GM_C M}{5R_C k}, \quad (117)$$

где  $M = M_C/N$  — средняя масса одного атома. Большинство атомов в звезде — это атомы водорода или гелия.

Масса Солнца  $M_C$  равна приблизительно  $2 \cdot 10^{33}$  г, а его радиус  $R_C$  — приблизительно  $7 \cdot 10^{10}$  см. Примем  $M$  равной  $3 \cdot 10^{-24}$  г, т. е. примерно удвоенной массе протона \*\*).

\*) Это соотношение обычно называется в курсах физики *законом равномерного распределения энергии* по степеням свободы, впервые сформулированным Больцманом. Мы подробно обсудим его в т. V. При очень больших плотностях уравнение (114) не всегда справедливо, так как в нем не учитываются квантовые эффекты; но оно должно выполняться при условиях, существующих внутри большинства горячих звезд.

\*\*) Содержание водорода в составе Солнца оценивается примерно в 60% по массе. Большая часть остального вещества — это гелий; имеется еще немного кислорода и следы других элементов.



Тогда из уравнения (117) получаем

$$T_{\text{ср}} \approx \frac{(7 \cdot 10^{-8}) (2 \cdot 10^{33}) (3 \cdot 10^{-24})}{5 (7 \cdot 10^{10}) (1 \cdot 10^{-16})} \approx 10^7 \text{ }^\circ\text{K}. \quad (118)$$

Эта температура соответствует энергии порядка  $10^8$  эв, достаточной для полной ионизации атомов с малым атомным номером. Но если атомы водорода и гелия ионизованы, то общее число частиц  $N$  надо увеличить, прибавив к нему число свободных электронов, и, как следует из уравнения (117), средняя температура окажется в 2—3 раза ниже значения, полученного в (118). Имеются данные, что Солнце не изотермично во всем его объеме, т. е. не находится при постоянной температуре. Тем не менее результат нашей оценки близок к тому, что получается при более обоснованных расчетах средней температуры ядра Солнца. Температура на его поверхности намного ниже: как показывает подсчет по величине потока излучения, испускаемого Солнцем, эта температура составляет около  $6 \cdot 10^3$  °K. Наш результат (118) для средней температуры Солнца более чем в  $10^3$  раз превышает визуально оцениваемую температуру его поверхности.

Этот замечательный результат выведен нами на основании немногих теоретических предпосылок и совсем малого количества экспериментальных данных, для получения которых вовсе не надо было удаляться с Земли. Мы не в состоянии заглянуть внутрь Солнца, и все-таки мы можем рассчитать с известной степенью достоверности существующие там температурные условия. Есть еще один способ независимой оценки температуры ядра Солнца — расчет ее по величине суммарного потока солнечного излучения, зависящей от скорости «выгорания» ядерного горючего \*) внутри Солнца.

**Пример. Сжатие галактик.** Предположим, что какая-то туманность состоит из частиц, между каждой парой которых действуют силы тяготения, и что эта система обладает значительной кинетической энергией, как-то распределенной между частицами. При каких условиях туманность будет расширяться или сжиматься или сохранять те же средние размеры?

Из закона сохранения энергии следует такое соотношение между кинетической и потенциальной энергией системы:

$$E = K + U. \quad (119)$$

Характер изменения размеров туманности зависит от соотношения начальных абсолютных величин положительной кинетической энергии  $K$  и всегда отрицательной потенциальной энергии  $U$ .

а) Если  $K > |U|$ , то полная энергия  $E > 0$  и туманность (или по крайней мере часть ее) должна неограниченно расширяться. Эта туманность расширится, потому что в противном случае при данном исходном предположении ( $K > |U|$ ) нарушалась бы теорема о вириале. Действительно, если бы туманность оставалась внутри некоторого конечного объема, то должно было бы выполняться уравнение (112) теоремы о вириале. Согласно этой теореме  $\langle U \rangle = -2\langle K \rangle$ , и, таким образом,

$$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle = -\langle K \rangle \leq 0, \quad (120)$$

где угловыми скобками обозначены величины, средние по времени. Однако полная энергия замкнутой системы не зависит от времени, т. е. всегда  $E = \langle E \rangle$ , и, следовательно, согласно (120)  $E \leq 0$ . Этот результат противоречит исходному предположению, что  $K > |U|$ . Таким образом, доказано, что туманность не может оставаться в пределах конечного объема, т. е. она расширяется.

б) Если  $K < |U|$ , то  $E < 0$  и совокупность частиц, образующих туманность, не может неограниченно расширяться. При бесконечно больших расстояниях между телами потенциальная энергия обращается в нуль и вся энергия системы становится кинетической, т. е. положительной. Если в начальный момент полная энергия была отрицательной, то потенциальная энергия не может обратиться в нуль сразу для всех тел, входящих в систему, хотя, в зависимости от начальных условий, некоторые из них все же могут удалиться на бесконечно большое расстояние.

\*) Этот процесс представляет собой термоядерную реакцию. (Прим. ред.)

Следует ожидать, что такое скопление тел должно сохранять известную компактность, потому что для значений энергии, средних по времени, должна выполняться теорема о вириале. Ниже мы доказываем, что любая достаточно большая газообразная туманность, для которой  $E < 0$ , должна в конце концов сконденсироваться, образовав звезду. Это утверждение отнюдь не является бесспорным доказательством, что звезды образовались вследствие сжатия туманностей, но делает весьма правдоподобной именно такую возможность их возникновения.

*Следствия потери энергии на излучение.* Нагретые тела отдают энергию в форме электромагнитного излучения. При понижении температуры интенсивность излучения уменьшается, но не обращается в нуль, если не равна нулю абсолютная температура. Однако газовая туманность, соединяемая воедино силами гравитационного притяжения, не может достигнуть нулевой температуры. В действительности, когда туманность излучает энергию, ее температура даже возрастает.

Этот парадоксально звучащий вывод непосредственно следует из теоремы о вириале и из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. Согласно (120) между величинами полной энергии и средней по времени кинетической энергии, существует следующее соотношение:

$$E = - \langle K \rangle, \quad (121)$$

а из уравнения (114), выражающего закон равномерного распределения энергии по степеням свободы, следует, что для материальных точек, находящихся в термическом равновесии при температуре  $T$ ,

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} NkT. \quad (122)$$

Таким образом,

$$E = - \frac{3}{2} NkT, \quad T = - \frac{2}{3Nk} E. \quad (123)$$

Изменение энергии на величину  $\Delta E$  вызывает изменение температуры  $\Delta T$ , равное, согласно (123),

$$\Delta T = - \frac{2}{3Nk} \Delta E. \quad (124)$$

Если  $\Delta E$  отрицательно из-за потерь энергии на излучение, то  $\Delta T$  должно быть положительным. Далее, согласно теореме о вириале при уменьшении  $E$  должны возрастать величины  $\langle K \rangle$  и  $\langle U \rangle$ . Увеличение  $\langle U \rangle$  означает, что усиливается гравитационное взаимодействие частиц, а это может произойти только при сжатии туманности. По той же причине должна увеличиваться кинетическая энергия искусственного спутника, когда из-за сопротивления атмосферы уменьшается высота его полета над Землей.

Если энергия затрачивается на излучение, то туманность постепенно сжимается и становится еще более горячей, т. е. ее средняя температура возрастает тем быстрее, чем быстрее она излучает энергию и при этом сжимается. Уравнение (117) показывает, как связана уменьшающаяся величина радиуса звезды  $R_{зв}$  с ее возрастающей средней температурой  $T_{ср}$ . В конце концов эта температура становится настолько высокой, что могут начаться ядерные реакции\*). Когда главным источником энергии становятся ядерные реакции, гравитационное сжатие звезды замедляется или совсем прекращается, потому что увеличение давления излучения противодействует дальнейшему сжатию звездного вещества. Таково нынешнее состояние нашего Солнца. Приблизительно через  $7 \cdot 10^9$  лет, когда в результате термоядерного «горения» большая часть водорода Солнца превратится в гелий,

\*) Чтобы произошла ядерная реакция, два атомных ядра должны хоть на мгновение сблизиться до расстояний порядка  $10^{-13}$  см. Кулоновское отталкивание между ядрами удерживает их на значительно больших расстояниях друг от друга, за исключением тех случаев, когда  $T > 10^7$  °К для протонов и  $T > 10^8$  °К для ядер атомов гелия. Пользуясь квантовой теорией, можно произвести количественный расчет этих температур «зажигания» термоядерной реакции.

опять начнется сжатие и возобновится процесс постепенного повышения средней температуры внутри Солнца \*).

Любая достаточно большая газовая туманность, соединенная в одно целое собственным взаимным гравитационным притяжением, превратится в ходе эволюции в звезду или в несколько звезд; это является необходимым следствием того факта, что зависимость сил притяжения от расстояния подчиняется закону обратных квадратов.

Теперь, ограничиваясь умозрительными доводами, попытаемся использовать наши представления о характере гравитационного притяжения для ответа на вопрос, почему звезды группируются в галактики. *Тут мы располагаем значительно менее надежной базой*, чем в наших предыдущих рассуждениях. Типичная галактика состоит примерно из  $10^9$ — $10^{11}$  звезд (рис. 9.29). Попытаемся обобщить удачную и бесспорно правильную модель эволюции звезды на значительно менее

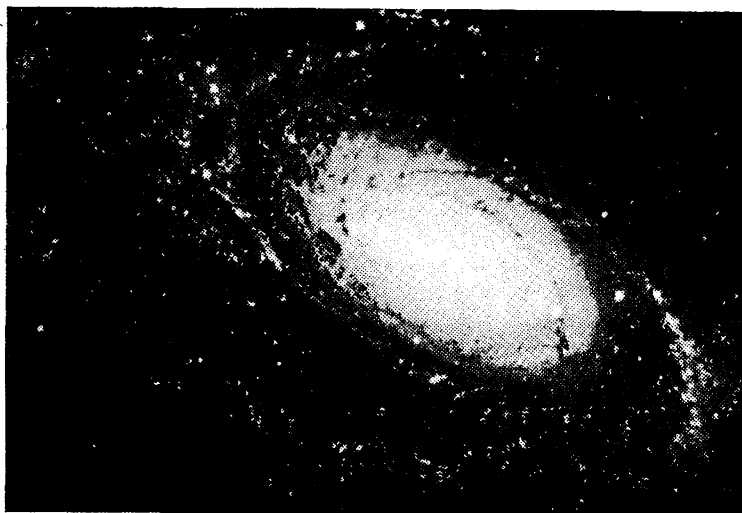


Рис. 9.29. Спиральная галактика М81. (Фото Ликской обсерватории.)

понятную проблему происхождения галактик. Это обобщение является смелым и дерзким, а его стиль типичен для первых попыток объяснения малопонятных явлений исходя из известных физических законов. Большая часть открытий в области точных наук как раз отличается смелыми приближениями, упрощениями, экстраполяциями.

Исходя из того факта, что любая масса газа сжимается, если абсолютная величина ее потенциальной энергии значительно превосходит величину кинетической энергии, мы пришли к выводу, что любая достаточно большая масса газа, однородная по температуре и плотности, является гравитационно неустойчивой. Различные части этой массы начнут независимо друг от друга сжиматься, образуя

\*) Если на какой-то стадии эволюции звезды больше не выполняется уравнение (114), то эти качественные соображения теряют силу, потому что средняя кинетическая энергия одноатомной молекулы уже не равна  $\frac{3}{2} kT$ . В нормальных твердых и жидких веществах группа частиц, движущихся в ограниченной области пространства под действием сил притяжения, может перестать излучать и перестать сжиматься, когда становятся преобладающими квантовомеханические свойства системы. В тт. IV и V мы познакомимся с методами оценки характера и значения этих квантовых особенностей в различных условиях.

большие скопления, если ее потенциальная энергия превосходит удвоенную внутреннюю кинетическую энергию. Типичный радиус  $R$  такого скопления определяется из уравнения (117):

$$\frac{GM^2}{5R} \approx NkT, \quad (125)$$

где  $N$  — число частиц, образующих скопление, а  $M$  — масса скопления. Для того случая, когда скопление сжимается, а не находится в установившемся состоянии, описываемом теоремой о вириале, надо поставить в (125) знак  $>$ . Если предположить, что газ полностью состоит из водородных атомов, имеющих массу  $M_H$  каждый, то  $M = NM_H$ . Мы можем также написать:  $M = (4\pi/3)R^3 n M_H$ , где  $n$  — концентрация водородных атомов. Следовательно, можно переписать (125) в виде такого неравенства:

$$R^2 > \frac{kT}{GnM_H^2}, \quad (126)$$

где нами опущены все числовые множители порядка единицы, так как проводимый расчет имеет характер приближенной оценки.

Из неравенства (126) мы получаем следующий замечательный результат. Достаточно большой объем газа, состоящего из водородных атомов, равномерно-распределенных с плотностью, сравнимой с плотностью газа в межгалактическом пространстве, должен самопроизвольно уплотняться, образуя отдельные скопления, сравнимые по массам с галактиками. Оценка величин концентрации и температуры межгалактического водорода дает  $n \approx 10^{-5} \text{ см}^{-3}$  и  $T \approx 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ . Чтобы туманность могла сжиматься, ее радиус должен удовлетворять неравенству (126):

$$R^2 > \frac{10^{-16} \cdot 10^4 \text{ см}^2}{10^{-7} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-48}} \approx \frac{10^{-12}}{10^{-60}} \text{ см}^2 \approx 10^{48} \text{ см}^2, \quad (127)$$

или  $R > 10^{24} \text{ см}$ . Масса туманности такого радиуса равна

$$M \approx (10^{24})^3 \cdot (10^{-5}) \cdot (10^{-24}) \approx 10^{43} \text{ г}. \quad (128)$$

Из наблюдений известно, что расстояния между галактиками имеют величину порядка  $3 \cdot 10^{24} \text{ см}$ , т. е. порядка их начального радиуса, приближенно рассчитанного в виде (127). Радиус нашей Галактики имеет порядок  $10^{23} \text{ см}$ . Масса Солнца равна  $2 \cdot 10^{33} \text{ г}$ , так что та минимальная масса, которую, согласно нашему расчету, должна иметь самопроизвольно сжимающаяся газовая туманность, весьма приближенно составляет  $5 \cdot 10^9$  солнечных масс. Оценочные значения масс галактик, полученные главным образом по измерениям их светимости, в большинстве случаев находятся в пределах между  $10^9$  и  $10^{11}$  солнечных масс. Это удовлетворительно согласуется с предположением, что галактики возникли в результате самопроизвольного сжатия, вызванного тяготением, действующим в массах газа, занимавших огромные объемы, подобно тому газу, который все еще может существовать в межгалактическом пространстве. Условия, возможно, существующие внутри сжимающихся масс галактического газа, могли бы в дальнейшем способствовать также образованию звезд внутри галактик, причем механизм последнего процесса немалого отличался бы от того механизма, который привел к образованию самого галактического скопления.

Читатель должен заметить, что мы не дали здесь детальной и логически цельной динамической теории образования галактик, происходящего как следствие сжатия однородного газа. Мы только построили оценочную гипотезу, которая позволила получить для массы одной галактики и расстояния между галактиками числовые значения, не противоречащие данным астрофизических наблюдений. Это соответствие порядка величин может означать одно из двух: или физическое обоснование сделанных оценок в основном правильно, или мы являемся жертвами случайного совпадения. Мы не предложили никакого объяснения причин однородного распределения газа. Кроме того, приведенные нами доводы могут оказаться несостоятельными, если справедлива гипотеза о расширяющейся Вселенной, потому что уменьшение кинетической энергии молекул газа при его расширении может воспрепятствовать сжатию газовых масс.

## Дополнение 2. Числовой расчет орбиты

Приводимый пример взят дословно из лекций Р. Фейнмана по общей физике \*). Эти лекции одного из крупнейших физиков-теоретиков нашего времени отличаются глубоким содержанием, оригинальностью и занимательностью. Их чтение доставит удовольствие студенту.

«...Но можно ли таким же путем вычислять движение планеты вокруг Солнца? Давайте посмотрим, можно ли при некоторых приближениях получить эллиптическую орбиту. Предположим, что Солнце бесконечно тяжелое в том смысле, что его движение не будет приниматься в расчет.

Допустим, что в известной точке планета начала свое движение и имеет определенную скорость. Она движется вокруг Солнца по какой-то кривой, и мы попытаемся определить с помощью уравнений движения Ньютона и его же закона всемирного тяготения, что это за кривая. Как это сделать? В некоторый момент времени планета находится в каком-то определенном месте, на расстоянии  $r$  от Солнца; в этом случае известно, что на нее действует сила, направленная по прямой к Солнцу, которая, согласно закону тяготения, равна определенной постоянной, умноженной на произведение масс планеты и Солнца и деленной на квадрат расстояния между ними. Чтобы рассуждать дальше, нужно выяснить, какое ускорение вызывает эта сила.

Однако, в отличие от предыдущей задачи, нам потребуются теперь *компоненты* ускорения в двух направлениях, которые мы назовем  $x$  и  $y$ . Положение планеты в данный момент будет определяться координатами  $x$  и  $y$ , поскольку третья координата  $z$  всегда равна нулю.

Действительно, координатная плоскость  $xy$  выбрана нами таким образом, что  $z$ -компоненты как силы, так и начальной скорости равны нулю, а поэтому нет никаких причин, которые бы заставили планету выйти из этой плоскости. Сила при этом будет направлена по линии, соединяющей планету с Солнцем, как это показано на рис. 9.30.

Из этого рисунка видно, что горизонтальная компонента силы так относится к полной ее величине, как координата  $x$  относится к расстоянию  $r$ . Это сразу следует из подобия треугольников. Кроме того, если  $x$  положительна, то  $F_x$  отрицательна, и наоборот.

Таким образом,  $F_x/|F| = -x/r$ , или  $F_x = -|F| \cdot x/r = -GMmx/r^3$  и соответственно  $F_y = -GMmy/r^3$ . Теперь можно воспользоваться динамическими законами и написать, что  $x$ - или  $y$ -компонента ускорения, умноженная на массу планеты, равна соответственно  $x$ - или  $y$ -компоненте силы:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GMmx}{r^3}, \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GMmy}{r^3}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Это именно та система уравнений, которую мы должны решить. Для того чтобы упростить вычисления, предположим, что либо единицы измерения времени или массы выбраны соответствующим образом, либо нам просто повезло, словом, получилось так, что  $GM=1$ . Для нашего случая предположим, что в начальный момент  $t=0$  планета находилась в точке с координатами  $x=0,500$  и  $y=0,000$ , а скорость

\*) Русский перевод: Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, вып. 1, «Мир», 1965, стр. 167—173. (Прим. ред.)

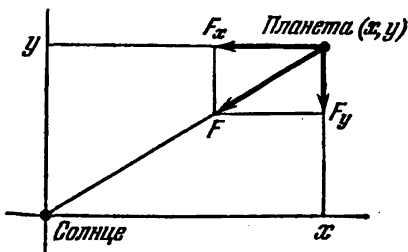


Рис. 9.30. Сила притяжения, действующая на планету.

ее в этот момент была направлена параллельно оси  $y$  и равна 1,6300. Как же в этом случае делаются расчеты? Снова составляется таблица со столбцами для времени  $t$ , координаты  $x$ ,  $x$ -компонент скорости  $v_x$  и ускорения  $a_x$ . Затем идут отдельные чертой три колонки: для координаты  $y$ ,  $y$ -компонент скорости и ускорения. Однако для того, чтобы подсчитать ускорение, мы должны воспользоваться уравнениями (129), согласно которым его компоненты равны  $-x/r^3$  и  $-y/r^3$ , а  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Так что, получив  $x$  и  $y$ , мы должны где-то в сторонке провести небольшие вычисления — извлечь квадратный корень из суммы квадратов и получить расстояние. Удобно также отдельно вычислять и  $1/r^3$ .

После этого все готово, чтобы определить компоненты ускорения. Всю эту работу можно сильно облегчить, если пользоваться таблицами квадратов, кубов и обратных величин. На нашу долю останется тогда только умножение  $x$  на  $1/r^3$ , которое легко выполняется на логарифмической линейке.

Перейдем к дальнейшему. Возьмем интервал времени  $\epsilon = 0,100$ . В начальный момент  $t=0$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0,500, & y(0) &= 0,000, \\ v_x(0) &= 0,000, & v_y(0) &= +1,630. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} r(0) &= 0,500, & 1/r^3 &= 8,000, \\ a_x &= -4,000, & a_y &= 0,000. \end{aligned}$$

После этого можно вычислять компоненты  $v_x(0,05)$  и  $v_y(0,05)$ :

$$\begin{aligned} v_x(0,05) &= 0,000 - 4,000 \cdot 0,050 = -0,200, \\ v_y(0,05) &= 1,630 + 0,000 \cdot 0,050 = 1,630. \end{aligned}$$

А теперь начнем наш основной расчет:

$$\begin{aligned} x(0,1) &= 0,500 - 0,200 \cdot 0,1 = 0,480, \\ y(0,1) &= 0,000 + 1,630 \cdot 0,1 = 0,163, \\ r &= \sqrt{(0,480)^2 + (0,163)^2} = 0,507, \\ \frac{1}{r^3} &= 7,67, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x(0,1) &= -0,480 \cdot 7,67 = -3,68, \\ a_y(0,1) &= -0,163 \cdot 7,67 = -1,250, \\ v_x(0,15) &= -0,200 - 3,68 \cdot 0,1 = -0,568, \\ v_y(0,15) &= 1,630 - 1,26 \cdot 0,1 = 1,505, \\ x(0,2) &= 0,480 - 0,568 \cdot 0,1 = 0,423, \\ y(0,2) &= 0,163 + 1,50 \cdot 0,1 = 0,313 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

В результате мы получим числа, приведенные в таблице, где приблизительно в 20 точках прослежена половина пути нашей планеты вокруг Солнца. На рис. 9.31

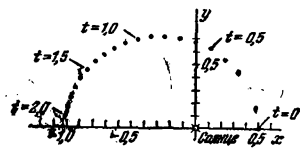


Рис. 9.31. Результаты расчета движения планеты вокруг Солнца.

отложены координаты планеты  $x$  и  $y$ , приведенные в таблице. Точки представляют собой последовательные положения планеты через каждую десятую долю выбранной нами единицы времени. Видно, что сначала она двигалась быстро, а затем — все медленней и медленней. Видна также и форма кривой движения планеты. Итак, вы теперь знаете, как практически можно вычислять движение планет!

Давайте посмотрим теперь, как вычислить движение Нептуна, Юпитера, Урана и остальных планет. Можно ли сделать подобные расчеты для большого числа планет, учитывая к тому же и движение Солнца? Разумеется можно. Найдите сначала силу, действующую на каждую планету, например на ту, которую мы обозначили номером  $i$  и координаты которой  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$  ( $i=1$  может означать Солнце,  $i=2$  — Меркурий,  $i=3$  — Венеру и т. д.). Наша задача — найти координаты всех планет. По закону тяготения  $x$ -компонента силы,

### Определение пути планеты вокруг Солнца

Решение системы уравнений  $dv_x/dt = -x/r^3$ ,  $dv_y/dt = -y/r^3$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Интервал  $\varepsilon = 0,100$ .

При  $t=0$   $v_y = 1,63$ ,  $v_x = 0$ ,  $x = 0,5$ ,  $y = 0$ .

$t$	$x$	$v_x$	$a_x$	$y$	$v_y$	$a_y$	$r$	$1/r^2$
0,0	0,500	-0,200	-4,00	0,000	1,630	0,00	0,500	8,000
0,1	0,480	-0,568	-3,68	0,163	1,505	-1,25	0,507	7,675
0,2	0,423	-0,859	-2,91	0,313	1,290	-2,15	0,526	6,873
0,3	0,337	-1,055	-1,96	0,442	1,033	-2,57	0,556	5,824
0,4	0,232	-1,166	-1,11	0,545	0,771	-2,62	0,592	4,81
0,5	0,115	-1,211	-0,453	0,622	0,526	-2,45	0,633	3,942
0,6	-0,006	-1,209	+0,020	0,675	0,306	-2,20	0,675	3,252
0,7	-0,127	-1,175	+0,344	0,706	0,115	-1,91	0,717	2,712
0,8	-0,245	-1,119	+0,562	0,718	-0,049	-1,64	0,758	2,296
0,9	-0,357	-1,048	+0,705	0,713	-0,190	-1,41	0,797	1,975
1,0	-0,462	-0,968	+0,796	0,694	-0,310	-1,20	0,834	1,723
1,1	-0,559	-0,882	+0,858	0,663	-0,412	-1,02	0,867	1,535
1,2	-0,647	-0,792	+0,90	0,622	-0,499	-0,86	0,897	1,385
1,3	-0,726	-0,700	+0,92	0,572	-0,570	-0,72	0,924	1,267
1,4	-0,796	-0,607	+0,93	0,515	-0,630	-0,60	0,948	1,173
1,5	-0,857	-0,513	+0,94	0,452	-0,680	-0,50	0,969	1,099
1,6	-0,908	-0,418	+0,95	0,384	-0,720	-0,40	0,986	1,043
1,7	-0,950	-0,323	+0,95	0,312	-0,751	-0,31	1,000	1,000
1,8	-0,982	-0,228	+0,95	0,237	-0,773	-0,23	1,010	0,970
1,9	-1,005	-0,113	+0,95	0,160	-0,778	-0,15	1,018	0,948
2,0	-1,018	-0,037	+0,96	0,081	-0,796	-0,08	1,021	0,939
2,1	-1,022	+0,058	+0,95	0,001	-0,796	0,00	1,022	0,936
2,2	-1,016		+0,96	-0,079	-0,789	+0,07	1,019	0,945
2,3								

Ось  $x$  пересекается в момент 2,101 сек, период обращения равен 4,20 сек. В момент 2,086 сек компонента скорости  $v_x = 0$ . Орбита пересекается с осью  $x$  при  $x = 1,022$ . Длина большой полуоси равна  $\frac{1,022 + 0,500}{2} = 0,761$ ,  $v_y = 0,796$ . Предсказываемое время полуоборота равно  $\pi(0,761)^{3/2} = 0,663\pi = 2,082$ .

действующая на  $i$ -ю планету со стороны планеты номер  $j$  с координатами  $x_j, y_j$  и  $z_j$ , будет равна  $-Gm_i m_j (x_i - x_j)/r_{ij}^3$ . Если же учесть силы со стороны всех планет, то получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{dv_{ix}}{dt} &= \sum_{j=1}^N \left[ -\frac{Gm_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3} \right], \\ m_i \frac{dv_{iy}}{dt} &= \sum_{j=1}^N \left[ -\frac{Gm_i m_j (y_i - y_j)}{r_{ij}^3} \right], \\ m_i \frac{dv_{iz}}{dt} &= \sum_{j=1}^N \left[ -\frac{Gm_i m_j (z_i - z_j)}{r_{ij}^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

где  $r_{ij}$  — расстояние между  $i$ -й и  $j$ -й планетами:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad (131)$$

а  $\Sigma'$  означает суммирование по всем остальным планетам, т. е. по всем значениям  $j$ , за исключением, конечно,  $j=i$ . Таким образом, чтобы решить это уравнение, нужно лишь значительно увеличить количество столбцов в нашей таблице. Для движения Юпитера понадобится девять столбцов, для Сатурна — тоже девять и т. п. Если нам заданы все начальные положения и скорости, то из уравнений (130) можно подсчитать все ускорения, вычислив, конечно, предварительно по формуле (131) все расстояния  $r_{ij}$ . А сколько же времени потребуется на все эти вычисления? Если вы будете делать их сами дома, то очень много! Однако сейчас уже имеются машины, чрезвычайно быстро выполняющие все арифметические расчеты. Сложение, например, такая машина выполняет за 1 *мксек*, т. е. за одну миллионную долю секунды, а умножение — за 10 *мксек*. Так что если один цикл расчетов состоит из 30 операций умножения, то это займет всего лишь 300 *мксек*, или за 1 *сек* можно сделать 3000 циклов. Если мы хотим считать с точностью до одной миллиардной, то для того, чтобы покрыть все время обращения планеты вокруг Солнца, требуется  $4 \cdot 10^6$  циклов. (Оказывается, что ошибка в расчетах приблизительно пропорциональна квадрату  $\epsilon$ . Если брать интервал в тысячу раз меньший, то ошибка уменьшится в миллион раз. Так что для обеспечения нашей точности нужно взять интервал в 10 000 раз меньше.) На машине это займет 130 *сек*, или около 2 *мин*. Всего лишь 2 *мин* для того, чтобы «прогнать» Юпитер вокруг Солнца и при этом еще с точностью до одной миллиардной учесть все возмущения от других планет!

Итак, в начале этой главы для вас были загадкой движения грузика на пружинке, однако теперь, вооруженные таким мощным орудием, как законы Ньютона, вы можете вычислять не только такие простые явления, как качание грузика, но и чрезвычайно сложные движения планет, причем с любой желаемой точностью! Нужна только машина, знающая арифметику».



## ГЛАВА 10

### СКОРОСТЬ СВЕТА

#### 10.1. Скорость света $c$ как одна из основных физических постоянных

Скорость света \*) в вакууме  $c$  считается одной из основных физических постоянных.

1.  $c$  — это скорость распространения электромагнитного излучения в свободном от вещества пространстве, и ее величина не зависит от частоты излучения.

2. Никаким способом в пространстве, свободном от вещества или заполненном веществом, невозможно передать сигнал со скоростью, превышающей скорость света  $c$ .

3. Величина скорости света в свободном от вещества пространстве не зависит от того, относительно какой системы отсчета она определяется. Если в результате наблюдения оказалось, что в одной из инерциальных систем отсчета скорость света равна  $c = 2,99793 \cdot 10^{10}$  см/сек, то, как показывает опыт, в другой инерциальной системе отсчета, движущейся параллельно направлению распространения светового сигнала со скоростью  $V$  относительно первой системы, скорость света равна  $c$ , а не  $c+V$  или  $c-V$ .

4. Величина скорости света входит в уравнения электромагнитной теории Максвелла и в уравнение для определения величины силы Лоренца, если все эти уравнения выражены в гауссовой системе единиц.

5. Скорость света входит в безразмерную постоянную, обратную постоянной тонкой структуры:

$$\frac{\hbar c}{e^2} \cong 137,04,$$

---

\*) Заметим, что выражение «*скорость света*» всегда следует понимать как скорость света ( $c$ ) в свободном от вещества пространстве, если ясно не оговорено обратное. Скорость света в материальной среде всегда меньше  $c$  и может быть даже меньше, чем скорость движения заряженной частицы в той же среде (движение заряженных частиц в материальной среде со скоростью, превышающей скорость света в этой среде, называется эффектом Черенкова).

где  $2\pi\hbar$  — постоянная Планка, а  $e$  — заряд протона. Постоянная тонкой структуры играет важную роль в атомной физике и будет рассмотрена в т. IV. Мы не располагаем теорией, которая предсказывала бы величину этой постоянной.

В этой главе рассматриваются главным образом эксперименты и экспериментальные результаты. Мы разберем способы измерения скорости света и экспериментального подтверждения инвариантности ее величины в любой инерциальной системе отсчета. Мы не будем здесь обсуждать вопросы об электромагнитной природе света и о законах его распространения в рефракционных и дисперсионных средах\*), как, например, в твердых и жидких веществах. Эти вопросы изложены в т. III.

## 10.2. Измерение $c$

Для определения скорости света применялись многие методы\*\*). Здесь мы перечисляем и кратко описываем некоторые из них.

*Время прохождения светом диаметра орбиты Земли.* Предположение, что скорость света должна иметь конечную величину, было сделано за много столетий до того, как люди смогли доказать

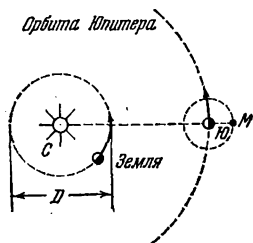


Рис. 10.1. Затмение спутника (М) Юпитера происходит тогда, когда Юпитер (Ю) находится между Солнцем (С) и спутником. Это происходит примерно через каждые 42 часа, в течение которых спутник М совершает оборот вокруг Юпитера.

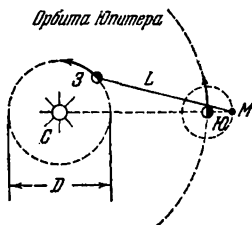


Рис. 10.2. На Земле (З) затмение наблюдается с запаздыванием на время  $\Delta t = L/c$  после фактического затмения, потому что скорость света  $c$  имеет конечную величину.

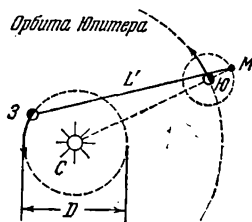


Рис. 10.3. Затмение, наблюдаемое на Земле через 6 месяцев. Теперь  $L' \approx L + D$ , так что  $\Delta t' \approx L/c + D/c = \Delta t + D/c$ . Рёмер 1676 г. измерил  $\Delta t + \Delta t'$  и использовал также принятое в его время значение  $D$  для определения  $c$ .

это экспериментально. Первое экспериментальное подтверждение конечности величины скорости света было дано Рёмером в 1676 г. Он обнаружил, что движение Ио, крупнейшего спутника Юпитера, совершается не совсем регулярно по времени. Было установлено,

\*) Среда, показатель преломления которой не равен в точности единице, называется *рефракционной*. Если показатель преломления среды зависит от частоты, то такая среда называется *дисперсионной*.

\*\*\*) Прекрасный обзор методов измерения скорости света дан на английском языке Бергстрандом в «Handbuch d. Physik» под ред. S. Flügge, т. 24, стр. 1—43 (Berlin, Springer-Verl., 1956). Значения  $c$ , которые мы приводим, взяты из таблицы Бергстранда. См. также J. F. Milligan, D. F. M. c. Donald, Am. J. Phys. 25, 180 (1957).

что нарушается периодичность затмений Ио Юпитером. За полгода наблюдения нарушения периодичности наблюдаемого начала затмения Ио Юпитером возрастали, достигая величины около 20 мин. Но это почти равно времени, за которое свет проходит расстояние, равное диаметру орбиты движения Земли вокруг Солнца. Средний диаметр  $D$  этой орбиты составляет около  $3 \cdot 10^{13}$  см (2 а. е.) \*); время, необходимое для того, чтобы свет дошел с одной стороны орбиты на противоположную, равно

$$T = \frac{D}{c} \approx \frac{3 \cdot 10^{13}}{3 \cdot 10^{10}} \text{сек} \approx 1000 \text{сек} \approx 17 \text{мин}, \quad (1)$$

что хорошо согласуется со значением времени прохождения 16,6 мин, полученным на основании проводимых в настоящее время фотометрических наблюдений тех же затмений Ио. В нашем расчете мы приняли для скорости света величину  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек.

Рёмер установил при наблюдении затмений, что время прохождения светом диаметра орбиты Земли равно 22 мин; значение этого диаметра было взято им из других источников, и притом неточное. Из расчета по этим данным он получил следующую величину скорости света:

$$c = 214\,300 \text{ км/сек}. \quad (2)$$

Угловая скорость обращения Юпитера вокруг Солнца меньше, чем угловая скорость обращения Земли (периоды обращения равны соответственно 12 годам и 1 году); следовательно, результат расчета зависит главным образом от диаметра орбиты Земли, а не Юпитера. Метод Рёмера был не очень точен, но именно его расчет показал астрономам, что для определения истинного движения планет и их спутников, производимого на основании измерений наблюдаемого движения планет, необходимо учитывать время распространения светового сигнала.

*Аберрация света звезд.* В 1725 г. Джеймс Бредли начал интересную серию точных определений кажущихся сезонных изменений положения звезд, в частности звезды  $\gamma$  Дракона. После введения всех необходимых поправок он обнаружил, что эта звезда, находящаяся в зените (т. е. непосредственно над головой), совершает кажущееся движение с периодом в один год по почти круговой орбите с диаметром 40,5 дуговой секунды. Для звезд, видимых в других местах небесного свода, Бредли также наблюдал подобное кажущееся движение — в общем случае эллиптическое.

Явление, наблюдавшееся Бредли, называется *абберацией*. Оно не имеет ничего общего с собственным движением звезды. Причина абберации заключается в том, что величина скорости света конечна, а наблюдение ведется с Земли, движущейся с некоторой скоростью по орбите вокруг Солнца. Фактически это был первый прямой опыт, показавший, что система отсчета, связанная с Солнцем, является

---

\* ) а. е. — астрономическая единица длины. (Прим. ред.)

более надежной в качестве инерциальной системы, чем система отсчета, связанная с Землей. Этот опыт подтверждает, что правильнее считать Землю движущейся вокруг Солнца, а не Солнце — вокруг Земли: при наблюдении аберрации непосредственно обнаруживается происходящее в течение года изменение направления скорости Земли относительно звезд.

Аберрацию проще всего можно объяснить, проведя аналогию между распространением света и падением дождевых капель (рис. 10.7). Когда нет ветра, капли падают вертикально и человек не промокнет, если он будет неподвижно стоять под зонтиком, держа

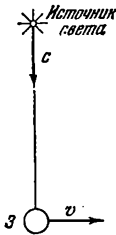


Рис. 10.4. В 1725 г. Бредли использовал явление аберрации света для определения  $c$ . Предположим, что свет от удаленного источника падает на объект  $Z$ , который движется со скоростью  $v$ , перпендикулярной к направлению падающего света.

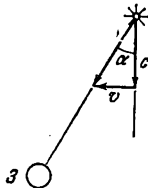


Рис. 10.5. Для наблюдателя, находящегося на Земле ( $Z$ ), свет имеет горизонтальную составляющую скорости  $v$  и вертикальную составляющую  $c$ . Следовательно, световой луч, идущий от источника, наклонен под углом  $\alpha$ , причем  $\operatorname{tg} \alpha = v/c$ .

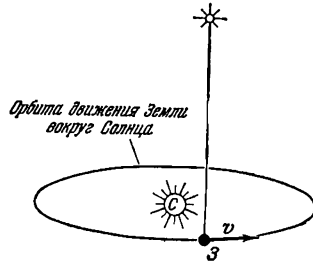


Рис. 10.6. Для определения  $c$  по измерению  $\alpha$  и известной величине скорости Земли ( $v_3 = 30 \text{ км/сек}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = v_3/c$ ) Бредли воспользовался светом от удаленной звезды, находящейся в зените.

его прямо над головой. Если человек побежит вперед, держа зонтик в том же положении, то его пальто промокнет спереди. Относительно движущегося человека дождевые капли уже не падают точно по вертикали.

Приведем интересный рассказ о том, каким образом Бредли нашел объяснение своим наблюдениям \*). «В конце концов, когда Бредли потерял надежду объяснить наблюдаемые им явления, ему вдруг пришло на ум удовлетворительное объяснение в тот момент, когда он и не искал его \*\*). Он участвовал в прогулке на паруснике по Темзе. Парусник, на котором находились участники прогулки, имел мачту с флюгером на ее верхушке. Дул умеренный ветер, и в течение значительного промежутка времени парусник двигался

\*) Т. Т h o m s o n, History of the Royal Society, London, 1812, p. 346.

\*\*\*) Многие изобретения и открытия были сделаны в тот момент, когда после неудачных попыток решений ученый, казалось бы, отвлекался от мыслей о решаемой проблеме. Выдающийся математик Адамар указывает на это явление в интересной и занимательной книге «An essay on the psychology of invention in the mathematical field» («Очерк о психологии открытий в области математики»), 2-е изд., Dover, New York, 1954.

то вверх, то вниз по реке. Доктор Бредли заметил, что каждый раз, когда парусник менял курс, флюгер на его мачте немного поворачивался, как будто бы слегка изменялось направление ветра. Он молча наблюдал это три или четыре раза и наконец обратился

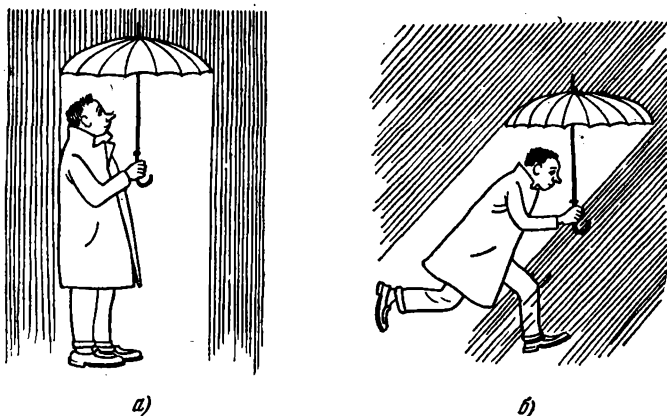


Рис. 10.7. Простой пример aberrации. Этот студент попал под вертикально идущий дождь. Если он будет неподвижно стоять под зонтиком, то останется сухим (а). Но если он побежит, то обязательно промокнет (б). В его новой системе отсчета капли дождя имеют горизонтальную составляющую скорости  $-v$ , где  $v$  — скорость студента относительно земли.

к матросам на паруснике, выразив свое удивление тем, что направление ветра регулярно меняется каждый раз, когда они меняют курс парусника. Матросы ответили ему, что ветер не меняет направление, а это кажущееся изменение вызвано переменной направления движения парусника, и заверили его, что такое явление неизменно происходит всегда. Это случайное наблюдение навело его [Бредли] на мысль, что астрономическое явление, так озадачившее его, вызвано сочетанием движения света с движением Земли».

Вот объяснение aberrации в том виде, как его дал Бредли \*): «Я рассмотрел это явление следующим образом. Я представил себе, что  $CA$  [рис. 10.8] — это луч света, падающий перпендикулярно на линию  $BD$ ; тогда, если глаз наблюдателя неподвижен и находится в точке  $A$ , то он будет видеть предмет в направлении  $AC$ , независимо от того, распространяется ли свет в течение какого-то времени или мгновенно. Но если наблюдатель движется в направлении от  $B$  к  $A$ , а свет распространяется за некоторое время со скоростью, которая относится к скорости наблюдателя, как  $CA$

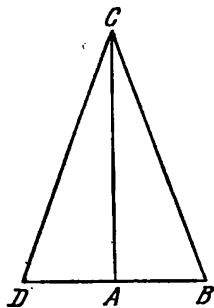


Рис. 10.8.

\*) J. Bradley, Phil. Trans. Roy. Soc., London, 35, 637 (1728).

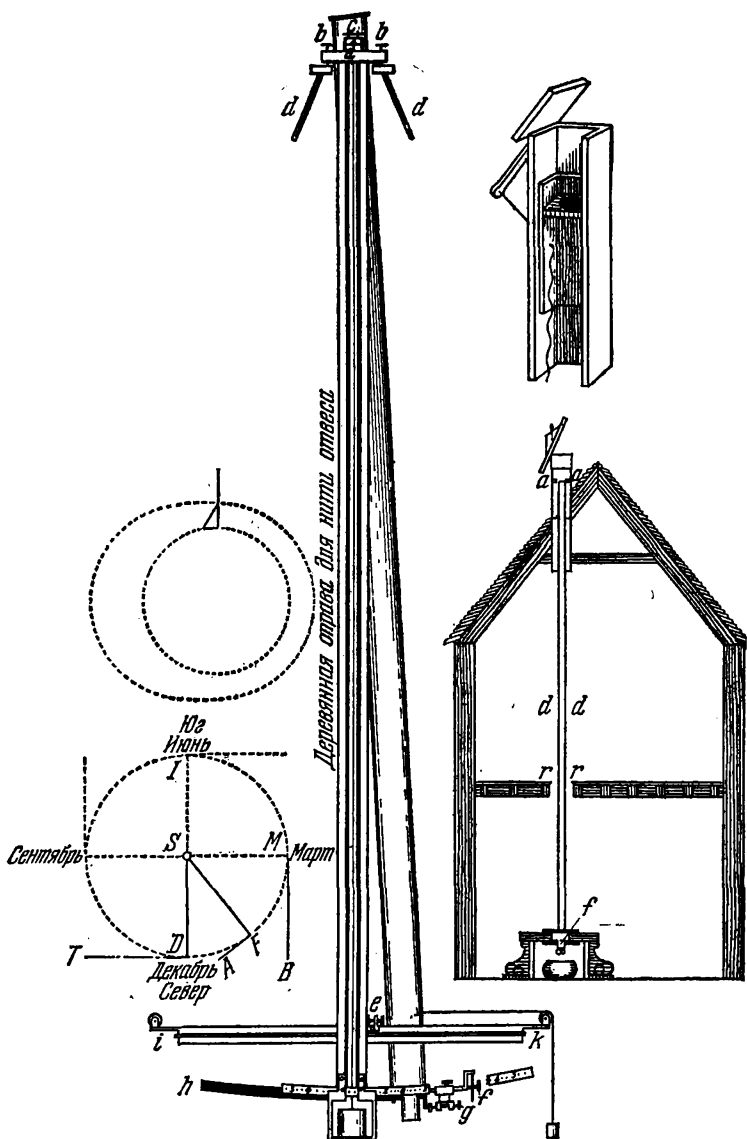


Рис. 10.9. Рисунок из оригинала статьи Бредли.

○ — конец оси с меткой для нити отвеса. *a* — опора, на которой закреплена нить отвеса. *c* — винт для регулировки длины нити отвеса. *b*, *b* — установочные винты. *d*, *d* — железные опоры. *l-k* — латунная подставка. *e* — винт с упором для закрепления деревянной оправы на латунной подставке. *f* — микрометрический винт. *g* — винт, предназначенный для того, чтобы телескоп не оказывал давления на микрометрический винт, когда прибор не работает. Телескоп выводится из вертикального положения, чтобы закрепить деревянную оправу нити отвеса. На дуге справа от телескопа изображен разрыв, в котором показан микрометрический винт. *h* — задняя подставка, в которой движется закрепленный в ней микрометрический винт.

$RBA$ , то свет проходит расстояние от  $C$  до  $A$  за то время, за которое глаз наблюдателя проходит расстояние от  $B$  до  $A$ , и частица его [света], дающая изображение предмета, когда глаз движущегося наблюдателя проходит в точку  $A$ , находилась в точке  $C$ , когда глаз находился в точке  $B$ . Соединив точки  $B$  и  $C$ , я предположил, что линия  $CB$  — это труба (наклоненная к линии  $BD$  под углом  $DBC$ ) такого диаметра, что в нее поступает только одна частица света; тогда легко было представить себе, что частица света в точке  $C$  (из-за которой предмет должен быть виден, когда глаз движущегося наблюдателя достигает точки  $A$ ) должна была бы двигаться по трубе  $BC$ , если эта труба наклонена к  $BD$  под углом  $DBC$  и движется вместе с глазом от  $B$  к  $A$ ; но что она не поступит в глаз, находящийся позади такой трубы, если бы она была наклонена под другим углом к линии  $BD$ ».

Для звезды, находящейся непосредственно в зените, абберация является максимальной, когда скорость Земли перпендикулярна к линии наблюдения. При этом угол отклонения, или абберации, телескопа, как видно из рисунка, определяется таким равенством:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_3}{c}, \quad (3)$$

где  $v_3$  — скорость Земли. Скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца равна  $3,0 \cdot 10^6$  см/сек; здесь можно пренебречь в 100 раз меньшей линейной скоростью вращения Земли вокруг своей оси. Таким образом,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3,0 \cdot 10^6}{3,0 \cdot 10^{10}} \operatorname{рад} \approx 1,0 \cdot 10^{-4} \operatorname{рад} \approx \alpha, \quad (4)$$

потому что для малых углов  $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ . В дуговых секундах

$$\alpha = 20,5''. \quad (5)$$

Вдвое большая величина, или  $41''$ , сравнима с величиной  $40,5''$  углового диаметра кажущейся орбиты звезды, наблюдавшейся Бредли.

На рис. 10.9 показан чертеж телескопа Бредли. Этот телескоп имел длину около 12 футов (3,7 м) и был специально предназначен для точного наблюдения звезд вблизи зенита. Совпадение результатов наблюдений Бредли над звездой  $\gamma$  Дракона с предложенной им гипотезой иллюстрируется таблицей (см. стр. 339), взятой из его же статьи.

В гл. 11 мы вновь рассмотрим опыт Бредли с точки зрения специальной теории относительности и получим подтверждение уравнения (3) с точностью до величин высшего порядка относительно  $\alpha$ . (Следует заметить, что применение теории относительности часто не влияет на величину и характер эффектов первого порядка относительно  $v/c$ , однако так бывает не всегда.)

*Методы измерения, основанные на применении зубчатых колес и вращающихся зеркал.* Первое определение скорости света, не

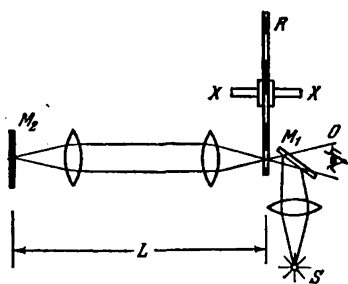


Рис. 10.10. Прибор Физо с зубчатым колесом (1849 г.). Свет от точечного источника  $S$  отражается полупрозрачным зеркалом  $M_1$ , в направлении к зубчатому колесу  $R$ , вращающемуся на оси  $XX'$ . Затем свет отражается от зеркала  $M_2$  и возвращается к наблюдателю  $O$ , проходя через просвет между зубцами колеса  $R$  и пластинку  $M_1$ .

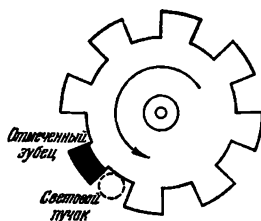


Рис. 10.11. Вид на световой пучок и зубчатое колесо  $R$  со стороны наблюдателя  $O$  (см. рис. 10.10). Вращение колеса  $R$  прерывает световой поток, идущий от  $S$  и отраженный зеркалом  $M_1$ , разделяя его на ряд коротких импульсов,— свет может пройти от  $M_1$  к  $M_2$  только в том случае, если на пути его нет зубца.

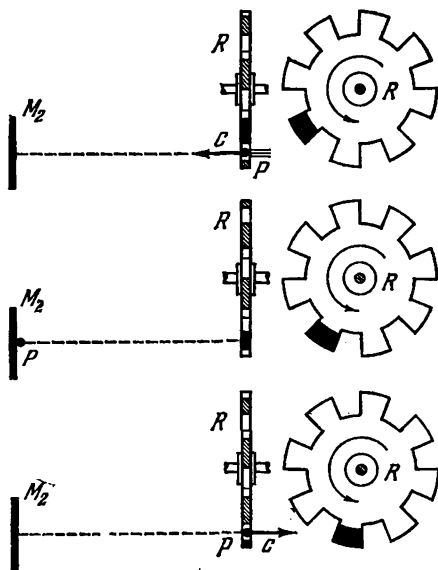


Рис. 10.12. Чтобы световой импульс  $P$ , имеющий скорость  $c$ , прошел к наблюдателю  $O$  (см. рис. 10.10), этот импульс должен пройти до  $M_2$  и, отразившись, вернуться к  $R$  (общая длина пробега равна  $2L$ ) за то время, в течение которого зубцы колеса повернутся на один интервал. Физо определил  $c$ , измерив расстояние  $L$  и угловую скорость вращения зубчатого колеса  $R$ .

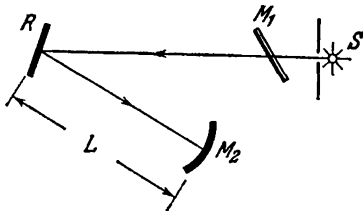


Рис. 10.13. Прибор Фуко с вращающимся зеркалом (1850 г.). Этот прибор состоит из источника света  $S$  со щелью, полупрозрачного зеркала  $M_1$ , вращающегося зеркала  $R$  (плоскость вращения перпендикулярна к странице) и сферического зеркала  $M_2$ . Показан ход пучка света только от  $S$  к  $M_2$ .



Год	Месяц и число	Разность склонений, определенная экспериментально, дуговые секунды	Разность склонений, рассчитанная на основании гипотезы, дуговые секунды
1727	20 октября	$4 \frac{1}{2}$	$4 \frac{1}{2}$
	17 ноября	$11 \frac{1}{2}$	12
	6 декабря	$17 \frac{1}{2}$	$18 \frac{1}{2}$
	28 декабря	25	26
1728	24 января	34	34
	10 февраля	38	37
	7 марта	39	39
	24 марта	37	38
	6 апреля	36	$36 \frac{1}{2}$
	6 мая	$28 \frac{1}{2}$	$29 \frac{1}{2}$
	5 июня	$18 \frac{1}{2}$	20
	15 июня	$17 \frac{1}{2}$	17
	3 июля	$11 \frac{1}{2}$	$11 \frac{1}{2}$
	2 августа	4	4
6 сентября	0	0	

связанное с астрономическими измерениями, было выполнено Физо в 1849 г. Он нашел, что скорость света в воздухе равна \*)

$$c = (315\,300 \pm 500) \text{ км/сек.}$$

В качестве затвора для определения времени прохождения светового сигнала по пути, равному 2·8633 мм, Физо использовал вращающееся зубчатое колесо.

Приспособление с зубчатым колесом было вскоре заменено приспособлением с вращающимся зеркалом, дающим больше света и возможность лучшей фокусировки. На рис. 10.13 приведена схема установки, примененной Фуко в 1850 г. Самая надежная из величин скорости света в воздухе, полученная им, равна (1862 г.)

$$c = (298\,000 \pm 500) \text{ км/сек.}$$

В 1927 г. Майкельсоном была применена усовершенствованная схема установки с вращающимся зеркалом (рис. 10.14, 10.15). В этом опыте Майкельсона свет проходил путь в 22 мили (35,4 км)

\*) Точный расчет показывает, что скорость света в вакууме на 91 км/сек больше, чем в воздухе.

между горами Маунт Вильсон и Маунт Сан-Антонио в Калифорнии (США). Источник света был помещен в фокусе линзы таким образом, что выходящий из нее пучок сохранял параллельность на большом расстоянии. Результат измерений Майкельсона:

$$c = (299\,796 \pm 4) \text{ км/сек.}$$

Эта работа намного превосходит по точности все предыдущие. Некоторые подробности опыта Майкельсона приводятся в задаче 3.

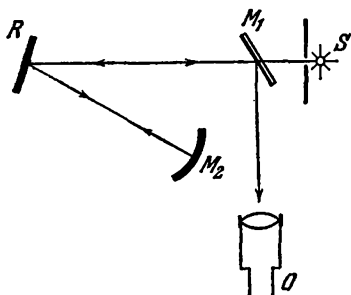


Рис. 10.14. Когда зеркало  $R$  неподвижно, пучок света, идущий через  $M_1$  к  $R$  и  $M_2$ , отражается обратно по тому же пути к  $M_1$  и оттуда—по направлению к  $O$ .

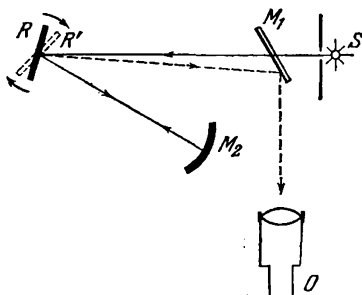


Рис. 10.15. Если зеркало  $R$  вращается, то свет, идущий от  $S$  к  $R$  и  $M_2$ , возвращается в тот момент, когда вращающееся зеркало находится в новом положении  $R'$ . Через трубу  $O$  наблюдается смещение изображения в зеркале  $M_1$ . Фуко определял  $c$ , измерив смещение изображения  $L$  (см. рис. 10.13) и угловую скорость вращающегося зеркала.

**Метод объемного резонатора.** Можно очень точно определить частоту, при которой в объемном резонаторе (металлическом ящике) известных размеров укладывается определенное число длин полу-волн электромагнитного излучения. Скорость света определяется из соотношения

$$c = \lambda \nu, \quad (6)$$

связывающего ее с длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\nu$ . В полости резонатора обычно поддерживается вакуум. К внутренним размерам полости необходимо прибавить поправку, учитывающую проникновение электромагнитного поля на незначительную глубину внутрь металла \*). Эссен (1950 г.), пользуясь частотами 5960, 9000 и 9500 Мгц, получил

$$c = (299\,792,5 \pm 1) \text{ км/сек.}$$

**Метод «Шоран» \*\*).** В методе «Шоран» используется радиолокационный маяк. Радиолокационный маяк, или импульсный повто-

\*) Глубина проникновения электромагнитного излучения внутрь металла называется *толщиной скин-слоя*. Для меди при комнатной температуре и частоте излучения  $10^{10}$  гц она имеет величину порядка 1 мкм ( $10^{-4}$  см). Есть также и другие необходимые поправки.

\*\*\*) Сокращение «Шоран» (Shoran) получено из начальных букв английского названия метода «Short Range Navigation» (навигация на коротких расстояниях).

ритель,— это прибор, который, получая радиолокационный импульс, немедленно испускает другой импульс. По существу, этот прибор в какой-то степени похож на зеркало, но, в отличие от зеркала, он усиливает поступающий сигнал прежде, чем «отразить» (испустить) его.

При измерении скорости света этим методом радиолокационные маяки устанавливаются в точках  $A$  и  $B$ . Радиолокационный передатчик, расположенный где-то на прямой между этими точками, испускает импульсы электромагнитного излучения, а приемник, находящийся в том же месте, измеряет время, за которое импульс достигает одного из маяков и возвращается от него. Расстояния между передатчиками и радиолокационными маяками могут быть весьма точно измерены с помощью стандартных геодезических методов. Для расстояний порядка  $10^7$  см (100 км) ошибка измерений имеет порядок всего около 10 см. Пользуясь часами с кварцевым кристаллом, можно очень точно измерять промежутки времени порядка  $10^{-9}$  сек.

Если  $t_A$  — время, за которое импульс проходит от передатчика до маяка в точке  $A$ , то измеренный промежуток времени равен

$$T_A = 2t_A + \delta_A, \quad (7)$$

где  $\delta_A$  — время запаздывания реакции маяка, легко определяемое специальным измерением. Можно было бы измерить скорость света, поместив передатчик в точку  $B$  и рассчитав  $c$  из следующего соотношения:

$$c = \frac{2L_{AB}}{2t_A}, \quad (8)$$

где  $L_{AB}$  — расстояние между  $A$  и  $B$ . Однако мы можем значительно уточнить измерения, увеличив дальность прямой видимости. Для этого надо поместить передатчик импульсов на самолете, летящем на большой высоте, и измерять время, за которое возвратятся сигналы от маяков  $A$  и  $B$ . При измерении самолет должен лететь по прямой линии между этими пунктами. Таким способом Аслаксон получил следующую величину:

$$c = (299\,794 \pm 1,9) \text{ км/сек.}$$

Точность этого метода зависит от точности измерения опорных расстояний и от атмосферных условий. Полученное значение  $c$  является очень надежным. В оригинале работы Аслаксона анализируются систематические ошибки, не учитывавшиеся в прежних измерениях.

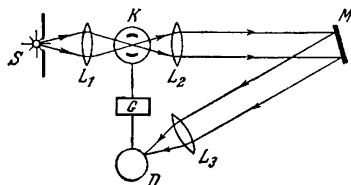


Рис. 10.16. Современный метод определения величины  $c$ . Свет, идущий от источника  $S$ , подвергается амплитудной модуляции в ячейке Керра  $K$ , затем поступает через линзу  $L_2$  на зеркало  $M$  и, отражаясь от него, через линзу  $L_3$  — на фотоэлектрический индикатор  $D$ . С помощью генератора радиочастотных колебаний  $G$  чувствительность фотоэлемента также модулируется синхронно с модуляцией интенсивности света в ячейке Керра.

*Применение индикатора модулированного света.* Свет от источника  $S$  отражается зеркалом  $M$  на индикатор — фотоэлемент  $D$  (рис. 10.16). Интенсивность света от источника модулируется с помощью радиочастотного генератора; с этой частотой и этим же прибором модулируется также чувствительность фотоэлемента. Для того чтобы сила тока фотоэлемента была максимальной, необходимо, чтобы свет максимальной интенсивности попал на этот фотоэлемент точно в момент его максимальной чувствительности. Это условие выполняется, если время, за которое свет проходит от  $S$  до  $D$ , равно целому числу периодов модуляции, производимой с частотой  $\nu$ , т. е. равно  $N/\nu$ , откуда следует:

$$c = \frac{2L\nu}{N}, \quad (9)$$

где  $L$  — расстояние от  $S$  и от  $D$  до зеркала. Длина пробега светового луча имеет порядок 10 км.

Пользуясь этим методом измерения, Бергstrand получил

$$c = (299\,793,1 \pm 0,3) \text{ км/сек.}$$

Заметьте, что погрешность измерения очень мала. Тот же самый прибор применяется (при условии, что величина  $c$  известна) для определения геодезических длин вплоть до 40 км; в этом применении прибор называется *геодиметром*.

Особый интерес представляют два источника ошибок в опытах этого типа. Во-первых, в измеренный интервал времени входит не только время прохождения света, но также и время пробега электронов, переносящих сигнал между электродами фотоэлемента. Время пробега электронов зависит от положения изображения источника света на фотокатоде. Перемещение изображения на несколько миллиметров вызывает разность во временах пробега порядка  $10^{-9}$  сек. В ранних опытах этого типа сравнивались промежутки времени для двух световых пучков. Длина пробега одного пучка была постоянной, а длина пробега другого менялась. Однако было невозможно сфокусировать на фотокатоде совпадающие изображения от обоих пучков. Используя один пучок, Бергstrand получал только одно изображение. При этом надо было вводить поправку на время пробега электронов, но благодаря надлежащей фокусировке он смог добиться того, чтобы поправка была постоянной для данного прибора. Во-вторых, в точках максимума и минимума силы тока фотоэлемента, изменяющейся по синусоидальному закону, прибор менее чувствителен, потому что верхушка синусоиды не является достаточно острой. Для более точного определения максимума силы тока применяется вторая частота модуляции.

За последние сто лет этими и множеством других методов были произведены сотни измерений  $c$ . В настоящее время общепризнанным значением скорости света в вакууме является

$$c = (2,997925 \pm 0,000003) \cdot 10^{10} \text{ см/сек.} \quad (10)$$

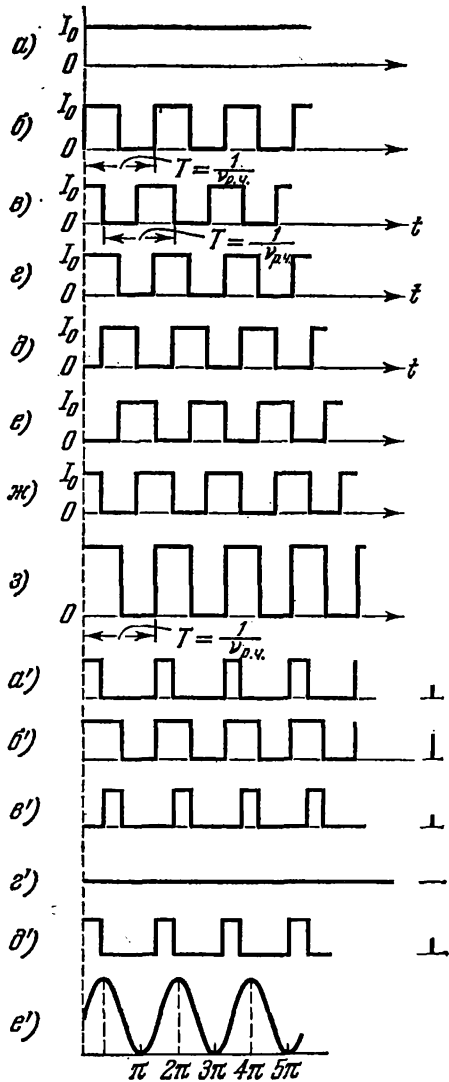
Рис. 10.17. Измерение с Бергстрандом основывается на методе «фазочувствительного индикатора» и похоже на опыт, иллюстрируемый приводимыми здесь графиками (см. рис. 10.16). Интенсивность света, поступающего от источника (а), но свет, выходящий из ячейки Керра, модулирован (б). Передвигая зеркало  $M$ , можно изменять время прохождения светом пути от  $K$  до  $D$ , так что свет поступает в  $D$ , как показано на рис. 10.16 (в). Если мы чуть-чуть отодвинем  $M$ , свет поступит позднее (г). Чем дальше отодвинут  $M$ , тем еще позднее поступит свет (д-ж). Теперь предположим, что чувствительность индикатора модулируется, как показано здесь (з). Сигнал от индикатора возникает только тогда, когда этот индикатор обладает чувствительностью и при этом на него поступает свет. В результате мы получаем график а') чувствительности индикатора к световому сигналу а). Для светового сигнала б) мы имеем: падающий свет и чувствительность индикатора совпадают по фазе б'). Для светового сигнала в) имеем в'). Для светового сигнала г) имеем г'). Для светового сигнала д) имеем д'). Для светового сигнала е) имеем е'). Когда мы непрерывно изменяем положение зеркала  $M$ , получается следующий график средней по времени величины сигнала индикатора (а'). Расстояние между двумя соседними максимумами на этой кривой соответствует изменению длины пути света на  $2\Delta L$ , вызванному перемещением зеркала  $M$ :

$$\frac{2\Delta L}{c} = \frac{1}{\nu_{р.ч.}}$$

следовательно,

$$c = 2\Delta L \nu_{р.ч.}$$

где  $\nu_{р.ч.}$  — модулирующая радиочастота,



Это значение получено как итог согласования результатов наиболее надежных измерений  $c$ , выполненных за последние годы с помощью различных методов, в которых исследовались электромагнитные волны с частотой от  $10^8$  *гц* (радиочастота) до  $10^{23}$  *гц* (гамма-лучи). Точность при наиболее высоких частотах не так высока, как при радиочастотах или оптических частотах, но в настоящее время нет никаких оснований считать, что величина  $c$  изменяется с изменением частоты излучения.

### 10.3. Эффект Доплера

Целесообразно рассмотреть теперь нерелятивистскую теорию эффекта Доплера. Под эффектом Доплера или смещением Доплера понимается определенная связь между измеряемой частотой волнового движения и относительными скоростями источника волн, среды и приемника. Удобно начать рассмотрение этого явления со звуковых волн, распространяющихся в жидкости или газе, потому что для звуковых волн очевидна роль среды. Мы знаем, что не может быть звуковых волн без той вещественной среды, в которой они распространяются. Как мы увидим ниже, из экспериментальных данных следует, что для световых волн не существует соответствующей вещественной среды.

*Источник движется относительно среды; приемник неподвижен.* Пусть источник волн находится в начале координат галилеевой системы отсчета  $T$ , которая движется относительно приемника, помещенного в начале координат другой галилеевой системы отсчета  $R$ . Временно предположим, что среда  $M$ , в которой распространяются волны, неподвижна относительно системы отсчета  $R$ , так что система отсчета  $R$  тождественна с системой отсчета  $M$ , неподвижно связанной со средой. Система отсчета источника  $T$  движется относительно  $R$  (и  $M$ ) со скоростью

$$\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}. \quad (11)$$

Если число  $V$  положительно, то источник движется по направлению к приемнику.

Скорость звука *относительно* среды зависит только от механических свойств этой среды и совсем не зависит от скорости движения источника относительно среды. Это чем-то напоминает движение предметов на ленте конвейера. Независимо от того, как быстро вы бежите параллельно ленте в момент, когда кладете на нее предмет, скорость этого предмета, как только он лег на ленту, будет в точности равна скорости движения самой ленты конвейера. Если имеется какая-то определенная среда, то определенной является и скорость звука  $v_{зв}$  в этой среде. Известно следующее соотношение между длиной волны, частотой и скоростью распространения волнового процесса:

$$\lambda_R v_R = v_{зв}. \quad (12)$$

Это соотношение очевидно, когда  $v_{зв}$  — постоянная величина, так как  $\nu_R$  — это число полных колебаний, совершаемых за секунду, а  $\lambda_R$  — расстояние (скажем, в сантиметрах), проходимое волной за время каждого из этих колебаний. Таким образом, число сантиметров, проходимое волной за секунду, выражается произведением  $\lambda_R \nu_R$ . Скорость звука определяется плотностью и упругими постоянными среды. Если мы используем волны с частотой  $\nu_R$ , то длина волны  $\lambda_R$  однозначно определяется из уравнения (12). Более подробно упругие волны рассматриваются в т. III.

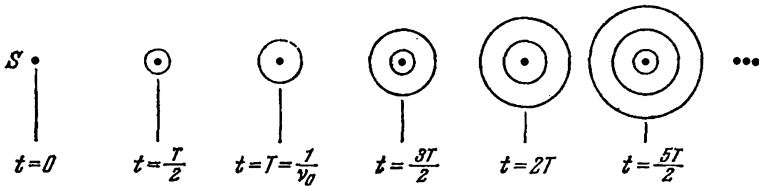


Рис. 10.18. Звуковые волны, образуемые неподвижным источником:  $S$  испускает сферические звуковые волны с длиной волны  $\lambda_0$ , частотой  $\nu_0$  и скоростью  $v_{зв} = \nu_0 \lambda_0$ .

Предположим, что источник колебаний испускает в направлении  $+\hat{x}$  за время  $t$  последовательный цуг волн, число которых равно  $N$  (под волной мы подразумеваем одну полную длину волны). За это время первая волна пройдет в среде расстояние  $v_{зв}t$ ; последняя волна только успевает выйти из источника к концу этого промежутка времени, а сам источник переместится относительно среды на расстояние  $Vt$ . Расстояние между началом и концом цуга волн равно  $(v_{зв} - V)t$ , и на этом расстоянии помещаются  $N$  волн. Следовательно, длина волны равна

$$\lambda_R = \frac{(v_{зв} - V)t}{N}, \quad (13)$$

а частота волн относительно среды, т. е. частота, с которой эти волны поступают в приемник  $R$ , равна

$$\nu_R = \frac{v_{зв}}{\lambda_R} = \frac{N}{t} \frac{v_{зв}}{v_{зв} - V}. \quad (14)$$

Однако источник испускает  $N$  волн за  $t$  сек, так что частота волн в его собственной системе отсчета равна

$$\nu_T = \frac{N}{t}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим

$$\nu_R = \frac{\nu_T}{1 - V/v_{зв}}. \quad (16)$$

Следовательно, если скорость  $V$  положительна (источник движется по направлению к приемнику), то частота, воспринимаемая приемником, больше, чем излучаемая частота. Если скорость  $V$  отрицательна (источник движется в направлении от приемника), то воспринимаемая частота меньше, чем излучаемая. Этот сдвиг частот называется *эффектом Доплера* или *смещением Доплера*. Для реактивного самолета  $V$  имеет тот же порядок величины, что и скорость звука в воздухе, и эффект Доплера довольно велик. Если  $V/v_{зв} \ll 1$ , то, ограничиваясь слагаемыми порядка  $V/v_{зв}$ , можно приближенно преобразовать (16) в следующее выражение:

$$v_R \approx v_T \left( 1 + \frac{V}{v_{зв}} \right). \quad (17)$$

*Источник неподвижен; приемник движется относительно среды.* Пусть источник  $T$  неподвижен относительно системы отсчета  $M$ , а приемник  $R$  движется справа налево в направлении к источнику со скоростью  $\mathbf{V} = -V\hat{x}$ , где  $V$  — положительное число. Последовательность из  $N$  волн, вышедших за время  $t$ , занимает в среде расстояние  $v_{зв}t$ . Скорость звуковой волны относительно приемника равна  $(v_{зв} + V)$ , так что приемник воспринимает  $N$  волн за время

$$\frac{v_{зв}t}{v_{зв} + V},$$

и поэтому частота, воспринимаемая приемником, равна

$$v_R = \frac{N}{v_{зв}t/(v_{зв} + V)} = \frac{N}{t} \frac{(v_{зв} + V)}{v_{зв}}. \quad (18)$$

Подставив  $v_T = N/t$ , получаем

$$v_R = v_T \left( 1 + \frac{V}{v_{зв}} \right). \quad (19)$$

Этот результат не равен в точности результату (16) предыдущей задачи, но, сравнивая (17) и (19), мы видим, что оба результата можно считать одинаковыми, если ограничиться слагаемыми первого порядка относительно  $V/v_{зв}$ . В гл. 11 мы увидим, что результаты (16) и (19) справедливы и для световых волн в свободном от вещества пространстве, но только с точностью до величин первого порядка относительно  $V/c$ . Для звуковых волн уравнения (17) и (19) различаются слагаемыми второго порядка относительно  $V/v_{зв}$ , так что при распространении звуковых волн мы в состоянии определить экспериментально, движется ли относительно среды источник или приемник. Для звуковых волн среда имеет существенное значение. Для световых волн окажется, что слагаемые второго порядка в обоих случаях одинаковы.

*Источник и приемник движутся вместе.* Предположим, что как источник, так и приемник движутся в одном направлении с одинаковой скоростью  $V$  относительно среды. Легко можно видеть, что в этом случае  $v_R = v_T$ , потому что импульсы, испускаемые отдельно



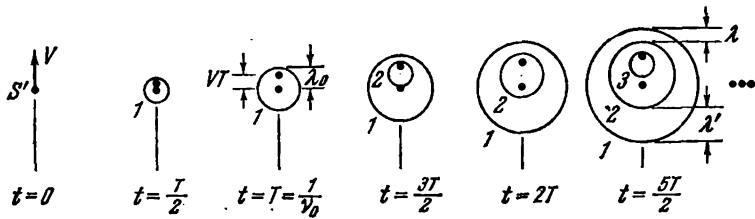


Рис. 10.19. Эффект Доплера; источник  $S'$  движется относительно среды со скоростью  $\dot{y}=V$  и испускает волны с частотой  $\nu_0$ . Волна 1 испускается, когда  $S'$  находится в точке  $y=0$ . Эта волна распространяется радиально во все стороны. Волна 2 испускается, когда  $S'$  находится в точке  $y=VT$ . Эта волна тоже распространяется радиально во все стороны и т. д.

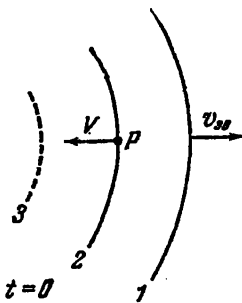


Рис. 10.20. Наблюдатель в точке  $P$  неподвижный относительно среды, наблюдает волны (1, 2, 3) с длиной волны  $\lambda$ .

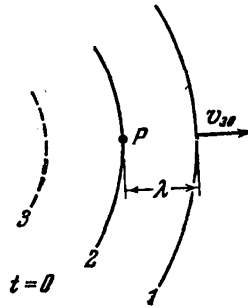


Рис. 10.21. Частота этих волн относительно наблюдателя в точке  $P$  равна  $\nu = v_{30}/\lambda$ .

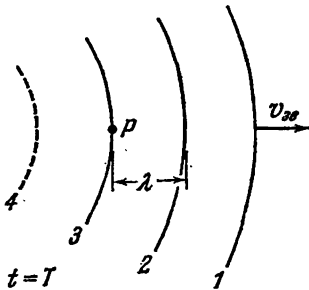


Рис. 10.22. Теперь представим себе, что наблюдатель движется относительно среды со скоростью  $V$ . Предположим, что в момент  $t=0$  волновой фронт 2 достигает точки  $P$ .

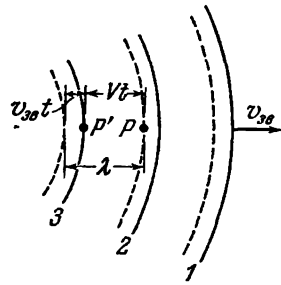


Рис. 10.23. Наблюдатель достигнет следующего волнового фронта, когда  $(v_{30} + V)t = \lambda$ . Таким образом, для движущегося наблюдателя

$$\nu_R = \nu \left( 1 + \frac{V}{v_{30}} \right).$$

через промежутки времени  $T=1/\nu_T$ , принимаются также отдельно через промежутки времени  $T$ . Этот же результат можно получить и иным способом, скомбинировав уравнения (16) и (19), написанные со знаками  $\pm$  перед  $V/v_{зв}$ , соответствующими направлению движения источника и приемника:

$$\nu_R = \frac{1}{1 \pm \frac{V}{v_{зв}}} \left( 1 \pm \frac{V}{v_T} \right) \nu_T = \nu_T. \quad (19a)$$

Следовательно, частота волн не меняется; конечно, из-за течения среды изменится кажущаяся скорость распространения волн.

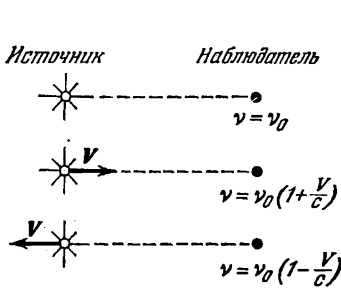


Рис. 10.24. Для световых волн это соотношение (см. рис. 10.23) все еще выполняется при условии, что  $V \ll c$ , но мы уже не можем решить вопрос, что движется — источник или наблюдатель.

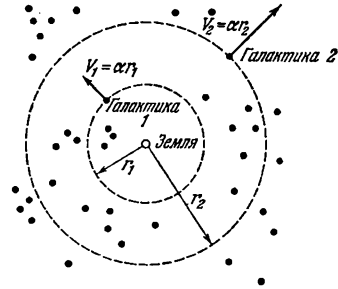


Рис. 10.25. Эффект Доплера, наблюдаемый для света от далеких звезд, показывает, что другие галактики удаляются от нас со скоростью, пропорциональной их расстоянию от Земли.

**Пример. Красное смещение излучения от удаляющихся звезд и галактик.** Спектральный анализ света от далеких галактик показывает, что частоты определенных опорных спектральных линий



Рис. 10.26. Две спектрограммы двойной звезды  $\alpha^1$  Близнецов, снятые в различные моменты времени. Только одна из двух звезд этой системы излучает свет, достаточно интенсивный для наблюдения. Заметьте, что линии спектра звезды сдвинуты относительно линий контрольного спектра, полученного в лаборатории, в различных направлениях соответственно двум стадиям движения звезды. В первой стадии звезда движется по направлению к Земле и частота света возрастает; во второй стадии звезда удаляется от Земли и частота уменьшается.

1, 4 — контрольные спектры, полученные в лаборатории; 2 — звезда приближается; 3 — звезда удаляется.

весьма заметно смещены к красному краю, т. е. к низкочастотному краю видимого спектра. Такое смещение можно истолковать как эффект Доплера, причиной которого является удаление источника

излучения с определенной скоростью. Известно также, что относительная величина смещения частот  $\Delta\nu/\nu$  или смещения длин волн  $\Delta\lambda/\lambda$  прямо пропорциональна расстоянию от источника до нас при условии, что эта величина значительно меньше единицы. Этот экспериментальный факт кажется необычайным и парадоксальным. Наиболее простое нерелятивистское объяснение подобного характера зависимости между расстоянием до источников излучения и скоростью их относительного движения дает так называемая «теория взрыва», согласно которой Вселенная образовалась около  $10^{10}$  лет тому назад в результате взрыва. Продукты этого первоначального взрыва, обладающие наибольшей скоростью, в настоящее время образуют наружные области Вселенной. Таким образом, чем больше радиальная скорость вещества относительно нас, тем дальше оно находится от нас и тем больше красное смещение. Известны также и другие объяснения красного смещения излучения, вызванного удалением его источников, но ни одно из них нельзя считать доказанным.

Две легко распознаваемые линии поглощения спектра калия (линии К и Н) хорошо видны в спектрах многих звезд. В спектрах, полученных в лабораториях на Земле, эти линии имеют длину волны около  $3950 \text{ \AA}$  \*). Предположим, что наблюдатели, находящиеся в лаборатории, т. е. движущиеся относительно системы отсчета, неподвижно связанной с какой-либо звездой, измеряют длину волны этих же линий в спектре звезды. В свете, идущем от туманности в созвездии Волопаса, мы наблюдаем эти линии уже при длине волны  $4470 \text{ \AA}$ , т. е. смещение в сторону красного края равно  $4470 - 3950 = 520 \text{ \AA}$ . Это соответствует относительному смещению

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{520}{3950} = 0,13. \quad (20)$$

Пользуясь уравнением (16) и заменив в нем  $v_{зв}$  на  $c$  (применимость этого уравнения к световым волнам будет доказана в гл. 11), а затем дифференцируя равенство  $v=c/\lambda$  \*\*) при постоянном  $c$ , получаем, что

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx -\frac{V}{c}, \quad (21)$$

где мы использовали уравнение (17), подставив в него  $c$  вместо  $v_{зв}$  (правомерность этого также будет доказана в гл. 11). Из расчета по формулам (20) и (21) мы видим, что туманность удаляется от нас с довольно большой относительной скоростью  $|V| \approx 0,13c$ . Для еще больших скоростей нам следует использовать формулу

\*)  $1 \text{ \AA}$  (ангстрем) =  $10^{-8} \text{ см}$ .

\*\*) Обратите внимание на следующий несложный расчетный прием. Пусть  $y = Ax^n$ , где  $A$  и  $n$  — постоянные, и нам надо выразить  $dy/y$  через  $dx/x$ . Возьмем натуральный логарифм от обеих частей этого равенства:  $\ln y = \ln A + n \ln x$ , а затем продифференцируем обе части. Получим  $dy/y = n dx/x$ . Здесь мы используем равенство  $d \ln x = dx/x$ .

смещения Доплера, видоизмененную с учетом теории релятивистской модели Вселенной \*).

Можно сопоставить результаты подобных наблюдений над излучением большого числа галактик с определением расстояния до них независимыми методами и прийти к удивительному эмпирическому выводу: относительная скорость удаления галактики, находящейся на расстоянии  $r$  от нас, может быть выражена следующей формулой:

$$V = \alpha r, \quad (22)$$

где константа  $\alpha$ , определенная эмпирически, равняется  $3 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$  (методика определения расстояний до галактик является довольно сложной; с ней можно ознакомиться в руководствах по астрономии). Величина, обратная  $\alpha$ , имеет размерность времени:

$$1/\alpha \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ сек} \approx 10^{10} \text{ лет}. \quad (23)$$

Помножив  $1/\alpha$  на  $c$ , мы получим величину, имеющую размерность длины:

$$\frac{c}{\alpha} \approx (3 \cdot 10^{10}) \cdot (3 \cdot 10^{17}) \text{ см} \approx 10^{28} \text{ см}. \quad (24)$$

Время (23) нестрого называется «возрастом Вселенной», а длина (24) также нестрого — «радиусом Вселенной» \*\*). Точный смысл этих величин сейчас еще неясен, хотя было предложено несколько различных космологических теорий, объясняющих соотношение (22).

#### 10.4. Скорость света в инерциальных системах отсчета при относительном движении

Применение элементарного преобразования Галилея к задаче о величине скорости света, определяемой относительно движущегося приемника, приводит к требованию, чтобы в системе отсчета, связанной с этим приемником, скорость света отличалась от  $c$ . Согласно так называемому «здравому смыслу» мы ожидали бы, что скорость света  $c_R$  относительно движущегося приемника должна определяться из следующего уравнения:

$$c_R = c \pm V, \quad (25)$$

где  $V$  — скорость света приемника, который движется навстречу источнику (+) или от источника (—).

Этот способ сложения скоростей кажется совершенно обоснованным. Казалось бы, что то же соотношение должно было бы выполняться, когда источник и приемник неподвижны, а среда, в которой распространяется свет, движется со скоростью  $V$ . Соотношение (25), очевидно, соблюдается в бесчисленных случаях повсед-

\*) См. G. C. McVitties, Physics Today, июль 1964, стр. 70.

\*\*\*) Ср. гл. 1, «Оценки кривизны мирового пространства», стр. 30—32. (Прим. ред.)

невной жизни; но не тогда, когда речь идет о свете. Оно выполняется для звуковых волн, если заменить  $c$  на  $v_{зв}$ . Однако оно *неверно* даже приближенно для световых волн в свободном от вещества пространстве. Экспериментально найдено, что

$$c_R = c \quad (26)$$

для любой системы отсчета, *независимо от ее скорости* и независимо от скорости относительно воображаемой среды, в которой распространяется свет. Этот доказанный факт является краеугольным камнем релятивистской формулировки физических законов.

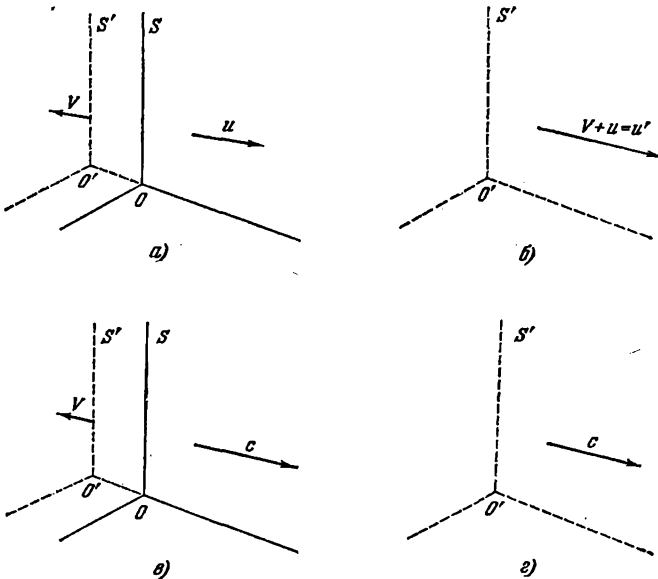


Рис. 10.27. Если  $u$  — скорость обыкновенного наземного движения (а), наблюдаемая относительно инерциальной системы отсчета  $S$ , то согласно преобразованию Галилея в инерциальной системе отсчета  $S'$  мы должны наблюдать:  $u' = V + u$  (б). Однако опыт показывает (в), что если частица имеет скорость  $c$  в системе отсчета  $S$ , то она имеет скорость  $c$  также и в системе отсчета  $S'$  (г).

Рассмотрим сейчас экспериментальное доказательство равенства (26). Известно много различных опытов, подтверждающих специальную теорию относительности; те из них, которые приводят к равенству (26), образуют основной отправной пункт этой теории. Разберем опыты, показывающие, что величина скорости света не зависит от скорости движения Земли ( $3 \cdot 10^8$  см/сек) по ее орбите.

Сначала предположим, как это делали физики в девятнадцатом столетии, что свет распространяется в форме колебаний некоторой среды так же, как звук распространяется в форме колебаний атомов в жидкостях, твердых телах или газах. Светоносная среда, через которую в свободном от вещества пространстве распространяются световые волны, была названа *эфиром*.

Что такое эфир? В настоящее время мы считаем понятие «эфир» только синонимом вакуума. Но Максвелл и многие другие физики прошлого не могли представить себе электромагнитное поле как самостоятельное физическое явление, распространяющееся в свободном от вещества пространстве. Максвелл писал \*): «Все эти

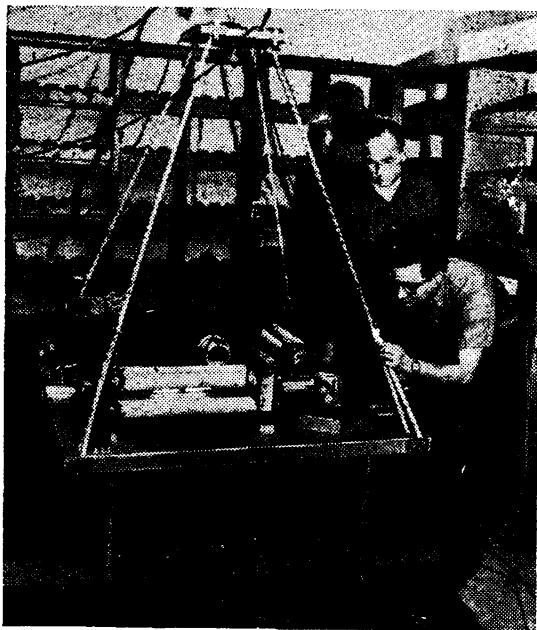


Рис. 10.28. Точный прибор, в котором для проведения релятивистского оптического опыта используются два лазера. Прибор помещен в бывшем винном погребе в Раунд Хилл, штат Массачусетс. На снимке с прибором работают Чарльз Таунс и Али Джаван.

теории естественным образом вызывают вопрос: если нечто передается от одной частицы к другой на расстояние, каково состояние этого нечто после того, как оно покинуло одну частицу и еще не достигло другой? Если это нечто есть потенциальная энергия двух частиц, как в теории Неймана, то должны ли мы рассматривать эту энергию как существующую в какой-то точке пространства, не совпадающей ни с той, ни с другой частицей? Действительно, каким бы способом энергия ни передавалась от одного тела к другому во времени, должна быть среда или субстанция, в которой энергия существует после того, как она оставила одно тело и еще не достигла другого, ибо энергия, как заметил Торичелли, «есть квинтэссенция такой тонкой природы, что она не может содер-

\* ) Русский перевод: Д. К. Максвелл, Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, Гостехиздат, 1954, стр. 632. (Прим. ред.)

жаться ни в каком другом сосуде, как только в самой сокровенной субстанции материальных вещей». Таким образом, все эти теории приводят к концепции среды, в которой имеет место распространение. И, если мы примем эту среду в качестве гипотезы, я считаю, что она должна занимать выдающееся место в наших исследованиях и что нам следовало бы попытаться сконструировать рациональное представление о всех деталях ее действия, что и было моей постоянной целью в этом трактате.

Возможный прямой опыт с целью проверки, зависит ли скорость света от движения Земли, должен состоять в точном определении времени однократного прохождения светового импульса по измеренному пути. Это следовало бы сделать отдельно в двух направлениях — с севера на юг и затем с востока на запад, а потом повторить все через шесть месяцев, когда скорость движения Земли вокруг Солнца примет противоположное направление. В результате разработки лазеров в распоряжении физиков имеются часы, точность которых достаточна для такого прямого эксперимента; точность измерения в настоящее время лимитируется, по-видимому, продолжительностью нарастания импульса лазера. При величине этого интервала времени  $10^{-9}$  сек в определении длины пути света вносится эффективная ошибка, численно равная  $10^{-9} c = 30$  см. В таком опыте двое часов должны быть синхронизированы в одном месте, а затем медленно разведены на свои конечные места.

Был произведен ряд опытов с целью проверки, выполняется ли равенство (25), т. е. с целью обнаружить, существует ли движение относительно эфира. Все они показали, что не существует движения Земли относительно эфира; наиболее убедительными были опыты Майкельсона и Морли.

## 10.5. Опыты Майкельсона и Морли

Две последовательности световых волн, вышедших из общего монохроматического источника, могут, интерферируя, усиливать или ослаблять друг друга в данной точке в зависимости от разности фаз волн, пришедших в эту точку. Эту разность фаз можно изменить, сделав так, чтобы одна последовательность волн прошла более длинный путь, чем другая. Майкельсон и Морли построили сложный интерферометр, основные части которого изображены схематически на рис. 10.29 и 10.30. Пучок света от одного источника  $s$  разделялся в точке  $a$  полупрозрачным зеркалом. Мы продолжим описание опыта теми же словами и с теми же обозначениями, которые применяли сами исследователи \*).

\*) A. A. Michelson, E. W. Morley, Am. J. Sci. 34, 333 (1887). Это был один из самых замечательных экспериментов девятнадцатого столетия. Простой по существу, этот опыт привел к революции в науке с далеко идущими последствиями. Заметьте, что отношение скорости движения Земли по орбите к скорости света — около  $10^{-4}$ . Цитируя оригинал, мы писали  $c$  вместо обозначения авторов  $V_2$  и  $V$  вместо обозначения авторов  $v$ ; наши замечания к тексту оригинала заключены в квадратные скобки.

«Пусть  $sa$  [рис. 10.29] — это луч света, который частично отражается по направлению  $ab$ , а частично пропускается по направлению  $ac$ ; оба образовавшихся луча затем отражаются зеркалами  $b$  и  $c$  по направлениям  $ba$  и  $ca$ ,  $ba$  частично пропускается по направлению  $ad$ , а  $ca$  частично отражается по этому же направлению  $ad$ . Тогда, если пути  $ab$  и  $ac$  равны, то эти два луча интерферируют на пути  $ad$ . Предположим теперь, что при неподвижном эфире весь прибор движется в направлении  $sc$  со скоростью Земли по ее

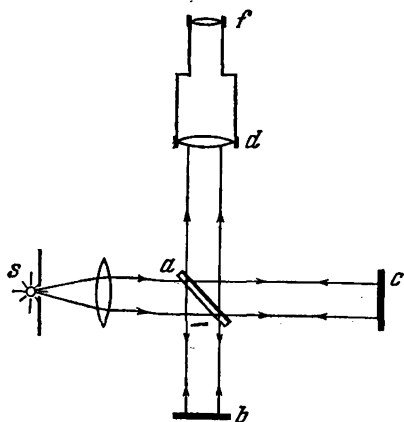


Рис. 10.29. В опыте Майкельсона и Морли интерферометр состоял из источника света  $s$ , полупрозрачного зеркала  $a$ , зеркал  $b$  и  $c$  и приемника света — зрительной трубы  $d$ ;  $f$  — фокальная плоскость зрительной трубы. Если интерферометр был неподвижен относительно эфира, то с помощью трубы  $d$  можно было наблюдать интерференцию пучков  $aba$  и  $aca$ .

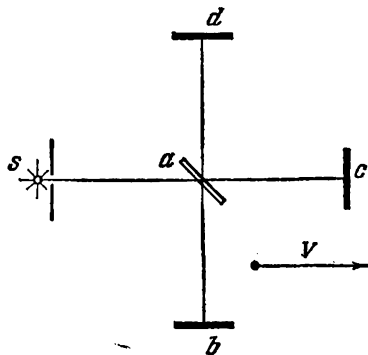


Рис. 10.30. Если бы прибор (и Земля) обладали скоростью по отношению к гипотетическому эфиру, то мы бы наблюдали, как в трубе  $d$  изменяется интерференционная картина, потому что времена, за которые проходятся пути  $aba$  и  $aca$ , соответственно изменились бы на неодинаковые величины.

орбите; направления и расстояния, пройденные лучами, изменятся следующим образом: луч  $sa$  отражается по направлению  $ab'$  и возвращается по направлению  $b'a'$  [рис. 10.30], причем угол  $ab'a'$  равен  $2\alpha$  — удвоенному углу абберации; затем этот луч попадает в фокус зрительной трубы, направление которой неизменно. Проходящий луч идет по направлению  $ac'$ , возвращается по направлению  $c'a'$  и отражается от  $a'$ , причем угол  $c'a'd'$  равен  $90^\circ - \alpha$ , и поэтому направление луча совпадает с направлением первого луча.

Следует заметить, что лучи  $b'a'$  и  $c'a'$  не встречаются точно в одной и той же точке  $a'$ , но это различие является величиной второго порядка и не влияет на правильность рассуждения. Теперь нужно найти разность длин двух путей:  $ab'a'$  и  $ac'a'$ .

Пусть  $c$  — скорость света,  $V$  — скорость движения Земли по орбите,  $D$  — расстояние  $ab$  или  $ac$  [рис. 10.29],  $T$  — время, за которое свет проходит от  $a$  до  $c'$ ,  $T'$  — время, за которое свет возвращается от  $c'$  к  $a'$  [рис. 10.30].



Тогда

$$T = \frac{D}{c-V}, \quad T' = \frac{D}{c+V}. \quad (27a)$$

Все время, за которое свет проходит до точки  $c'$  и возвращается обратно, равно

$$T + T' = 2D \frac{c}{c^2 - V^2}, \quad (27б)$$

а расстояние, пройденное за это время, равно

$$2D \frac{c^2}{c^2 - V^2} \approx 2D \left( 1 + \frac{V^2}{c^2} \right), \quad (27в)$$

если пренебречь слагаемыми четвертого порядка. Длина другого пути, очевидно, равна

$$2D \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}, \quad (27г)$$

или, с той же степенью точности,

$$2D \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right). \quad (27д)$$

Следовательно, разность этих длин равна

$$D \frac{V^2}{c^2}. \quad (27е)$$

Если теперь повернуть весь прибор на  $90^\circ$ , то эта разность будет иметь противоположный знак; следовательно, смещение интерференционных полос должно быть равно  $2D (V^2/c^2)$ . Принимая во внимание, что  $V$  — это скорость движения Земли по ее орбите, следует считать величину этого смещения равной  $2D \cdot 10^{-8}$ . Если, как это было в первом опыте,  $D = 2 \cdot 10^6$  длин волны желтого света, то ожидаемое смещение должно было бы равняться 0,04 расстояния между интерференционными полосами.

Одна из основных трудностей, встретившихся в первом опыте, заключалась в повороте прибора таким образом, чтобы не возникало искажение; другая трудность заключалась в крайней чувствительности к вибрации. Она [вибрация] оказалась так велика, что когда работа велась в городе, то даже в два часа ночи было невозможно видеть интерференционные полосы, за исключением коротких интервалов. Наконец, как отмечалось выше, величина, подлежащая наблюдению, а именно смещение на расстояние несколько меньшее, чем  $1/20$  интервала между интерференционными полосами, была, по-видимому, слишком мала, чтобы ее можно было обнаружить при наличии экспериментальных ошибок, искажающих ожидаемый результат.

Первая из указанных трудностей была полностью преодолена [во втором опыте] посредством установки прибора на массивное каменное основание, плавающее на ртути; а вторая — посредством

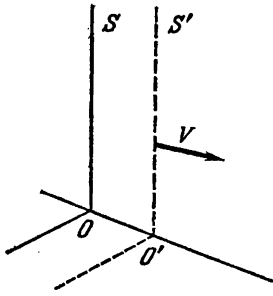


Рис. 10.31. Чтобы убедиться в правильности этого рассуждения (см. подпись к рис. 10.29, 10.30), рассмотрим инерциальную систему отсчета  $S'$ , движущуюся вместе с Землей и интерферометром.  $S$  — инерциальная система отсчета, неподвижная относительно эфира.

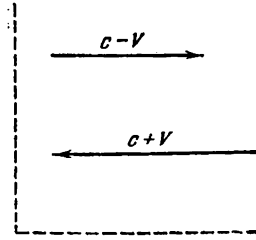


Рис. 10.32. Согласно преобразованию Галилея свет, движущийся вправо, имеет в системе отсчета  $S'$  скорость  $c-V$ ; свет, движущийся влево, имеет в системе  $S'$  скорость  $c+V$ .

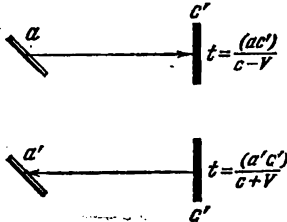


Рис. 10.33. Таким образом, время, за которое свет проходит от  $a$  к  $c'$  и возвращается в  $a'$ , равно  $\Delta t(ac'a') = \frac{(ac')}{c-V} + \frac{(a'c')}{c+V}$ , где через  $(ac')$  обозначается расстояние между  $a$  и  $c'$ .

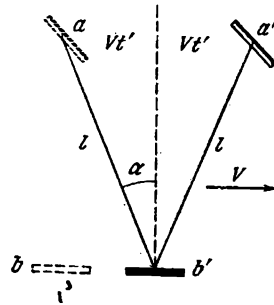


Рис. 10.34. Чему равно время  $\Delta t(ab'a')$ , за которое свет проходит от  $a$  к  $b'$  и возвращается в  $a'$ ? В инерциальной системе отсчета  $S$ , неподвижной относительно эфира, интерферометр имеет скорость  $V$ , направленную вправо; свет имеет скорость  $c$ .

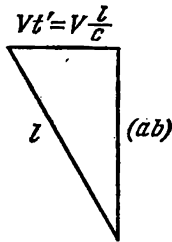


Рис. 10.35.  $l^2 = \frac{V^2}{c^2} l^2 + (ab)^2$ , следовательно-

$$\text{но, } l = \frac{(ab)}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}},$$

$$\Delta t(ab'a') = 2t' = 2(ab)/(c^2 - V^2)^{1/2},$$

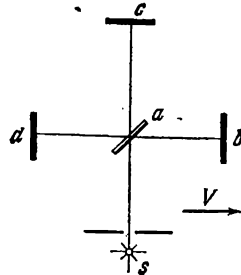


Рис. 10.36. Таким образом, даже если  $(ab) = (ac)$ , то на основании преобразования Галилея мы должны были бы ожидать смещения интерференционной картины, если изменится скорость интерферометра относительно эфира. Однако никакого смещения не наблюдалось.

увеличения длины пути света примерно в десять раз по сравнению с первоначальным значением за счет многократного отражения.

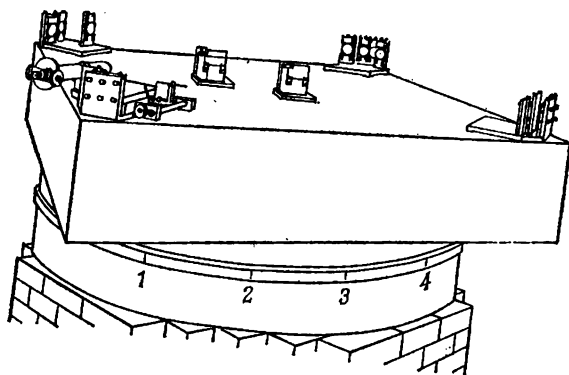


Рис. 10.37. Вид прибора, описанного Майкельсоном и Морли в их статье в 1887 г.

...Если рассматривать движение Земли только по ее орбите, то смещение должно быть равно

$$2D \frac{V^2}{c^2} = 2D \cdot 10^{-8}.$$

Расстояние  $D$  составляло около одиннадцати метров, т. е.  $2 \cdot 10^7$  длин волн желтого света; следовательно, ожидаемое смещение полос равнялось 0,4 расстояния между полосами (если бы Земля двигалась относительно эфира). Фактически наблюдавшееся смещение было наверняка меньше двадцатой части этой величины и, вероятно, меньше, чем ее сороковая часть. Однако поскольку смещение пропорционально квадрату скорости, то скорость Земли относительно эфира, вероятно, должна быть меньше одной шестой части от орбитальной скорости Земли и наверняка меньше одной четвертой».

Экспериментальные результаты, полученные Майкельсоном и Морли, противоречат тому, что мы могли бы ожидать, основываясь на преобразовании Галилея. В течение 80 лет после их опытов подобные опыты повторялись (с видоизменениями) для света различных длин волн, для света звезд или для предельно монохроматического света современного лазера. Они проводились на большой высоте и под землей, на различных

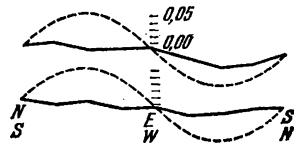


Рис. 10.38. «Результаты наблюдений выражены графически [на рисунке]. На верхнем графике дана кривая для наблюдений, выполненных днем, а на нижнем графике — для ночных наблюдений. Пунктирные кривые соответствуют одной восьмой части теоретического смещения. По-видимому, правильно сделать на основании рисунка вывод, что если есть какое-то смещение, обусловленное относительным движением Земли и светового эфира, то оно не может быть намного больше, чем 0,01 расстояния между полосами» (из статьи Майкельсона и Морли). По вертикальной оси откладывается смещение полос. Горизонтальная ось относится к ориентации интерферометра относительно линии восток — запад.

континентах и в различное время года. В результате этих опытов скорость движения Земли относительно эфира следует считать равной нулю с возможной ошибкой менее  $10^3$  см/сек, т. е. менее одной тысячной от скорости орбитального движения Земли вокруг Солнца, так как с такой точностью равны между собой значения скорости света по направлению движения Земли и против него.

## 10.6. Инвариантность величины $c$

Результат опытов Майкельсона и Морли показывает, что нельзя обнаружить существование эфира. Это означает, что величина эффекта Доплера при распространении света должна зависеть только от относительной скорости двух систем отсчета, а не от абсолютной скорости по отношению к какому-то неподвижному эфиру \*). Этот результат означает также, что величина скорости света не зависит от движения источника или наблюдателя. Последний вывод довольно хорошо доказан экспериментально, но точность этих экспериментов можно еще улучшить. Работа Саде, цитируемая в гл. 11, показывает, что скорость  $\gamma$ -лучей, испускаемых источником, который движется со скоростью порядка  $1/2c$ , остается постоянной с точностью  $\pm 10\%$  независимо от скорости движения источника.

На основании всех экспериментальных данных мы приходим к следующему выводу: *если фронт световой волны от точечного источника является сферическим в какой-либо одной инерциальной системе отсчета, то он будет сферическим и для наблюдателя в любой другой инерциальной системе отсчета.*

Мы отметили выше, что скорость распространения электромагнитных волн не зависит от частоты в интервале от  $10^8$  до  $10^{22}$  гц. Тщательные измерения показывают также, что величина  $c$  не зависит от интенсивности света и от наличия других электрических и магнитных полей. Все это относится только к электромагнитным волнам, — распространяющимся в свободном от вещества пространстве.

## 10.7. Предельная скорость

Мы видели, что в свободном от вещества пространстве электромагнитные волны могут распространяться только со скоростью  $c$ . Может ли скорость чего-либо превосходить этот предел скорости  $c$ ?

Рассмотрим движение заряженных частиц в ускорителе. Можно ли так разогнать частицы, чтобы они двигались со скоростью, большей  $c$ ? До сих пор мы в этом курсе еще не встречались

---

\*) Заметьте, что в этом отношении распространение света отличается от распространения звука. При анализе эффекта Доплера для звука мы должны были знать скорость среды относительно источника и приемника. Опыты Майкельсона и Морли говорят нам, что, рассматривая распространение света в свободном от вещества пространстве, мы должны забыть об эфире.

непосредственно с утверждением, которое отрицало бы возможность ускорения заряженных частиц до произвольно высоких скоростей.

Следующий опыт \*) иллюстрирует утверждение, что нельзя ускорить частицу до скорости, превышающей  $c$ . В этом опыте электроны ускорялись последовательно все более сильными электростатическими полями в ускорителе Ван-де-Граафа, а затем они двигались с постоянной скоростью через пространство, свободное от поля (рис. 10.39). Время их полета на измеренном расстоянии  $AB$ ,

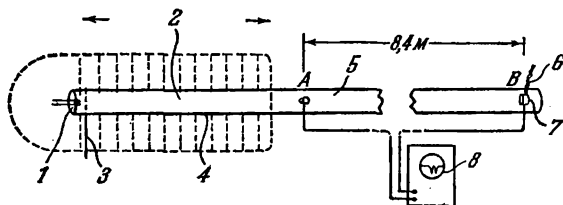


Рис. 10.39. Принципиальная схема опыта по определению предельной скорости. Электроны ускоряются однородным полем в левой части прибора, а время их пролета между  $A$  и  $B$  определяется с помощью осциллоскопа.

1 — горячий катод; 2 — однородное электрическое поле от ускорителя Ван-де-Граафа; 3 — сетка управления, действующая как затвор; 4 — трубка, находящаяся под вакуумом; 5 — электрическое поле отсутствует; 6 — термопара; 7 — алюминиевый диск; 8 — осциллоскоп показывает импульсы, поступающие из точек  $A$  и  $B$ .

следовательно, и их скорость измерялись непосредственно, а кинетическая энергия (переходящая в тепло при ударе о мишень в конце пути) измерялась с помощью калиброванной термопары.

В этом опыте с большой точностью была определена величина ускоряющего потенциала. Кинетическая энергия электрона равна

$$K = eEL = e\varphi,$$

где  $L$  — расстояние, на котором электрону сообщается ускорение, а  $\varphi = EL$  — разность электрических потенциалов на расстоянии  $L$ . Если  $\varphi = 10^6$  в, то электрон после ускорения приобрел энергию  $1 \cdot 10^6$  эв ( $1$  Мэв). Но  $10^6$  в равно  $10^6/300$  ед. СГСЭ<sub>v</sub>, так что приобретенная электроном кинетическая энергия равна

$$\frac{(4,80 \cdot 10^{-10}) \cdot 10^6}{300} \text{ эрг} \approx 1,60 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}. \quad (28)$$

Если через сечение пучка пролетают  $N$  электронов в секунду, то мощность, передаваемая алюминиевой мишени в конце их пути, должна быть равна  $1,60 \cdot 10^{-6} N$  эрг/сек. Это точно совпадает с непосредственным определением поглощенной мишенью мощности,

\*) Этот опыт был выполнен Бертоцци. См. Am. J. Phys. 32, 551 (1964).

производимым с помощью терморпары. Таким образом, подтверждается, что электроны отдали мишени всю кинетическую энергию, полученную в ходе их ускорения. Далее, на основании нерелятивистской механики мы ожидали бы, что

$$K = \frac{1}{2} mv^2, \quad (29)$$

так что график зависимости  $v^2$  от кинетической энергии  $K$  должен был бы быть прямой линией. Однако для энергий, превышающих примерно  $10^6$  эв, линейное соотношение между  $v^2$  и  $K$  эксперимен-

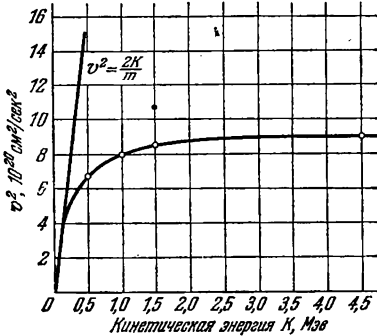


Рис. 10.40.

тально не выполнялось. Вместо этого наблюдалось, что скорость частиц при больших энергиях приближается к предельной величине  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек. Из экспериментальных результатов можно сделать следующий вывод: электроны получали от ускоряющего поля энергию, соответствующую теоретически рассчитанной, но их скорость не может увеличиваться беспрдельно. Многие другие эксперименты, как и описанный, свидетельствуют о том, что  $c$  — это верх-

ний предел скорости частиц. Таким образом, мы твердо убеждаемся, что  $c$  — это максимальная скорость передачи сигнала как с помощью частиц, так и с помощью электромагнитных волн;  $c$  — это предельная скорость.

Теперь мы подготовлены к изучению основ специальной теории относительности, излагаемых в гл. 11, так как из опыта мы знаем следующее:

1. Величина  $c$  инвариантна для инерциальных систем отсчета.
2.  $c$  — максимальная возможная скорость передачи сигнала.
3. Для распространения света имеют значение только относительные скорости инерциальных систем отсчета.
4. Принцип относительности Галилея *не выполняется* при больших относительных скоростях, потому что измерения длины и кинетической энергии в инерциальных системах отсчета должны соответствовать выводам 1 и 2.

5. При больших скоростях кинетическая энергия не пропорциональна  $v^2$ . На основании этого мы можем предполагать, что обнаружится изменение инертной массы в зависимости от скорости.

Мы рассказали только о небольшом числе опытов, подтверждающих специальную теорию относительности. Доказательства правильности этой теории, имеющиеся в настоящее время, следует считать весьма убедительными. Физики уверены в ее справедливости.

ности так же, как и в справедливости законов любой другой области физики. Наша ближайшая задача теперь состоит в том, чтобы точно сформулировать основные положения этой теории и усвоить некоторые следствия из нее.

### Задачи

1. *Эффект Доплера.* Космонавт хочет определить скорость, с которой его корабль приближается к Луне. Он посылает радиосигнал с частотой  $\nu = 5000 \text{ Мгц}$  и, сравнивая его частоту с частотой отраженного сигнала, получает разность в  $86 \text{ кгц}$ . Рассчитать скорость космического корабля относительно Луны (для многих целей можно считать достаточно точным нерелятивистское уравнение эффекта Доплера).

Ответ.  $2,6 \cdot 10^6 \text{ см/сек}$ .

2. *Красное смещение света от удаляющихся источников.* Спектральная линия, которая в лаборатории имеет длину волны  $5000 \text{ \AA}$ , наблюдается в спектре света от удаленной галактики при длине волны  $5200 \text{ \AA}$ .

а) Какова скорость удаления этой галактики?

Ответ.  $1,2 \cdot 10^9 \text{ см/сек}$ .

б) Каково расстояние до этой галактики?

Ответ.  $4 \cdot 10^{26} \text{ см}$ .

3. *Скорость света.* В знаменитом опыте Майкельсона по измерению скорости света восьмигранная призма с зеркальными гранями, вращающаяся вокруг своей оси, отражала пучок света от удаленного источника, а затем — второй раз отражала его обратно к наблюдателю, находящемуся вблизи источника. Условия опыта требуют, чтобы время между этими двумя отражениями равнялось одной восьмой периода вращения призмы. Расстояние, проходимое пучком в одном направлении, было равно  $L = (35,410 \pm 0,003) \text{ км}$ , а частота вращения призмы была определена как  $\nu = 529 \text{ об/сек}$  с точностью до  $3 \cdot 10^{-5} \text{ об/сек}$ .

а) Рассчитать по этим данным скорость света (надо внести поправку порядка  $10^{-6}$  от этой величины, учитывающую влияние атмосферы).

б) Оценить общую точность измерения  $c$ , учитывая также, что угол между двумя соседними боковыми гранями призмы был равен  $135^\circ \pm 0,1''$ .

4. *Затмения Ио.* Один из спутников Юпитера, Ио, обращается вокруг него по орбите радиусом  $4,21 \cdot 10^{10} \text{ см}$  со средним периодом обращения  $42,5 \text{ ч}$ . Ремер обнаружил, что этот период регулярно изменяется в течение года, причем периодичность этих изменений — около одного года. Максимальное отклонение периода обращения от средней величины было равно  $15 \text{ сек}$  и повторялось примерно через  $6$  месяцев. Движение Юпитера по орбите не учитывать.

а) Рассчитать расстояние, проходимое Землей за один период обращения Ио вокруг Юпитера.

Ответ.  $4,5 \cdot 10^{11} \text{ см}$ .

б) Когда период обращения Ио кажется наибольшим?

в) Использовать предыдущий результат вместе с названными данными для определения величины скорости света.

г) Определить накопившееся за последующие шесть месяцев время кажущегося запаздывания затмений Ио и доказать, что это как раз то время, за которое свет проходит диаметр орбиты Земли.

д) Если рассматривать систему Ио — Юпитер как источник света, модулированный с частотой  $1/42,5 \text{ ч}^{-1}$ , то измерения наблюдаемого периода можно описывать как эффект Доплера. В соответствии с этим рассчитать величину скорости света.

5. *Параллакс звезд.* Существование параллакса звезд было предсказано Аристархом Самосским (200 лет до нашей эры) и было достоверно установлено Бесселем в 1838 г. Известно, что неудачная попытка определения параллакса принадлежит Бредли, открывшему вместо этого абerrацию света звезд. В течение года кажущееся положение звезды смещается вследствие абerrации между двумя крайними точками, отстоящими примерно на  $40$  дуговых секунд.

а) Каково было бы расстояние в парсеках до звезды с параллаксом  $20''$ ? Известно, что ближайшая звезда —  $\alpha$  Центавра находится на расстоянии около 1,3 парсека.

О т в е т. 0,05 парсека.

б) Доказать, что вызванное aberrацией кажущееся годовое движение звезд, расположенных вблизи эклиптики, совершается по линейному отрезку, угловое расстояние между концами которого равно  $40''$ .

6. *Вращение галактик.* В 1916 г., еще до того, как были определены огромные расстояния до туманностей (галактик), сообщалось, что спиральная туманность M101 вращается подобно твердому телу с периодом 85 000 лет. Наблюдаемый угловой диаметр ее равен  $22'$ .

Расчитать, каково должно быть максимальное возможное расстояние до этой туманности, если указанный период определен правильно, а края туманности не могут двигаться быстрее, чем со скоростью  $c$ . [Последние измерения для звезд системы M101 показывают, что она находится на расстоянии  $8,5 \cdot 10^{24}$  см. По-видимому, в 1916 г. была определена завышенная величина скорости вращения.]

7. *Переменные звезды.* 200-дюймовый телескоп обсерватории Маунт Паломар дает возможность различать отдельные звезды в галактиках, находящихся на расстояниях около  $3 \cdot 10^{25}$  см. Один из методов измерения расстояний этого порядка величины основан на определении периода изменения яркости переменных звезд типа Цефеид. Звезда типа Цефеид — это гравитационно неустойчивая звезда, обнаруживающая периодические пульсации, при которых ее радиус может измениться примерно на 5—10%. Температура звезды изменится с таким же периодом, как и ее радиус, так что наблюдатель обнаруживает периодические изменения ее яркости. Были измерены периоды продолжительностью всего несколько часов. В нашей Галактике находится Цефеиды с яркостью, в  $2 \cdot 10^4$  раза большей яркости Солнца, и периодом изменения яркости 50 суток.

а) Пользуясь соотношением между расстоянием и скоростью, определить скорость радиального движения галактики, находящейся на расстоянии  $3 \cdot 10^{25}$  см.

б) Каким бы должен быть кажущийся период изменения яркости этой Цефеиды, если бы она была в галактике, находящейся на указанном выше расстоянии?

8. *Новые звезды.* Астрономы иногда наблюдают «взрыв» звезды, при котором часть вещества из ее наружных слоев выбрасывается с большой скоростью. Такая звезда называется *новой звездой*. Недавно новая звезда, которая после взрыва была окружена оболочкой, наблюдалась визуально. Было найдено, что угловой диаметр оболочки увеличивается со скоростью  $0,3''$  в год. Спектр новой звезды представляет собой обычный звездный спектр с дополнительными широкими линиями испускания, ширина которых в единицах длин волн остается постоянной и равной около 10 Å (в области длин волн 5000 Å), хотя интенсивность этих линий ослабевает. Их ширина истолковывается как мера смещения Доплера между излучением частей оболочки, приближающихся к нам и удаляющихся от нас. Определить расстояние до новой звезды, если эта оболочка оптически прозрачна (при этом предполагается, что мы получаем столько же света с дальнего полушария, сколько и с ближнего).

О т в е т.  $1,2 \cdot 10^{21}$  см.

9. *Скорости движения галактик.* Распределение измеренных радиальных скоростей движения галактик относительно Земли не является изотропным для всех известных галактик во Вселенной. Причины этой анизотропии: движение Солнца (т. е. его орбитальная скорость) относительно центра нашей Галактики и собственное движение нашей Галактики относительно локальной межгалактической системы отсчета. Примем во внимание все галактики, находящиеся на определенном расстоянии, например  $3,26 \cdot 10^7$  световых лет.

а) Какова средняя радиальная скорость этих галактик?

б) Где будет находиться среднее положение линии  $H_\alpha$  водорода (длина ее волны, измеренная в лаборатории,  $\lambda_{H\alpha} = 6,563 \cdot 10^{-8}$  см) в спектрах галактик?

Для нашего примера мы найдем, что в определенном направлении скорости галактик на 300 км/сек больше средней величины, а точно в противоположном направлении они настолько же меньше.

в) Какова скорость Солнца в этой системе отсчета?



г) Обязательно ли она равна орбитальной скорости движения Солнца вокруг центра нашей Галактики?

д) Предполагая, что эта скорость равна орбитальной скорости, оценить величину массы нашей Галактики, принимая, что вся ее масса сосредоточена в ее центре и что орбита Солнца является круговой (расстояние до центра Галактики равно 3500 световым годам). Сравнить эту величину с приведенным выше значением  $8 \cdot 10^{44}$  г для массы Галактики и объяснить разницу.

О т в е т. а) Средняя скорость галактик, рассчитанная по соотношению между скоростью и расстоянием, равна 1000 км/сек.

б) Средняя длина волны линии  $H_{\alpha}$  будет равна  $6,584 \cdot 10^{-5}$  см.

в) 300 км/сек.

г) Нет, так как в нее может входить скорость движения Галактики как целого относительно этой системы отсчета.

д)  $4,5 \cdot 10^{43}$  г. Эта величина меньше обычно приводимой, потому что значительная часть массы нашей Галактики не находится в ее центре, — действительно, большая часть массы находится во внешней относительно Солнца части Галактики, где она не будет влиять на движение Солнца или не может быть обнаружена таким способом.

10. Вращение звезд. По наблюдениям за поверхностью Солнца видно, что оно медленно вращается, с периодом в 25 суток на экваторе. Однако некоторые звезды вращаются значительно быстрее. Как это можно определить, если звезды настолько удалены от нас, что мы их видим как светящиеся точки?

### Д о п о л н е н и е. Излучение гамма-лучей при отсутствии отдачи

Атомное ядро, находящееся в возбужденном энергетическом состоянии, может испустить фотон гамма-излучения, совершая переход в основное, или невозбужденное, состояние. Может произойти также обратный процесс: ядро, находящееся в своем основном состоянии, поглощая фотон, переходит при этом в возбужденное состояние.

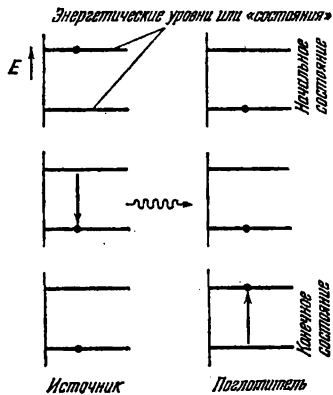


Рис. 10.41.

Предположим, что имеется источник излучения, содержащий возбужденные ядра атомов (рис. 10.41). С течением времени этот источник будет излучать фотоны. Предоставим этим фотонам падать на поглотитель, содержащий подобные же ядра в их основном состоянии. Эти ядра

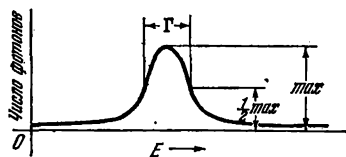


Рис. 10.42.

поглотят падающие фотоны и затем будут сами излучать фотоны. Явление поглощения и последующего излучения называется ядерной флуоресценцией. Как показано на рис. 10.42, величины энергии фотонов, излученных как источником, так и поглотителем, будут находиться в интервале, приближительная ширина которого равна  $\Gamma$ .

Хорошим примером является ядро атома  $Fe^{57}$ . Оно образуется в возбужденном состоянии как продукт радиоактивного распада  $Co^{57}$ . Ядро  $Fe^{57}$  в возбужденном состоянии испускает фотон с энергией 14,4 кэВ, переходя при этом в ядро  $Fe^{57}$  в основном состоянии.

Представим себе, что ядро атома  $Fe^{57}$  находится в возбужденном состоянии в вакууме и до испускания остается неподвижным. В момент испускания фотона

это ядро приобретает импульс отдачи в направлении, противоположном направлению движения фотона.

а) Какова частота фотона с энергией  $14,4 \text{ кэВ}$ ? Вспомните, что  $E=h\nu$ , где  $E$  — энергия фотона, а  $h$  — постоянная Планка.

О т в е т.  $3,5 \cdot 10^{18} \text{ гц}$ .

б) Импульс фотона равен  $h\nu/c$ . Каков импульс отдачи ядра?

О т в е т.  $7,7 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/сек}$ .

в) Показать, что энергия отдачи ядра  $R$  равна

$$R = \frac{E^2}{2Mc^2},$$

где  $M$  — масса ядра, а  $E$  — энергия фотона. Оценить величину  $R$  (в электрон-вольтах) для  $\text{Fe}^{57}$ .

О т в е т.  $2 \cdot 10^{-8} \text{ эв}$ .

Энергетические уровни ядра не являются идеально узкими, а имеют ширину  $\Gamma$ , причем согласно принципу неопределенности

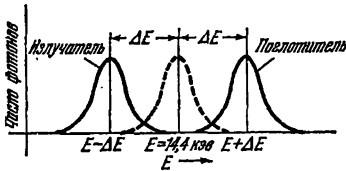


Рис. 10.43.

$$\Gamma \tau \approx \frac{\hbar}{2\pi},$$

где  $\tau$  — среднее время жизни состояния (см. рис. 10.42). Для  $\gamma$ -лучей с относительно малой энергией, подобно  $\gamma$ -лучам, испускаемым ядром  $\text{Fe}^{57}$ , ширина энергетических уровней ядра может быть намного меньше энергии отдачи  $R$ . В этом случае излучаемые  $\gamma$ -фотоны могут не поглощаться ядрами  $\text{Fe}^{57}$  в основном состоянии, потому что частота этих фотонов уже не соответствует энергии перехода (рис. 10.43).

Один из методов эффективной настройки частот излучателя и поглотителя заключается в придании источнику излучения скорости относительно поглотителя.

г) Какая величина этой скорости требуется для  $\text{Fe}^{57}$ ?

д) Мёссбауэр обнаружил, что в некоторых случаях при излучении фотонов определенными кристаллами импульс отдачи передается кристаллу как целому, а не отдельным ядрам атомов. При комнатной температуре около 70% всех фотонов, излучаемых кристаллом Fe, испускаются без отдачи \*).

Рассчитать  $R$  для фотона, излучаемого без отдачи, если масса кристалла Fe равна 1 г.

О т в е т.  $2 \cdot 10^{-26} \text{ эв}$ , т. е. совсем ничтожная величина.

\*) То есть без отдачи отдельными атомами. (Прим. ред.)

## ГЛАВА 11

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ДЛИНЫ И ВРЕМЕНИ

В результате опыта Майкельсона и Морли было установлено, что невозможно обнаружить движение Земли относительно мирового эфира. Для того чтобы понять этот результат, необходим революционный переворот в наших представлениях, а именно необходим следующий новый физический принцип, который можно сформулировать просто и ясно:

*Скорость света не зависит от движения его источника или приемника.*

Это означает, что скорость света имеет одну и ту же величину во всех системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно источника света. Многочисленные следствия, лежащие в основе специальной теории относительности, выводятся из этого нового утверждения, которым следует дополнить сформулированные выше (гл. 3) утверждения о том, что пространство изотропно и однородно и что основные физические законы имеют одинаковую форму в любых системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга.

От движения источника не зависит не только скорость распространения электромагнитных волн, т. е. фотонов: любые частицы с массой покоя (см. ниже), равной нулю, должны иметь скорость движения  $c$ , независимо от движения источника излучения; в частности, это справедливо для нейтрино и антинейтрино. Однако мы будем говорить о фотонах, потому что фотоны можно легче обнаружить, чем нейтрино.

Рассмотрим сначала световую волну, распространяющуюся от точечного источника. Волновой фронт (поверхность равной фазы) имеет форму сферической поверхности в системе отсчета, относительно которой источник света неподвижен. Но согласно сформулированному нами закону волновой фронт должен быть сферическим также и тогда, когда он наблюдается в системе отсчета, находящейся в равномерном и прямолинейном движении относительно источника; иначе на основании формы волнового фронта мы могли бы установить, что источник движется. Для выполнения

основного предположения о том, что скорость света не зависит от движения источника, требуется, чтобы по форме волнового фронта нельзя было сказать, находится ли источник в равномерном и прямолинейном движении или нет.

### 11.1. Преобразование Лоренца

Теперь мы будем искать такую форму преобразования координат и времени, чтобы величина скорости света была независимой от движения источника или приемника. Обозначим без штриха такую систему отсчета  $S$ , в которой источник неподвижен. Координаты

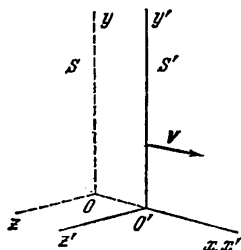


Рис. 11.1.  $S$  и  $S'$  — две инерциальные системы отсчета.  $S'$  движется со скоростью  $V$  относительно  $S$ .

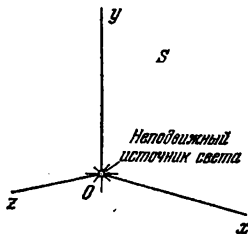


Рис. 11.2. Предположим, что в начале координат системы  $S$  находится неподвижный источник света.

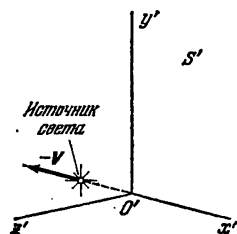


Рис. 11.3. В системе  $S'$  источник света имеет скорость  $-V$ .

и время, измеренные наблюдателем в  $S$ , мы будем обозначать буквами без штрихов:  $x, y, z, t$ . Если источник света находится в начале координат системы отсчета  $S$ , то для света, испускаемого в момент  $t=0$ , уравнение сферического волнового фронта имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (1)$$

Уравнение (1) описывает сферическую поверхность, радиус которой увеличивается со скоростью  $c$ .

Обозначим штрихом движущуюся систему отсчета  $S'$ . Координаты и время, измеренные наблюдателем в этой системе отсчета, обозначаются буквами со штрихами:  $x', y', z', t'$ . Для удобства предположим, что начало отсчета времени  $t'$  совпадает с началом отсчета  $t$  и что в этот совпадающий нулевой момент времени начало координат системы  $x'y'z'$  совпадает с положением источника света в системе  $S$ . Тогда для наблюдателя в системе  $S'$  уравнение сферического волнового фронта должно иметь следующий вид:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (2)$$

Величина скорости света  $c$  здесь та же, что и в системе отсчета  $S$ .

Предположим, что система отсчета  $S'$  движется в направлении  $+x$  с постоянной скоростью  $V$  относительно системы  $S$ . Преобразование Галилея (гл. 3) связывает величины, измеренные в двух системах отсчета, следующими уравнениями:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (3)$$

Если мы подставим (3) в (2), то получим

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \quad (4)$$

что, конечно, не согласуется с уравнением (1). Следовательно,

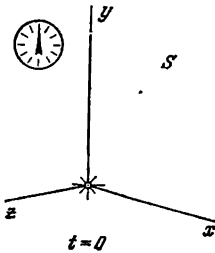


Рис. 11.4. Предположим, что источник испускает световой сигнал в момент времени  $t=0$ , отсчитанный по часам, неподвижным в системе отсчета  $S$ .

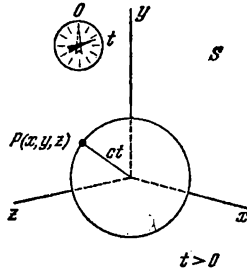


Рис. 11.5. Сферический волновой фронт достигнет точки  $P(x, y, z)$  в момент  $t = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} / c$ . Скорость распространения волнового фронта равна  $c$ .

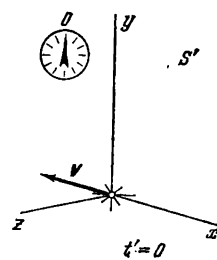


Рис. 11.6. Мы можем также наблюдать источник из системы отсчета  $S'$ . Мы можем поставить часы, неподвижные в системе  $S'$ , таким образом, что они покажут нуль в тот момент, когда испускается сигнал.

преобразование Галилея не удовлетворяет указанному требованию. Если верен закон постоянства скорости света, то должно существовать какое-то преобразование, переходящее при  $V/c \rightarrow 0$  в преобразование Галилея и преобразующее  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t'^2$  в  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ .

Мы ожидаем, что новое преобразование должно просто переводить  $y'$  и  $z'$  в  $y$  и  $z$ , потому что  $y'^2$  и  $z'^2$  в уравнении (2) преобразуются в  $y^2$  и  $z^2$  в уравнении (1) без дополнительных усилий. Нужно нам преобразование должно быть *линейным* относительно  $x$  и  $t$ , потому что мы хотим получить уравнение сферической поверхности, расширяющейся с постоянной скоростью. Бесплезно испытывать для этого функции  $x' = x^{1/2}t^{1/2}$ ,  $x' = \sin x$  или им подобные. Из уравнения (4) ясно видно, что мы не можем оставить без изменения преобразование  $t' = t$ , если мы хотим сократить нежелательные слагаемые  $-2xVt + V^2t^2$ , потому что для их сокращения, *безусловно, что-то должно быть прибавлено к  $t$ .*

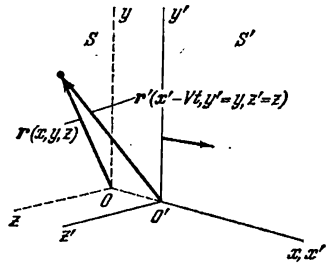


Рис. 11.7. Из преобразования Галилея следует, что в системе  $S'$  мы наблюдали бы сферический волновой фронт с центром в начале координат  $O$  системы  $S$ . На самом деле мы наблюдаем в системе  $S'$  сферический волновой фронт, но с центром в начале координат  $O'$  этой системы. Та же самая точка  $P'$  (теперь характеризующаяся координатами  $x', y', z'$ ) достигается волновым фронтом в момент  $t' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} / c$ . Очевидно, затруднение заключается в том, что преобразование Галилея противоречит постулатам специальной теории относительности. Нам необходимо другое преобразование. Возможно, окажется, что  $t' \neq t$ .

Испытаем сначала преобразование такого вида:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t + fx, \quad (5)$$

где  $f$  — постоянная, значение которой надо определить. Тогда уравнение (2) принимает следующий вид:

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2ftx + c^2f^2x^2. \quad (6)$$

Заметим, что члены, содержащие произведение  $xt$ , сокращаются, если принять

$$f = -\frac{V}{c^2} \quad \text{или} \quad t' = t - \frac{Vx}{c^2}. \quad (7)$$

При этом значении  $f$  можно переписать уравнение (6) таким образом:

$$x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t'^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \quad (8)$$

Это уже ближе к уравнению (1), но остается нежелательный масштабный множитель  $(1 - V^2/c^2)$ , на который умножаются  $x^2$  и  $t'^2$ .

Мы можем исключить и этот масштабный множитель, придав преобразованию следующий вид:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, & y' &= y, & z' &= z, \\ t' &= \frac{t - (V/c^2)x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}. \end{aligned}} \quad (9)$$

Это и есть *преобразование Лоренца* \*). Оно линейно относительно  $x$  и  $t$ ; оно переходит в преобразование Галилея при  $V/c \rightarrow 0$ ; при подстановке в уравнение (2) оно, как и требовалось, преобразует его в следующее уравнение:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \quad (10)$$

Таким образом, уравнение

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \quad (11)$$

*инвариантно* относительно преобразования Лоренца. Уравнение, описывающее волновой фронт, имеет, таким образом, одну и ту же форму во всех системах отсчета, движущихся с постоянной относительной скоростью. Применение системы уравнений (9) является единственным способом решения всех наших трудностей. Студент должен твердо запомнить преобразование Лоренца. Его не труднее заучить наизусть, чем какую-либо грамматическую форму неправильного глагола на иностранном языке.

\*) Это преобразование имеет длинную историю. Впервые оно использовалось Лармором в его книге «Aether and Matter» («Эфир и вещество») для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона и Морли. Лармор добивался точности только до величин порядка выше  $V^2/c^2$ ; на самом деле его результаты совершенно точны.

Законы распространения электромагнитных волн можно вывести из уравнений теории электромагнитных явлений. Неудивительно поэтому, что инвариантность уравнения (11) оказывает сильное влияние на форму уравнений электромагнетизма. Мы используем эту взаимную связь в т. II, где мы дадим вывод уравнений электромагнетизма с помощью преобразования Лоренца (9).

Удобно применять некоторые стандартные обозначения. Введем обозначение

$$\beta \equiv \frac{V}{c}, \quad (12)$$

т. е.  $\beta$  — это скорость, измеренная в такой системе единиц, для которой  $c=1$ . Удобно также ввести величину  $\gamma$ :

$$\gamma \equiv \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \equiv \frac{1}{(1-V^2/c^2)^{1/2}}. \quad (13)$$

Заметим, что  $\gamma \geq 1$ . В предельных релятивистских задачах  $1-\beta \ll 1$ ; полезно заметить, что при этом  $1-\beta^2 = (1-\beta)(1+\beta) \approx 2(1-\beta)$ .

С обозначениями  $\beta$  и  $\gamma$  преобразование Лоренца принимает следующий вид:

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right), \quad (14)$$

и, как легко видеть, ему соответствует такое обратное преобразование:

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right). \quad (15)$$

В задаче 2 читателю предлагается вывести формулы (15).

**Пример. Аберрация света.** В гл. 10 было показано, что для звезды, видимой в зените (когда скорость Земли перпендикулярна к линии наблюдения), угол наклона телескопа, т. е. угол аберрации света, определяется согласно уравнению (10.3):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_3}{c}. \quad (16)$$

Этот результат был выведен исходя из нерелятивистских предположений. Теперь в качестве элементарного упражнения в применении преобразования Лоренца рассмотрим задачу об аберрации света с релятивистской точки зрения.

Предположим, что в системе отсчета  $S$ , относительно которой звезда неподвижна, световой сигнал от этой звезды поступает

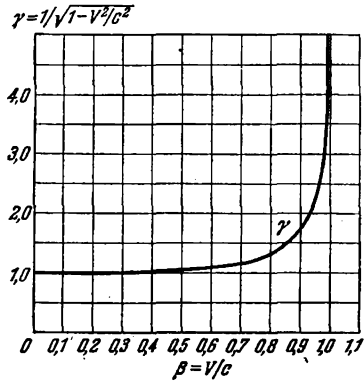


Рис. 11.8. Если  $V \ll c$ , то  $\gamma \approx 1$ . Вот почему преобразование Галилея хорошо выполняется для предметов, движущихся с «обычными» скоростями.

вдоль оси  $z$  при  $x=y=0$ . Система отсчета  $S'$ , в которой неподвижна Земля, движется со скоростью  $v_3$  в направлении  $x$ . Тогда траектория

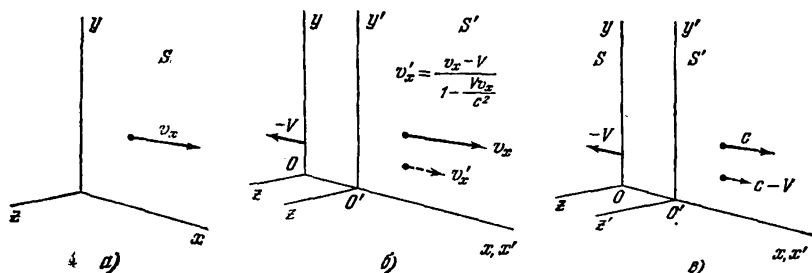


Рис. 11.9. а) Предположим, что в системе отсчета  $S$  частица имеет скорость  $v_x$ . б) Тогда в системе отсчета  $S'$  будет согласно преобразованию Лоренца  $v'_x = (v_x - V)/(1 - v_x V/c^2)$ . Согласно преобразованию Галилея было бы  $v'_x = v_x - V$ . в) Как мы знаем, согласно преобразованию Лоренца, если  $v_x = c$ , то также  $v'_x = c$ . Это с самого начала было основным постулатом нашей теории.

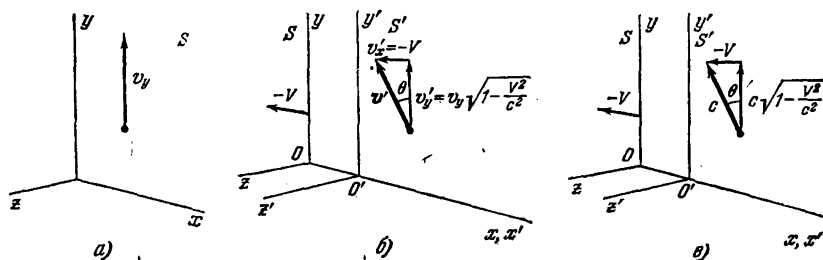


Рис. 11.10. а) Если в системе отсчета  $S$  частица имеет скорость  $v_y$  в направлении  $y$ , то составляющие ее скорости в системе отсчета  $S'$ , согласно преобразованию Лоренца, имеют величину, указанную на рисунке б);

$$|\operatorname{tg} \theta| = \frac{V}{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

в) В частности, если  $v_y = c$ , то результирующая скорость в системе  $S'$  также имеет величину  $c$ . Следовательно,

$$|\operatorname{tg} \theta| = \frac{V}{c \sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Это релятивистская формула аберрации.

светового сигнала определяется непосредственно из уравнений (14), в которых  $x=0$ :

$$x' = -\gamma\beta ct, \quad z' = z = ct, \quad t' = \gamma t. \quad (17)$$

Угол наклона определяется при этом так:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{x'}{z'} = \gamma\beta = \frac{v_3/c}{(1 - v_3^2/c^2)^{1/2}}. \quad (18)$$

В пределах точности измерений уравнение (18) совпадает с нерелятивистским уравнением (16), потому что для Земли  $v_3/c \approx 10^{-4}$ , но более правильным является уравнение (18).



**Пример. Сложение скоростей.** Предположим, что система отсчета  $S'$  движется с постоянной скоростью  $V\hat{x}$  относительно системы отсчета  $S$ . Пусть какая-то частица в свою очередь движется относительно системы отсчета  $S'$  с постоянной скоростью, составляющие которой равны  $v'_x, v'_y, v'_z$ . Каковы составляющие  $v_x, v_y, v_z$  скорости этой частицы относительно системы отсчета  $S$ ?

Из уравнений (15) получаем ( $\beta=V/c$ )

$$x = \gamma x' + \gamma \beta c t', \quad t = \gamma t' + \frac{\gamma \beta x'}{c}, \quad (19)$$

откуда следует:

$$dx = \gamma dx' + \gamma \beta c dt', \quad dt = \gamma dt' + \frac{\gamma \beta dx'}{c}. \quad (19a)$$

Таким образом,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma \beta c dt'}{\gamma dt' + \gamma \beta dx'/c} = \frac{v'_x + \beta c}{1 + \beta v'_x/c}, \quad (20)$$

или

$$v'_x = \frac{v_x + V}{1 + v_x V/c^2}. \quad (20a)$$

Этот результат можно сравнить с результатом, полученным в гл. 3 из преобразования Галилея:  $v_x = v'_x + V$ . Подобным же образом, так как  $y=y'$  и  $z=z'$ , получаем

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' + \gamma \beta dx'/c} = \frac{v'_y}{1 + v'_x V/c^2} (1 - V^2/c^2)^{1/2} \quad (20б)$$

и

$$v'_z = \frac{v_z}{1 + v_x V/c^2} (1 - V^2/c^2)^{1/2}. \quad (20в)$$

Обратное преобразование можно вывести с помощью уравнений (14) или посредством решения системы уравнений (20а), (20б), (20в) относительно составляющих скорости со штрихами:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \\ v'_y &= \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}, \\ v'_z &= \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (20г)$$

Предположим, что движущаяся частица — это фотон и в системе  $S'$  его скорость  $v'_x = c$ . Из уравнения (20а) мы видим, что

$$v_x = \frac{c + V}{1 + cV/c^2} = c. \quad (20д)$$

Скорость фотона равна  $c$  также в системе отсчета  $S$ . Преобразование Лоренца было специально предназначено для получения такого результата, и то, что мы получили одну и ту же величину в обеих системах отсчета, служит дополнительной проверкой инвариантности этого преобразования.

Если  $v_y = c$ , а  $v_x = 0$ , то  $v'_x = -V$  и  $v'_y = c(1 - V^2/c^2)^{1/2}$ , так что

$$\frac{v'_x}{v'_y} = -\frac{V}{c(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, \quad (20e)$$

как и в уравнении (18).

**Примеры. Сложение скоростей (частные случаи).** 1. Предположим, что две частицы движутся навстречу друг другу со скоростью  $v'_x = \pm 0,9c$ , измеренной в системе отсчета  $S'$ . Какова скорость одной частицы относительно другой? Чтобы решить эту задачу, примем за  $S$  систему отсчета, в которой частица со скоростью  $-0,9c$  неподвижна. Тогда скорость системы отсчета  $S'$  относительно системы  $S$  равна  $V = 0,9c$ , так что частица, имеющая скорость  $v'_x = +0,9c$  в системе  $S'$ , обладает скоростью в системе  $S$ :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \cong \frac{1,8c}{1 + (0,9)^2} = \frac{1,80}{1,81} c = 0,994c. \quad (21)$$

Заметьте, что относительная скорость этих двух частиц меньше  $c$ .

2. Если фотон движется со скоростью  $+c$  в системе отсчета  $S'$ , а сама система  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $+c$ , то скорость движения фотона, наблюдаемая относительно системы отсчета  $S$ , равна только  $+c$ , а не  $+2c$ . Существование предельной скорости является следствием уравнений сложения скоростей, выведенных нами из преобразования Лоренца. Далее, заметим, что *не существует* такой системы отсчета, в которой фотон (квант света) был бы неподвижен.

Саде выполнил красивый опыт (Phys. Rev. Letters 10, 271 (1963)), показывающий, что скорость  $\gamma$ -лучей постоянна (с точностью  $\pm 10\%$ ), независимо от скорости источника. В этом опыте сравнивались: источник со скоростью около  $1/2c$  и неподвижный источник. Цитируем по его статье:

«В наших опытах мы использовали аннигиляцию при пробеге позитронов. При аннигиляции центр масс системы, состоящей из позитрона и электрона, движется со скоростью около  $1/2c$ , а в результате аннигиляции испускаются два  $\gamma$ -кванта. В случае аннигиляции в неподвижном состоянии оба  $\gamma$ -кванта испускаются под углом  $180^\circ$  и их скорость равна  $c$ . В случае аннигиляции при пробеге этот угол меньше  $180^\circ$  и зависит от энергии позитрона. Если бы скорость  $\gamma$ -кванта складывалась со скоростью центра масс согласно классическому правилу сложения векторов, а не согласно преобразованию Лоренца, то  $\gamma$ -квант, движущийся с некоторой составляющей скорости в направлении пробега позитрона, должен был бы иметь скорость большую, чем  $c$ , а тот  $\gamma$ -квант, который имеет

составляющую скорости в противоположном направлении, должен иметь скорость меньшую, чем  $c$ . Так как оказалось, что при одинаковых расстояниях между счетчиками и пунктом аннигиляции оба  $\gamma$ -кванта достигают счетчиков в одно и то же время, то это доказывает, что и при движущемся источнике оба  $\gamma$ -кванта распространяются с одинаковой скоростью».

*Измерение длины объекта перпендикулярно к направлению относительной скорости.* Согласно преобразованию Лоренца

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (22)$$

Эти соотношения равносильны утверждению, что результат измерения длины, например, метровой линейки не зависит от ее скорости, если метровая линейка движется перпендикулярно к своей длине.

Как мы могли бы экспериментально проверить это утверждение? Мы можем взять метровую линейку и двигать ее с постоянной скоростью мимо другой, неподвижной метровой линейки. Нетрудно точно совместить начальные метки обеих метровых линеек. Тогда так же совместятся и метки «1 метр» на каждой линейке, или если при движении изменяется длина, то мы можем сделать на более длинной линейке риску, соответствующую метке «1 метр» на более короткой линейке. Эта операция дает объективный физический способ регистрации длины.

Пусть  $S$  — система отсчета, неподвижная относительно одной метровой линейки, а  $S'$  — система отсчета, неподвижная относительно другой. Предположим, что движение изменяет кажущуюся длину. Тогда, если физические законы должны оставаться одинаковыми как для наблюдателя в системе  $S$ , так и для наблюдателя в системе  $S'$ , то линейка, которая казалась более короткой наблюдателю в системе  $S$ , обязательно должна казаться более длинной наблюдателю в системе  $S'$ . Но это обращение ролей несовместимо с нашим физическим способом однозначной регистрации факта, что одна метровая линейка короче другой. Следовательно, длины, определенные и в системе  $S$  и в системе  $S'$ , должны быть равны. Смысл этого рассуждения главным образом заключается в подтверждении уравнения (22).

## 11.2. Сокращение длины

Представим себе линейку, лежащую вдоль оси  $x$  и неподвижную относительно системы отсчета  $S$ . Если линейка неподвижна, то в этой системе отсчета  $S$  координаты ее концов  $x_1$  и  $x_2$  не зависят от времени  $t$ . Следовательно, величина

$$L_0 = x_2 - x_1 \quad (23)$$

представляет собой *длину покоя* линейки.

Теперь будем рассматривать эту линейку в системе отсчета  $S'$ , движущейся со скоростью  $V\hat{x}$  относительно системы  $S$ , в которой линейка неподвижна. Для измерения длины линейки в системе  $S'$  мы определяем координаты точек  $x'_1$  и  $x'_2$ , совпадающих в данный

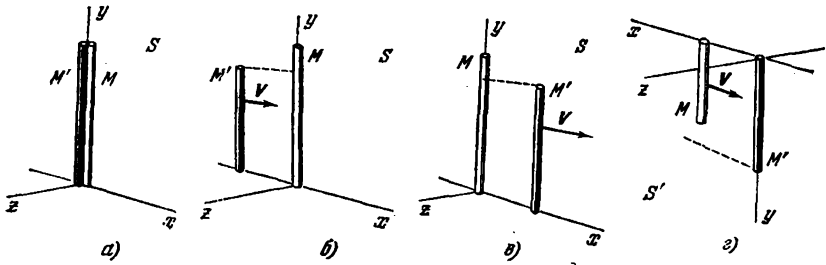


Рис. 11.11. а) Предположим, что имеются две одинаковые линейки  $M$  и  $M'$ , неподвижные в системе отсчета  $S$ . б) Предположим, что наблюдателю в системе  $S$  кажется короче линейка  $M'$ , движущаяся относительно  $S$ . в) Тогда мы можем сделать так, чтобы конец линейки  $M'$ , проходя мимо линейки  $M$ , нанес на ней риску. г) Риска является физическим результатом опыта, и она должна быть наблюдаемой в другой системе отсчета, т. е. в той системе отсчета (изображенной в перевернутом виде), в которой неподвижна линейка  $M'$ . Но теперь линейка  $M$  должна казаться короче, чем  $M'$ , потому что линейка  $M$  движется, а линейка  $M'$  неподвижна.

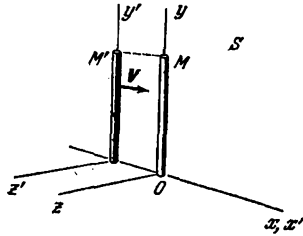


Рис. 11.12. Итак, мы пришли к противоречию, которое разрешимо только в том случае, если линейки  $M$  и  $M'$  имеют одинаковую длину, даже когда одна из них движется. Следовательно,  $y' = y$ . Аналогичное рассуждение приведет к равенству  $z' = z$ .

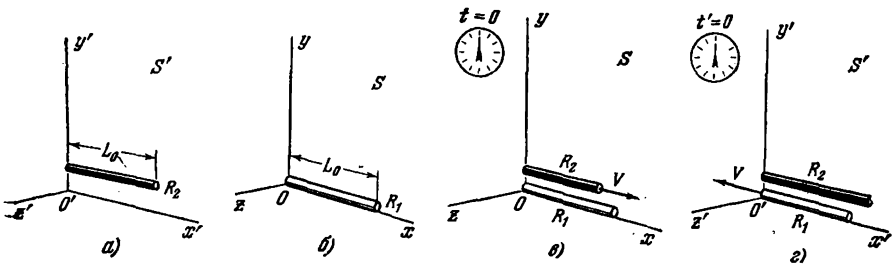


Рис. 11.13. а) Рассмотрим твердую линейку  $R_2$  с длиной  $L_0$ , измеренной в системе отсчета  $S'$ , относительно которой она неподвижна. б) Такая же твердая линейка  $R_1$  неподвижна в системе отсчета  $S$  и имеет в ней длину  $L_0$ . в) Преобразование Лоренца говорит нам, что длина линейки  $R_2$ , измеренная в системе  $S$ , равна  $L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Это и есть общеизвестное лоренцево сокращение размеров движущихся тел. г) В системе  $S'$  неподвижна линейка  $R_2$ , а  $R_1$  имеет скорость  $V$ . В системе  $S'$  сокращается размер линейки  $R_1$ .

момент  $t'$  с концами линейки. Естественно определить длину линейки  $L$  в движущейся системе отсчета  $S'$  как расстояние между точками  $x'_1$  и  $x'_2$ , которые *одновременно* (в системе отсчета  $S'$ ) совпадают с конечными точками линейки:

$$L = x'_2(t') - x'_1(t'). \quad (24)$$

На основании преобразования Лоренца (15) получаем

$$x_2 = x'_2(t') \gamma + ct' \beta \gamma, \quad x_1 = x'_1(t') \gamma + ct' \beta \gamma. \quad (25)$$

$$x_2 - x_1 = L_0 = [x'_2(t') - x'_1(t')] \gamma = L \gamma. \quad (26)$$

Таким образом,

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 (1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (27)$$

При этом мы пользуемся нашим определением  $\gamma$ :  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Это отношение длин представляет собой лоренц-фитцджеральдовое сокращение размера линейки, движущейся параллельно своей длине.

Для изучения внешнего вида быстро движущихся предметов, сфотографированных с помощью фотокамеры, следует обратиться к отличному обзору Вайскопфа \*). Например, посредством расчета траекторий там показано, что движущийся шар будет выглядеть на фотографии как шар, а не как эллипсоид.

Мы видели, что существует различие между случаями, когда метровая линейка расположена вдоль оси  $y$  и когда метровая линейка расположена вдоль оси  $x$ : формулы (22) отличаются от формулы (27). Когда метровая линейка расположена вдоль оси  $y$ , то нас не должны беспокоить вопросы об одновременности при сравнении длин движущейся и неподвижной метровых линеек. Если же метровая линейка расположена вдоль оси  $x$ , то вопрос об одновременности приобретает важное значение.

Это можно иллюстрировать другим примером. Мы легко можем синхронизировать ряд часов в системе  $S$ , т. е. в системе отсчета, относительно которой метровая линейка неподвижна. Пусть часы, находящиеся в точке  $x=0$ , и часы, находящиеся в точке  $x=L_0$  (на обоих концах метровой линейки), испускают в момент  $t=0$  по световому импульсу, направленному параллельно оси  $y$ . Пусть эти импульсы принимаются в системе отсчета  $S'$  двумя из ряда счетчиков, расположенных параллельно оси  $x'$ . На каком расстоянии друг от друга находятся два счетчика, которые зарегистрировали импульсы? Из уравнений (14) получаем значения координат обоих счетчиков:

$$x'_1 = 0 \cdot \gamma - c \cdot 0 \cdot \beta \gamma = 0, \quad (28)$$

$$x'_2 = L_0 \gamma - c \cdot 0 \cdot \beta \gamma = L_0 \gamma, \quad (29)$$

\*) V. F. Weisskopf, Physics Today 13, IX, 24—27 (1960).

так что расстояние между ними равно

$$x'_2 - x'_1 = L_0 \gamma = \frac{L_0}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (30)$$

Это не соответствует формуле (27)! Мы проделали *другой* опыт и получили другой результат. Наш прежний опыт основывался на естественном определении длины в системе  $S'$  при условии одновременности в этой же системе  $S'$ . В первом опыте производилось сравнение  $\Delta x'$  с  $\Delta x$ , когда  $\Delta t' = 0$ , а во втором опыте производилось сравнение  $\Delta x'$  с  $\Delta x$ , когда  $\Delta t = 0$ .

Из результата (30) второго опыта мы узнали косвенным путем, что два события, одновременные в системе  $S$ , в общем случае не одновременны в системе  $S'$ .

Таким образом, из формул (14) видно, что два события, *одновременные* ( $\Delta t = 0$ ) в системе  $S$ , но разделенные в пространстве расстоянием  $\Delta x$ , будут разделены в системе  $S'$  как в пространстве, так и во времени:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x, \quad c \Delta t' = -\beta \gamma \Delta x.$$

### 11.3. Замедление времени, измеряемого движущимися часами

Слово *замедление* по отношению к часам означает удлинение интервала времени. Рассмотрим часы, которые неподвижны в системе отсчета  $S$ . Результат измерения интервала времени в системе

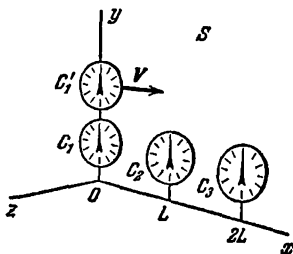


Рис. 11.14. В системе отсчета  $S$  часы  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  неподвижны; они расположены на равных расстояниях  $L$  по оси  $x$  и все синхронизированы. Часы  $C_1$  движутся со скоростью  $V$  относительно системы отсчета  $S$ . Предположим, что  $t' = 0$ , когда  $t = 0$ , как показано на рисунке.

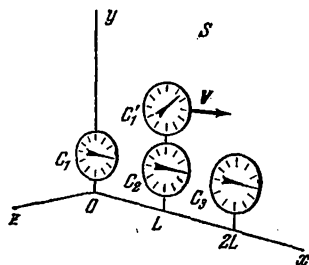


Рис. 11.15. Согласно преобразованию Лоренца

$$t' = (t - xV/c^2) \gamma = t \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

потому что  $x = L = Vt$ . Для наблюдателя в системе  $S$  движущиеся часы  $C_1$  идут медленнее.

отсчета, в которой часы *неподвижны*, обозначается буквой  $\tau$  и называется *собственным интервалом времени*. Предположим, что часы расположены в начале координат системы отсчета  $S$ , т. е. в точке, где  $x = 0$ . Применяя преобразование Лоренца (14) при постоянной величине  $x$ , получаем для величины интервала времени  $t'$ , измеренного часами в системе отсчета  $S'$ , движущейся со скоростью

$\hat{V}x$  относительно системы  $S$ , в которой находятся первые часы:

$$t' = \tau\gamma = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad (31)$$

Интервал времени, измеренный в движущейся системе отсчета  $S'$ , длиннее интервала времени в системе отсчета  $S$ .

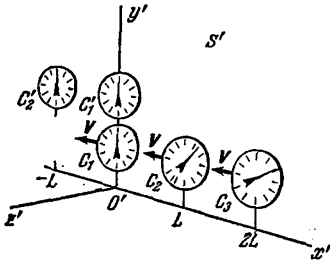


Рис. 11.16. В системе отсчета  $S'$  часы  $C_1, C_2$  и т. д. неподвижны, расположены друг от друга на расстояниях  $L$  и синхронизированы. Для наблюдателя в системе  $S'$  часы  $C_1, C_2, C_3$  не синхронизированы! Что они показывают?

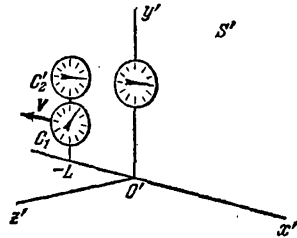


Рис. 11.17. Для наблюдателя в системе  $S'$  движущиеся часы  $C_1$  также идут медленнее! Где находятся часы  $C_2, C_3$  и что они показывают в этот момент?

Это явление называется замедлением времени. Кажется, что движущиеся часы идут медленнее находящихся в покое. Это нелегко понять интуитивно; пройдет, может быть, неделя или год, пока вы уловите смысл замедления времени. Причина кажущегося парадокса

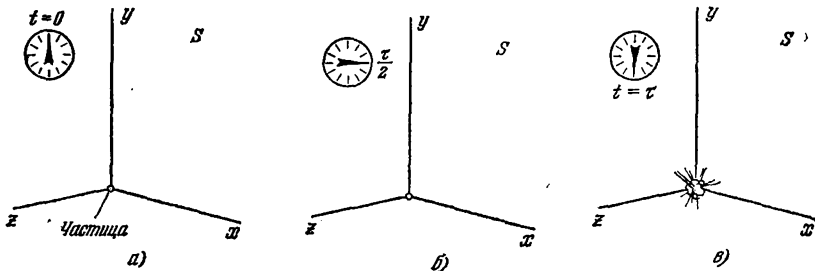


Рис. 11.18. Другой пример замедления времени: а) нестабильная частица неподвижна в системе отсчета  $S$ . Мы начинаем наблюдать за нею в момент  $t=0$ . Проходит время (б), и частица распадается (в) в момент  $t=\tau$ .

кроется в инвариантности величины  $c$ . Подобное явление должно совершаться с часами любого типа. В частности, если  $\tau$  представляет собой период полураспада мезонов или радиоактивных атомов, измеренный в системе отсчета  $S$ , в которой распадающиеся частицы

неподвижны, то

$$t' = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad (32)$$

— это период полураспада, наблюдаемый в системе отсчета  $S'$ , в которой частицы движутся со скоростью  $\beta$ .

Пр и м е р. *Время жизни  $\pi^+$ -мезонов.* Известно, что  $\pi^+$ -мезон распадается на  $\mu^+$ -мезон и нейтрино \*). Среднее время жизни  $\pi^+$ -мезона в системе отсчета, относительно которой он неподвижен,

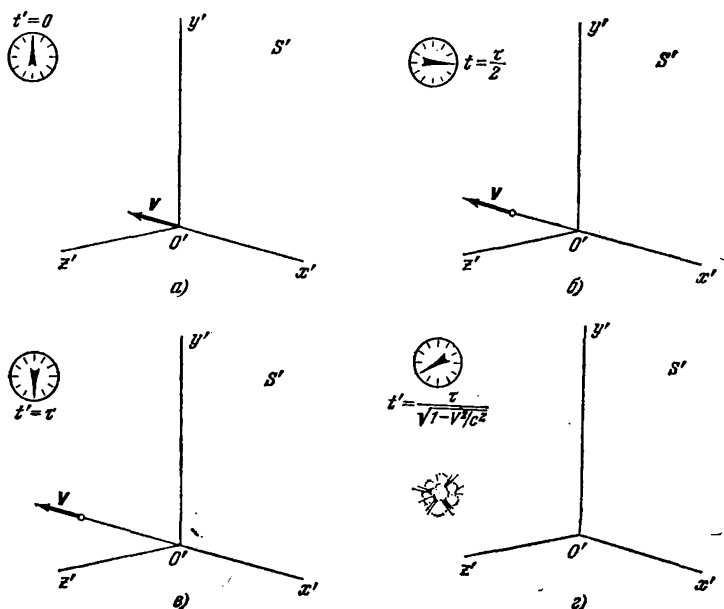


Рис. 11.19. То же явление наблюдается в системе отсчета  $S'$ . Теперь частица движется со скоростью  $V$ . а) Мы начинаем наблюдать за нею в момент  $t'=0=t$ . Проходит время (б), но в момент  $t'=\tau$  (в) частица еще не распалась! Для наблюдателя в системе отсчета  $S'$  частица распадается (г) в момент  $t'=\tau(1-V^2/c^2)^{-1/2}$ .

равно  $2,5 \cdot 10^{-8}$  сек (подробнее о среднем времени жизни частиц см. гл. 15). Каково будет среднее время жизни пучка  $\pi^+$ -мезонов, испускаемого со скоростью  $\beta \approx 0,9$ , если измерять это время относительно лабораторной системы отсчета?

Собственное среднее время жизни  $\pi^+$ -мезона равно  $2,5 \cdot 10^{-8}$  сек. Если  $\beta \approx 0,9$ , то  $\beta^2 \approx 0,81$  и, согласно (31), следует ожидать, что время жизни этой частицы в лабораторной системе отсчета будет равно

$$t^* \approx \frac{2,5 \cdot 10^{-8}}{(1-0,81)^{1/2}} \approx 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ сек.}$$

\*)  $\pi^+$ -мезон — это положительно заряженная неустойчивая частица с массой около  $273 m$ , где  $m$  — масса электрона;  $\mu^+$ -мезон имеет массу около  $215 m$ ; нейтрино имеет массу покоя, равную нулю.



Таким образом, в среднем частица пройдет до распада гораздо большее расстояние, чем то, которое мы получили бы из нерелятивистских соображений как произведение ее скорости на собственное среднее время жизни.

Опыты по определению времени жизни  $\pi^+$ -мезонов (положительных пионов) были описаны Дарбином, Лоаром и Хевенсом (*Phys. Rev.* 88, 179 (1952)). Результаты этих опытов хорошо согласуются с величиной рассчитанного замедления времени для соответствующей скорости. В этих опытах были образованы пучки  $\pi^+$ -мезонов, для которых

$$\beta = 1 - 5 \cdot 10^{-6};$$

их среднее время жизни в пучке равнялось  $2,5 \cdot 10^{-6}$  сек, т. е. было в 100 раз больше собственного времени жизни покоящихся  $\pi^+$ -мезонов.

Рассмотрим пучок  $\pi^+$ -мезонов, движущихся со скоростью, почти равной  $c$ . Если бы не существовало релятивистского замедления времени, то до распада они прошли бы в среднем расстояние, равное  $(2,5 \cdot 10^{-8} \text{ сек}) \cdot (3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}) \approx 700 \text{ см}$ . В действительности из-за замедления времени они проходят значительно дальше. Водородная пузырьковая камера Радиационной лаборатории Лоуренса находится на расстоянии около 100 м от источника пионов \*) в бэватроне. Расстояние, проходимое пионами до их распада, имеет порядок величины  $(2,5 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^{10}) \approx 7 \cdot 10^4 \text{ см}$ , или примерно в 100 раз больше того расстояния, которое они проходили бы до распада, если бы не было явления замедления времени. В физике элементарных частиц при расчете приборов для опытов с высокими энергиями учитываются большие длины пробега, обусловленные законами теории относительности. Выше было сказано, что почти каждый физик, работающий в области физики высоких энергий, ежедневно убеждается в правильности специальной теории относительности. Он применяет преобразование Лоренца с такой же уверенностью, с какой физики девятнадцатого столетия применяли законы Ньютона.

Покажем на основании простого рассуждения, что явление замедления времени представляет собой обязательное следствие инвариантности скорости света. Поместим в системе отсчета  $S$  эталонные часы. Эти часы можно использовать для измерения интервала времени  $\tau$ , в течение которого световой сигнал проходит постоянное расстояние  $L$  от неподвижного источника до неподвижного зеркала и такое же расстояние обратно. Путь, по которому распространяется луч света, параллелен оси  $y$ . Таким образом,

$$\tau = \frac{2L}{c}. \quad (33)$$

Это время может быть отсчитано по циферблату или отпечатано приборами на листе бумаги. Наблюдатели, находящиеся в любой

\*) Сокращенное название  $\pi$ -мезонов. (Прим. ред.)

системе отсчета, могут видеть отпечатанную запись времени прохождения сигнала, и все они согласятся, что часы в неподвижной системе отсчета  $S$  показали время  $\tau$ . Но что показывают их собственные часы, не неподвижные относительно системы  $S'$ ? Мы рассматриваем тот случай, когда  $L$  направлено параллельно оси  $y$ .

Наряду с измерением в системе отсчета  $S$ , наблюдатель в системе отсчета  $S'$  (движущейся равномерно в направлении  $x$  относительно системы  $S$ ) также может измерить интервал времени, в течение которого происходит опыт по отражению света. Наблюдатель в системе  $S'$  сделает это, пользуясь рядом синхронизированных часов, неподвижных относительно этой системы  $S'$ . Мы включаем двое часов, неподвижных в системе  $S'$ , в одно и то же время (т. е. синхронизируем их), давая сигнал от источника света, находящегося посередине между ними; каждые часы начинают отсчет с нуля в тот момент, когда до них доходит этот сигнал. Этот способ синхронизации можно применять и к другим часам. Мы можем также синхронизировать любое число часов в одной системе отсчета, устанавливая их, когда они пространственно находятся вплотную друг к другу, а затем медленно перемещая эти часы, пока они не попадут в желаемые положения.

Можно произвести отсчет по любым часам в системе  $S'$ . Все другие часы, неподвижные в системе  $S'$ , обязательно отсчитают тот же самый интервал времени. В частности, мы можем произвести отсчеты по тем часам в системе  $S'$ , которые находятся ближе всего в пространстве к единственному часам в системе  $S$ , используемым для опыта по отражению. Какие-то одни часы в системе отсчета  $S'$  будут ближе всего к стандартным часам в системе  $S$ , и по ним будет производиться отсчет времени, когда в системе отсчета  $S$  дается световой сигнал. В момент, когда этот световой сигнал возвращается и отмечается часами в системе отсчета  $S$ , к этим часам будут ближе всего другие часы в системе  $S'$ , по которым и будет производиться второй отсчет времени для системы  $S'$ .

Путь, пройденный светом в системе  $S$ , равен  $2L$ . Но путь, измеренный в системе  $S'$ , длиннее, потому что за время прохождения светового сигнала от источника к зеркалу прибор в системе  $S$  передвинулся относительно  $S'$  на расстояние  $V \cdot \frac{1}{2} t'$ , а за время прохождения сигнала в обратном направлении прибор передвинется еще на  $V \cdot \frac{1}{2} t'$ . Здесь  $t'$  — это время, наблюдаемое в системе  $S'$ . Расстояние, пройденное сигналом в системе отсчета  $S'$ , равно

$$2 \left[ L^2 + \left( \frac{1}{2} V t' \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Это расстояние должно быть равно  $ct'$ , потому что световой сигнал всегда движется со скоростью  $c$ . Следовательно,

$$(ct')^2 = 4L^2 + (Vt')^2, \quad (34)$$

или

$$t' = \frac{2L}{(c^2 - V^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (35)$$

или

$$t' = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad (36)$$

т. е. точно так же, как в уравнении (31). Наблюдателю в системе  $S'$  будет казаться, что часы в системе  $S$  идут медленнее, потому что эти часы в системе  $S$  показали время  $\tau$ , меньшее, чем время  $t'$ .

Мы видим, что явление замедления времени совсем не связано с таинственными процессами внутри атомов; оно возникает в процессе измерения. Часы, неподвижные в системе  $S$ , показывают собственное время  $\tau$ , т. е. время, определяемое наблюдателем, неподвижным в системе  $S$ ; такие же часы, неподвижные в системе  $S'$ , тоже покажут время  $\tau$ , когда отсчет по ним ведется наблюдателем, неподвижным в системе  $S'$ . Но когда мы отсчитываем в системе  $S'$  промежуток времени, который в системе  $S$  равен  $\tau$ , то мы имеем более длинный промежуток, потому что длиннее путь, по которому распространяется свет. Так будут вести себя часы любого типа.

Повторяем, что в этих свойствах часов нет ничего таинственного. Если что-то и является таинственным в специальной теории относительности, то это постоянство скорости света. Установив это постоянство, можно отсюда непосредственно и довольно просто вывести все остальное. Однако необходимо тщательно проанализировать все новые соотношения. Здесь имеется множество кажущихся парадоксов. Может быть, наибольшей известностью из них пользуется так называемый «парадокс близнецов» \*).

**П р и м е р. Продольный эффект Доплера.** Рассмотрим два световых сигнала, посланных в моменты  $t=0$  и  $t=\tau$  источником, покоящимся в точке  $x=0$  системы отсчета  $S$ . Система отсчета  $S'$  движется со скоростью  $V\hat{x}$  относительно системы  $S$ . Первый сигнал принимается в точке  $x'=0$  системы  $S'$  в момент  $t'=0$ . Положение той точки в системе  $S'$ , которая в момент  $t=\tau$  совпадает с точкой  $x=0$ , определяется из преобразования Лоренца (14):

$$x' = \frac{x-Vt}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{-V\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad (37)$$

если принять  $x=0$ . Соответствующее время в системе отсчета  $S'$  равно

$$t' = \frac{t-Vx/c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \quad (38)$$

Время, необходимое для того, чтобы второй сигнал прошел в системе  $S'$  путь от точки  $-V\tau/(1-\beta^2)^{1/2}$  до начала координат, равно

$$\Delta t' = \frac{\tau V/c}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad (39)$$

---

\*) Об этом парадоксе см., например, Д. В. Скобелев, Парадокс близнецов в теории относительности, «Наука», 1966. (Прим. ред.)

так что в системе  $S'$  весь интервал времени между приемом двух сигналов в точке  $x'=0$  равен

$$t' + \Delta t' = \tau \frac{1+V/c}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \tau \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad (40)$$

Время между двумя сигналами можно также истолковать как время, прошедшее между прохождением через одну точку двух

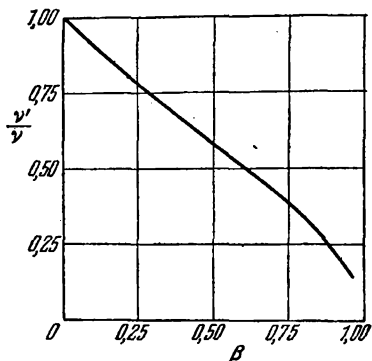


Рис. 11.20. Релятивистский продольный эффект Доплера.  $v'$  — частота света, принимаемого наблюдателем, удаляющимся от источника света со скоростью

$$\beta = \frac{V}{c}.$$

Источник излучает свет с частотой  $v$ .

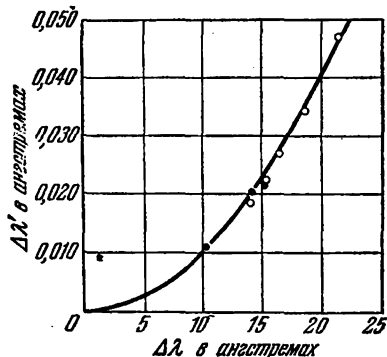


Рис. 11.21. График зависимости рассчитанного и экспериментально определенного сдвига второго порядка  $\Delta\lambda'$ , отложенного по вертикальной оси, от доплеровского сдвига первого порядка  $\Delta\lambda$ , отложенного по горизонтальной оси (по данным Айвса и Стиллуэлла). Черные кружки относятся к наблюдениям за одной спектральной линией, а светлые кружки — к наблюдениям за другой спектральной линией.

последовательных узлов световой волны. Частота световых колебаний обратна по величине их периоду, т. е.

$$v' = v \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \quad (41)$$

Здесь  $v'$  — частота, принимаемая в системе  $S'$ , а  $v$  — частота, передаваемая в системе  $S$ . Если приемник удаляется от источника, то величина  $\beta = V/c$  положительна и  $v' < v$ . Если приемник приближается к источнику, то мы должны считать  $\beta$  отрицательной величиной, а  $v' > v$ . Перейдя к длинам волн  $\lambda = c/v$ ,  $\lambda' = c/v'$ , получаем

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad (42)$$

Уравнение (41) описывает релятивистский продольный эффект Доплера для световых волн в вакууме. Величина смещения частот, определяемая из уравнения (41), с точностью до величин порядка  $\beta$

согласуется с результатом нерелятивистской теории эффекта Доплера, выведенным в гл. 10. Правильность слагаемого порядка  $\beta^2$  при разложении в ряд уравнения (41) была экспериментально подтверждена Айвсом и Стилуэллом.

Айвс и Стилуэлл (Opt. Soc. Am. 28, 215 (1938); 31, 369 (1941)) выполнили спектральные опыты с пучками водородных атомов, находившихся в возбужденных электронных состояниях. Атомы, входившие в состав молекулярных водородных ионов  $H_2^+$  и  $H_3^+$ , ускорялись в сильном электрическом поле. Как продукт распада ионов образовывался атомарный водород. Скорость его атомов имела величину порядка  $\beta=0,005$ . Айвс и Стилуэлл определяли смещение средней длины волны отдельной спектральной линии, испускаемой атомами водорода. Средняя величина бралась по направлениям вперед (в) и назад (н) относительно траектории полета атомов. Из (42) получаем, считая  $\beta_v = -\beta_n$ , что средняя длина волны

$$\frac{1}{2}(\lambda_v + \lambda_n) = \frac{1}{2}\lambda_0 \left( \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right) = \frac{\lambda}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \quad (43)$$

Итак, среднее положение смещенных линий сдвигается относительно длины волны  $\lambda_0$  света, излучаемого покоящимся атомом, на величину порядка  $\beta^2$ . В статье, опубликованной в 1941 г., Айвс и Стилуэлл сообщили, что наблюдаемое смещение средней длины волны равно  $0,074 \text{ \AA}$ , в то время как при расчете по формуле (43) для величины  $\beta$ , определенной по значению ускоряющего потенциала, приложенного к исходным ионам, получается смещение  $0,072 \text{ \AA}$ . Это является превосходным подтверждением релятивистской теории эффекта Доплера.

*Поперечный эффект Доплера* относится к наблюдениям, произведенным под прямым углом к направлению перемещения источника света, которым обычно является атом. В нерелятивистском приближении вообще нет поперечного эффекта Доплера. Теория относительности предсказывает существование этого поперечного эффекта Доплера для световых волн. Отношение частот должно быть обратным отношению интервалов времени в формуле (31), т. е.

$$\nu' = (1 - \beta^2)^{1/2} \nu, \quad (44)$$

где  $\nu$  — частота в системе отсчета, относительно которой атом неподвижен, а  $\nu'$  — частота, наблюдаемая в системе отсчета, движущейся относительно атома со скоростью  $V = \beta c$ .

#### 11.4. Часы, движущиеся с ускорением

В специальной теории относительности описываются и рассматриваются измерения, результаты которых не зависят от детального строения реальных тел. Теория ничего не говорит о динамическом действии ускорения, например о напряжениях, вызванных уско-

рением. Если такие напряжения отсутствуют или ими можно пренебречь, то эта теория может дать нам однозначное описание влияния ускорения на ход часов. Получается такой результат, как если бы в каждый момент часы, движущиеся с ускорением, перемещались с различной скоростью, но для каждой данной мгновенной скорости их ход можно рассчитать по уравнению (31).

Если это утверждение справедливо, то из него вытекают два следствия:

1. Если скорость движения часов постоянна по величине, но изменяется ее направление, то уравнение (31) выполняется без изменений. Система отсчета, связанная с часами, является неинерциальной.

2. Если эта скорость остается постоянной, за исключением коротких интервалов ускоренного или замедленного движения (интервалов, исчезающе коротких по сравнению со всем периодом времени), то уравнение (31) все-таки будет точно описывать соотношение между собственным временем и стационарным лабораторным временем.

Быстрая заряженная частица в постоянном магнитном поле движется с ускорением, перпендикулярным к направлению ее движения, а величина ее скорости совсем не изменяется. Если частица неустойчива, то измеренный период полураспада должен быть в точности равен тому периоду полураспада, который получился бы, если бы она двигалась прямолинейно с той же скоростью в отсутствие магнитного поля. Это предсказание подтверждается опытами с  $\mu^-$ -мезонами, распадающимися с периодом полураспада  $2,2 \cdot 10^{-6}$  сек на электрон и нейтрино. Одно и то же собственное время полураспада наблюдается как для свободно движущихся  $\mu^-$ -мезонов, так и для  $\mu^-$ -мезонов, совершающих спиральное движение в магнитном поле или даже неподвижных. Общеизвестно, что специальная теория относительности дает достаточно точное описание кругового (т. е. ускоренного) движения заряженных частиц в магнитном поле.

## Задачи

1. *Инвариант Лоренца.* Проверить, что из уравнений (14) следует:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2.$$

Заметьте, что если мы напишем:  $x_1 \equiv x$ ,  $x_4 \equiv ict$ ,  $i \equiv \sqrt{-1}$ , то

$$x^2 - c^2 t^2 \equiv x_1^2 + x_4^2.$$

2. *Преобразование Лоренца.* Вывести уравнения (15) из уравнений (14).

3. *Изменение объема.* Доказать, что если  $L_0^3$  — объем куба, покоящегося относительно системы отсчета  $S$ , то величина

$$L_0^3 (1 - \beta^2)^{1/2}$$

представляет собой его объем, наблюдаемый в системе отсчета  $S'$ , движущейся с постоянной скоростью  $\beta$  в направлении, параллельном ребру этого куба.

4. *Одновременность событий.* Исходя из преобразований Лоренца, показать, что два события, совершающиеся в системе отсчета  $S$  одновременно ( $t_1 = t_2$ ), но в разных точках ( $x_1 \neq x_2$ ), в общем случае не являются одновременными в системе отсчета  $S'$ .

5. *Сложение скоростей.* Показать, что если в системе отсчета  $S'$  составляющие скорости света равны  $v_y = c \sin \varphi$  и  $v_x = c \cos \varphi$ , то в системе отсчета  $S$  также выполняется равенство  $v_x^2 + v_y^2 = c^2$ . Система отсчета  $S'$  движется со скоростью  $V\hat{x}$  относительно системы отсчета  $S$ .

6.  $\pi^+$ -мезоны. а) Каково среднее время жизни потока  $\pi^+$ -мезонов, движущихся со скоростью  $\beta = 0,73$  (собственное среднее время жизни  $\tau = 2,5 \cdot 10^{-8}$  сек)?  
 Ответ.  $3,6 \cdot 10^{-8}$  сек.

б) Какое расстояние проходит  $\pi^+$ -мезон при  $\beta = 0,73$  за среднее время его жизни?

Ответ. 800 см.

в) Какое расстояние прошел бы он при отсутствии релятивистских явлений?

Ответ. 500 см.

г) Дать ответы на вопросы а), б) и в) при  $\beta = 0,99$ .

7.  $\mu$ -мезоны. Собственное среднее время жизни  $\mu$ -мезона приблизительно равно  $2 \cdot 10^{-6}$  сек. Предположим, что мощный поток  $\mu$ -мезонов, образовавшихся на какой-то высоте в атмосфере, движется вниз со скоростью  $V = 0,99c$ . Число столкновений в атмосфере на их пути вниз невелико. Исходя из того, что поверхности Земли достигает только 1% от числа мезонов в исходном потоке, оценить их начальную высоту (в собственной системе отсчета потока  $\mu$ -мезонов число частиц, остающихся через время  $t$ , определяется уравнением  $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ ).

Ответ.  $2 \cdot 10^6$  см.

8. *Два события.* Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $S$  и  $S'$ . Пусть  $S'$  движется со скоростью  $V\hat{x}$  относительно  $S$ . В точке  $x'_1$  в момент  $t'_1$  происходит некоторое событие. В точке  $x_2$ , в момент  $t_2$  происходит другое событие. В момент  $t = t' = 0$  начала координат обеих систем совпадают. Найти значения времени и координат, соответствующие этим событиям в системе отсчета  $S$ .

9.  $\pi^+$ -мезоны. Поток, состоящий из  $10^4$   $\pi^+$ -мезонов, движется по круговой траектории радиусом 20 м со скоростью  $v = 0,99c$ . Собственное среднее время жизни  $\pi^+$ -мезона равно  $2,5 \cdot 10^{-8}$  сек.

а) Сколько мезонов останется, когда этот поток вернется в начальную точку движения?

б) Сколько мезонов осталось бы в потоке, если бы все они находились в неподвижности в начальной точке в течение того же промежутка времени?

10. *Скорость удаления галактик.* Как указывалось в гл. 10, данные относительно красного смещения излучения от далеких галактик свидетельствуют о том, что скорость их удаления, в нерелятивистской области значений, пропорциональна их расстоянию от нас:

$$V = \alpha r, \quad \alpha \cong 3 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-1}.$$

Рассчитать скорость удаления галактики, находящейся от нас на расстоянии  $3 \cdot 10^9$  световых лет. Является ли эта скорость релятивистской?

Ответ.  $8,5 \cdot 10^9$  см/сек.

11. *Скорость относительного движения галактик.* Наблюдатель на Земле определил, что одна галактика удаляется в определенном направлении со скоростью  $v = 0,3c$ , а другая галактика удаляется в противоположном направлении с такой же скоростью. Какова будет скорость удаления одной галактики относительно наблюдателя, находящегося в другой галактике?

12. *Одновременность событий.* Представим себе два события, совершающиеся в точках  $A$  и  $B$ , неподвижных относительно системы отсчета  $S$  и расположенных на равных расстояниях от наблюдателя, находящегося в точке  $O$  той же системы отсчета  $S$ . Предположим, что в некоторый момент времени (по определению наблюдателя  $O$  в системе отсчета  $S$ ), когда происходят оба события, положение второго наблюдателя  $O'$  и движущаяся вместе с ним со скоростью  $V\hat{x}$  относительно  $S$

система отсчета  $S'$  совпадают соответственно с положением первого наблюдателя  $O$  и его системой отсчета  $S$  (рис. 11.22). Примем  $V/c=1/3$ .

а) Изобразить положения двух систем отсчета и точек  $A, A', B, B'$  в момент, когда сигнал из  $B'$  достигает наблюдателя  $O'$ . Достиг ли этот сигнал наблюдателя  $O$ ? Почему?

б) Изобразить положения систем отсчета  $S$  и  $S'$  в момент, когда оба сигнала достигают  $O$ .

в) Изобразить положения систем отсчета  $S$  и  $S'$  в момент, когда сигнал из  $A'$  достигает  $O'$ .

г) Предполагая, что оба события объективно регистрируются в точках  $A'$  и  $B'$ , например, на фотографических пластинках, показать, что при выполнении условий этой задачи расстояния  $A'O'$  и  $B'O'$  равны.

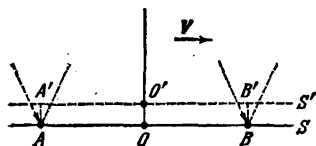


Рис. 11.22

д) Показать, что для наблюдателя  $O'$  оба события не являются одновременными. При определении понятия одновременности обязательно предполагается, что скорость света во всех случаях постоянна. Чтобы эта зависимость стала ясной, проведите следующее рассуждение. Пусть два события в точках  $A$  и  $B$  представляют собой звуковые сигналы, испускаемые одновременно для наблюдателя  $O$ , т. е. для наблюдателя, покоящегося относительно среды, в которой распространяется звук.

Пусть  $O'$  — это наблюдатель, движущийся со скоростью  $V$ , равной одной трети скорости звука.

е) Применив преобразование Галилея, показать, что скорости движения звуковых сигналов из  $A'$  и  $B'$  по направлению к  $O'$  не одинаковы.

ж) Показать, что даже если оба звуковых сигнала достигают  $O'$  в разные моменты времени, то это компенсируется различием скоростей, с которыми распространялись эти сигналы, так что наблюдателю  $O'$  эти два события все-таки кажутся одновременными.

**13. Релятивистское смещение Доплера.** Протоны ускоряются напряжением в 20 кВ, после чего они движутся с постоянной скоростью в области, где происходит их нейтрализация, приводящая к образованию атомов водорода и сопровождающаяся испусканием света. Спектральная линия  $H_\beta$  ( $\lambda=4861,33 \text{ \AA}$  для покоящегося атома;  $1 \text{ \AA}=10^{-8} \text{ см}$ ) наблюдается с помощью спектрометра. Оптическая ось спектрометра параллельна направлению движения ионов. В спектре наблюдается смещение Доплера из-за движения ионов в том же направлении, в котором происходит испускание света. В приборе имеется также зеркало, установленное так, чтобы в поле зрения на этот спектр налагался спектр света, испускаемого в противоположном направлении.

а) Какова скорость протонов после ускорения?

Ответ.  $2 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$ .

б) Рассчитать доплеровское смещение первого порядка, зависящее от  $v/c$  и соответствующее движению источника вперед и назад, и показать схематически вид данной части спектра.

в) Рассмотреть затем эффект второго порядка, зависящий от  $v^2/c^2$  и появляющийся при учете релятивистских соотношений. Показать, что смещение второго порядка приблизительно равно  $1/2 \lambda \cdot (v^2/c^2)$ , и оценить его численную величину для данной задачи. Заметьте, что оно одинаково как для движения со скоростью  $+v$ , так и для движения со скоростью  $-v$ .

### Математическое дополнение. Пространство — время

Представления о пространстве — времени, т. е. математический язык, на котором особенно просто и изящно выражается содержание специальной теории относительности, были разработаны Г. Минковским в 1908 г., т. е. после того, как Эйнштейн уже изложил эту теорию. Идеи Минковского не содержат принципиально новых положений, не вытекающих также из наших предыдущих рассуждений, но он предложил такую математическую форму специальной теории отно-



сительности, которая наиболее естественно обобщается в виде общей теории относительности. Минковский начал свою статью следующими словами:

«Взгляды на пространство и время, которые я хочу изложить вам, выросли на почве экспериментальной физики, и в этом заключается их сила. Они радикально изменяют прежние представления. Отныне понятия пространства самого по себе и времени самого по себе осуждены на отмирание и превращение в бледные тени, и только своего рода объединение этих двух понятий сохранит независимую реальность».

Дж. А. Уилер так излагает сущность вопроса: «Фактически время — это длина, а не независимое от нее понятие. Чтобы уяснить, насколько неверно обычное различие между пространством и временем, представим себе такое несовместимое применение различных мер длины, когда ширина шоссе измеряется в футах, а его длина — в милях. Однако в такой же степени несовместимо измерение интервалов в одном направлении пространства — времени в секундах, а в трех других направлениях — в сантиметрах. Пересчетный множитель, переводящий одну метрическую единицу длины в „пространственных“ направлениях (см) в другую метрическую единицу длины во „временном“ направлении (сек), равен скорости света, числовая величина которой — это  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек. Но ведь величина этого множителя в такой же мере обусловлена историческими причинами, а по существу случайна, как и величина пересчетного множителя 5280, переводящего футов в мили. Можно обойтись без „объяснения“ множителя  $3 \cdot 10^{10}$ , точно так же как нет необходимости „объяснять“ множитель 5280».

Пространство имеет три измерения: положение частицы или местонахождение любого события определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ . У нас уже имеется математический язык, а именно язык векторного исчисления, с помощью которого мы можем формулировать утверждения о соотношениях между точками или линиями в форме, не зависящей от любой конкретной системы координат. Можем ли мы построить аналогичный язык, который даст нам возможность выражать физические законы специальной теории относительности в форме, также не зависящей от системы отсчета? Если физические законы выражаются безотносительно к какой-либо конкретной системе отсчета, то они будут автоматически инвариантны при преобразованиях Лоренца, которые переводят нас из одной системы отсчета в другую.

Физические законы описывают движение частиц от одной точки к другой. Ускоренное движение, столкновения частиц и радиоактивный распад — вот примеры явлений, для описания которых необходимы как пространственные координаты, так и время. Чтобы выразить эти законы графически, мы используем систему координат с тремя пространственными осями координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и четвертой осью, осью времени  $t$ , перпендикулярной к трем другим. Это трудно представить наглядно, но математически ничуть не труднее сформулировать, чем определение системы, состоящей из трех осей координат. Мы можем проще всего изобразить пространственно-временную систему координат на графике, если проведем одну пространственную ось  $x$  и одну временную ось  $t$ . Тремя пространственными и одной временной осью определяется четырехмерный континуум, носящий название *пространство — время*. Любая точка  $x_0, y_0, z_0, t_0$  в пространстве — времени называется *событием*: ее четыре координаты указывают нам, когда и где оно совершается. Типичным примером события может служить соударение двух частиц. В докелятивистской физике время события  $t_0$  было одним и тем же для всех наблюдателей. При переходе от одной инерциальной системы отсчета  $S$  к другой системе  $S'$  временная координата никогда не изменялась:  $t_0 = t'_0$ . В докелятивистской физике пространство и время определялись как *независимые* понятия.

Однако в теории относительности преобразование Лоренца объединяет временную и пространственную координаты, когда мы совершаем переход от одной системы отсчета к другой:

$$x' = \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}. \quad (45)$$

В результате объединения пространства и времени в одну четырехмерную реальность — пространство — время, все четыре измерения которого в принципе

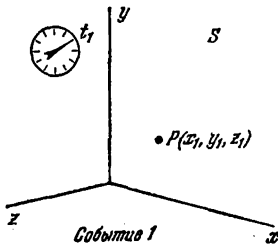


Рис. 11.23. Для дальнейших рассуждений нам надо определить, что называется событием: *событие* определяется точкой в пространстве  $P(x_1, y_1, z_1)$ , где оно совершается, и моментом времени  $t_1$ , когда оно совершается.

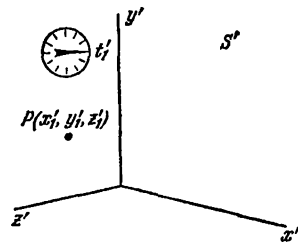


Рис. 11.24. То же самое событие, конечно, можно описать другими числами  $(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$  в другой инерциальной системе отсчета  $S'$ .

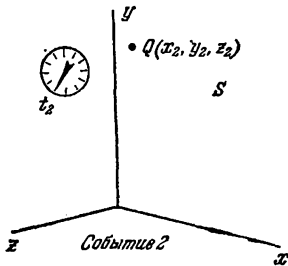


Рис. 11.25. По определению *интервал* между событиями 1 и 2 в системе отсчета  $S$  равен  $s$ ,

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

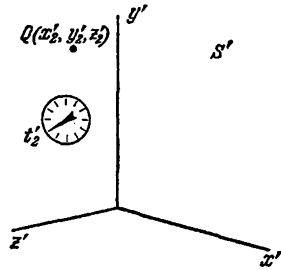


Рис. 11.26. В системе  $S'$  интервал между событиями 1 и 2 равен  $s'$ ,

$$s'^2 = c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2.$$

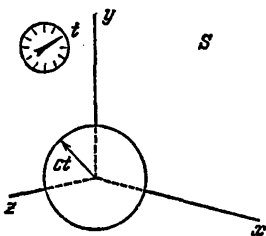


Рис. 11.27. Интервал  $s$  между испусканием светового сигнала (при  $t=0$ ) и приемом его в какой-либо точке  $(x, y, z)$  равен нулю:

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t^2 - c^2 t^2 = 0.$$

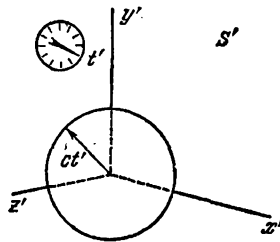


Рис. 11.28. В системе  $S'$  интервал  $s'$  между событиями излучения светового сигнала и его приема равен нулю. Таким образом, в этом случае  $s = s'$ .

эквивалентны, получается стройная система записи величин, инвариантных относительно преобразования Лоренца. При поворотах в обычном трехмерном пространстве преобразуются только пространственные координаты: например, при повороте на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$  координаты преобразуются по следующим формулам:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (46)$$

т. е. для определения  $x'$  и  $y'$  совершается преобразование координат  $x$  и  $y$ . В преобразовании Лоренца участвуют  $x$  и  $t$ . Ввиду того, что ни один сигнал не распространяется быстрее, чем со скоростью света, два события не могут влиять друг на друга, если каждое из них находится вне светового конуса другого (рис. 11.29). Если одно событие находится вне светового конуса другого события, то это свойство сохраняется и в любой другой системе отсчета, независимо от скорости ее движения. Мы знаем, что выражения  $x^2 - (ct)^2$  и  $(\Delta x)^2 - (c \Delta t)^2$  остаются инвариантными при преобразовании Лоренца. Эти выражения имеют одну и ту же числовую величину во всех системах отсчета, равномерно движущихся одна относительно другой:

$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta s)^2. \quad (47)$$

Здесь через  $\Delta x$  и  $\Delta t$  обозначены разности соответственно пространственных и временных координат двух событий, измеренные в системе отсчета  $S$ , а через  $\Delta x'$  и  $\Delta t'$  — те же разности, измеренные в системе отсчета  $S'$ . Если в системе  $S$  каждое из двух событий находится вне светового конуса другого события, то

$$|c \Delta t| < |\Delta x|$$

и

$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0. \quad (48)$$

Так как функция, находящаяся в левой части неравенства (48), инвариантна при преобразованиях Лоренца, то это неравенство должно выполняться во всех системах отсчета. Если в системе отсчета  $S$  каждое из двух событий находится на поверхности светового конуса другого события, то  $(\Delta s)^2 = 0$  как в  $S$ , так и в  $S'$ .

Предположим, что в системе  $S$  событие 2 находится внутри светового конуса события 1, т. е.  $|c \Delta t| > |\Delta x|$ , где  $\Delta t = t_2 - t_1$  и  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Следовательно, так же и в системе  $S'$ :

$$(c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 > 0, \quad (49)$$

и событие 2 всегда находится внутри светового конуса будущего для события 1. При этом сигнал от события 1 может достигнуть точки  $x_2$  в момент события 2 и раньше его. То, что происходит при событии 1, может влиять на то, что происходит при событии 2, и между этими событиями может существовать какая-либо причинная связь. Нечто происходящее при событии 1 может вызвать или изменить событие 2.

Величина  $\Delta s$ , определенная согласно уравнению (47), называется *интервалом* между двумя событиями. Если каждое из двух событий находится вне светового конуса другого события, то

$$c^2 (\Delta t)^2 < (\Delta x)^2 \quad (50)$$

и этот инвариант отрицателен:

$$(\Delta s)^2 < 0. \quad (51)$$

В этом случае мы называем интервал *пространственноподобным*. Если каждое из

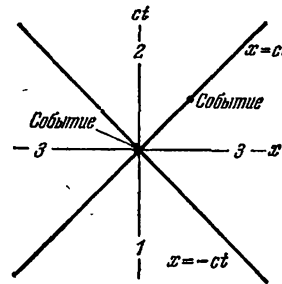


Рис. 11.29. Схема светового конуса. Пространственная координата (или координаты) представлена через  $x$ , время — через  $t$ . Точки, соответствующие всем событиям, которые отделены от события при  $x=0$ ,  $t=0$  интервалом, равным нулю, находятся на прямых  $x = \pm ct$ . 1 — абсолютное прошлое; 2 — абсолютное будущее; 3 — область событий, абсолютно не связанных с  $x=0$ ,  $t=0$ .

двух событий находится внутри светового конуса другого события, то

$$(\Delta s)^2 > 0, \quad (52)$$

и мы называем такой интервал *временеподобным*. Для того частного случая, когда два события могут быть связаны световым сигналом, мы получаем

$$(\Delta s)^2 = 0, \quad (53)$$

и такой интервал является *светоподобным*.

Соотношение между координатами и временем для двух событий	Тип интервала	Характер связи между событиями
$c \Delta t  <  \Delta x ; (\Delta s)^2 < 0$	Пространственноподобный	Нет причинной связи
$c \Delta t  >  \Delta x ; (\Delta s)^2 > 0$	Временеподобный	Может быть причинная связь
$c \Delta t  =  \Delta x ; (\Delta s)^2 = 0$	Светоподобный	События могут быть связаны световым сигналом

Хотя понятие одновременности не имеет в теории относительности точного смысла, определения будущего и прошлого имеют определенный инвариантный смысл для всех систем отсчета. *Прошлое* — это множество всех событий, которые

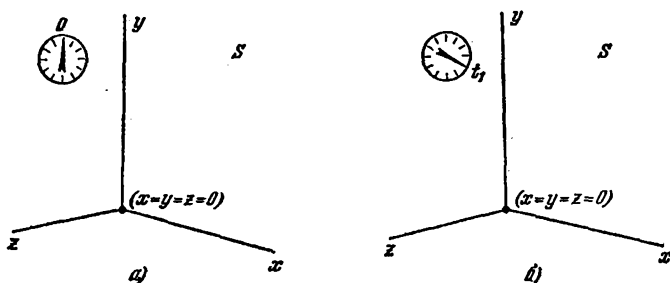


Рис. 11.30. а) Не все интервалы равны нулю. Вот событие:  $x=y=z=t=0$ . б) Вот другое событие:  $x=y=z=0, t=t_1$ . Интервал между этими двумя событиями равен  $s$ , где  $s^2 = c^2 t_1^2 > 0$ . Интервалы, для которых  $s^2 > 0$ , называются *временеподобными*.

в принципе могли бы оказать воздействие на нас здесь и сейчас. Эти события находятся в световом конусе прошлого. *Будущее* — это все те события, на которые в принципе может влиять то, что мы делаем здесь и сейчас. Эти события находятся в световом конусе будущего. Все события вне обоих световых конусов находятся в пространственноподобных областях; на них не может влиять то, что мы делаем здесь и сейчас, и они также не могут влиять на то, что мы делаем здесь и сейчас.

Наша траектория в пространстве — времени называется *мировой линией*; это маршрут, задающий наше положение и время. Так как скорость нашего перемещения никогда не может превзойти скорость света, то все события, уже совершившиеся в нашей жизни и до нее, находятся внутри нашего конуса прошлого, а все события, которые совершатся, должны находиться внутри нашего конуса будущего (рис. 11.36).

Если бы вместо одного пространственного измерения мы рассматривали три, то, поскольку при относительной скорости  $V$  в направлении  $x$  преобразование

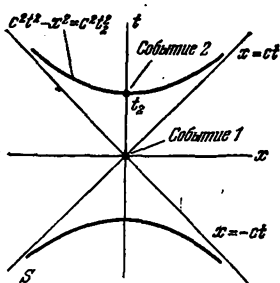


Рис. 11.31. Точки, соответствующие всем событиям, отделенным от события 1 одинаковым времениподобным интервалом  $s$ , где  $s^2 = c^2 t_2^2$ , лежат на показанной здесь гиперболе.

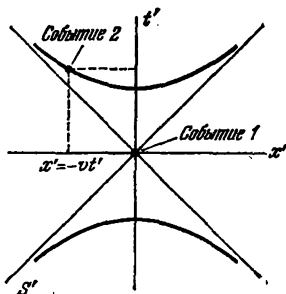


Рис. 11.32. Так как квадрат интервала  $s^2$  является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца, то на схеме светового конуса системы  $S'$  получается та же гипербола. Но точка, соответствующая событию 2, находится в другом месте. Почему?

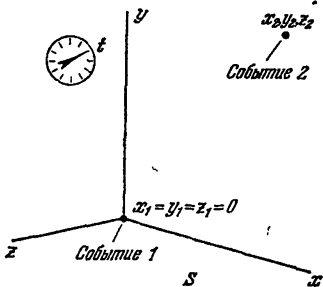


Рис. 11.33. Другой пример: два события с различными пространственными координатами, но с одинаковым временем. Для них  $s^2 = -(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 < 0$ . Интервалы, для которых  $s^2 < 0$ , называются пространственноподобными.

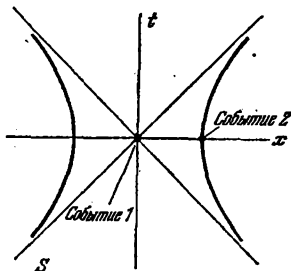


Рис. 11.34. Точки, соответствующие всем событиям, отделенным от события 1 таким же интервалом, что и событие 2, лежат на показанной здесь гиперболе.

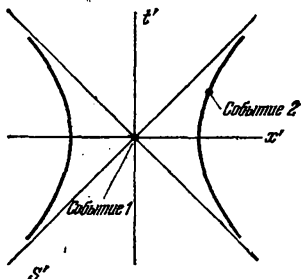


Рис. 11.35. Так как интервал  $s$  является инвариантом, то на схеме для системы отсчета  $S'$  получается та же гипербола. И снова точка, соответствующая событию 2, не находится в том же положении, в каком она была для системы  $S$ .

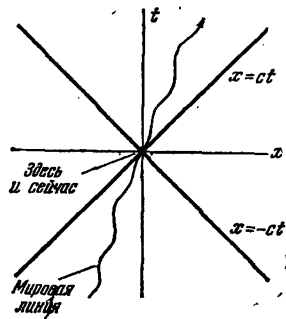


Рис. 11.36. «Мировая линия» — это последовательность событий, в которой более поздние причинно связаны с более ранними. Поэтому она должна находиться внутри светового конуса, как здесь показано.

Лоренца дает  $y'=y$  и  $z'=z$ , мы должны опять получить инвариантный квадрат интервала в системе отсчета  $S$ :

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \quad (54)$$

и тот же квадрат интервала в какой-то другой системе отсчета  $S'$ :

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \quad (55)$$

За исключением знаков минус,  $(\Delta s)^2$  имеет тот же вид, что и выраженный в декартовых координатах квадрат расстояния между двумя точками пространства, не обладающего кривизной. И опять же за исключением знаков минус, уравнение (55) выглядит так же, как формула квадрата расстояния, выраженного в другой декартовой системе координат, повернутой относительно первой. Можно углубить эту аналогию, толкуя преобразование Лоренца как своего рода поворот в пространстве — времени.

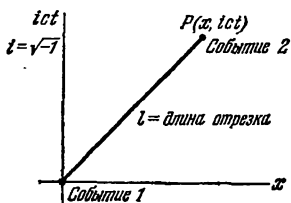


Рис. 11.37. Один из способов вывода формул преобразования Лоренца состоит в том, что по осям координат откладываются величины  $ict$  и  $x$ . При этом  $l^2 = x^2 - c^2 t^2$ . Следовательно,  $l^2 = -s^2$  является инвариантом относительно преобразования величин  $x', t'$  в  $x, t$  и обратно.

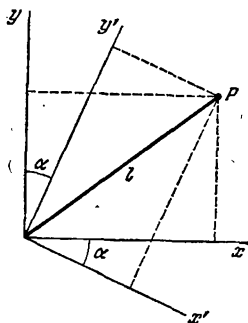


Рис. 11.38. В каких случаях расстояние между двумя точками является инвариантом при линейном преобразовании  $x, y \rightarrow x', y'$  для обычных координат? — Когда это преобразование представляет собой поворот осей координат!

Введем следующие координаты:

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z, \quad x_4 \equiv ict, \quad (56)$$

аналогичные декартовым координатам четырехмерного евклидова пространства. В формулах (56) и ниже  $i = (-1)^{1/2}$ . Расстояние от начала координат до некоторой точки равно

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (57)$$

При повороте вокруг оси  $x_3 = z$  координаты определенной точки (или составляющие вектора) изменяются согласно уравнениям (46). Если мы выразим косинус и синус угла поворота в виде отношений длин сторон прямоугольного треугольника с катетами  $a, b$ , то уравнения (46) примут следующий вид:

$$x'_1 = \frac{ax_1 + bx_2}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad x'_2 = \frac{ax_2 - bx_1}{(a^2 + b^2)^{1/2}}. \quad (58)$$

Из уравнений (58) следует, что  $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ ,

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 = \frac{(a^2 + b^2)(x_1)^2 + (a^2 + b^2)x_2^2}{(a^2 + b^2)} = (x_1)^2 + (x_2)^2. \quad (59)$$

Но это остается формально верным, если заменить  $b$  на  $ib$ , а  $b^2$  на  $-b^2$ . Действительно, преобразование Лоренца (9) можно написать в следующем виде:

$$x'_1 = \frac{ax_1 + ibx_4}{(a^2 - b^2)^{1/2}}, \quad x'_4 = \frac{ax_4 - ibx_1}{(a^2 - b^2)^{1/2}}. \quad (60)$$

За исключением множителя  $i$  перед  $b$ , это похоже на обычный поворот осей координат (46). В этом смысле преобразование Лоренца представляет собой преобразование поворота в пространстве — времени.

Отрезок, идущий из начала координат  $O$  в точку  $P(x, y)$ , определяет вектор: если совершается поворот системы координат, то координаты конечной точки вектора изменяются таким образом, что положение этого вектора  $\vec{OP}$  в пространстве остается неизменным. Подобно этому мы определяем вектор, подвергающийся преобразованию Лоренца, как совокупность четырех составляющих:  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ ,  $x_4 \equiv ict$ . Система этих четырех величин обычно называется *четырёхмерным вектором*. Точно так же любые четыре величины, которые преобразуются точно по такому же правилу, по определению образуют *четырёхмерный вектор*, инвариантный относительно преобразования Лоренца; так, если  $p_x, p_y, p_z$  — составляющие импульса материальной точки, а  $E$  — ее энергия, то четыре числа:  $p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z, p_4 = iE/c$  — тоже образуют четырёхмерный вектор.

Производная вектора по скаляру представляет собой также вектор. Мы увидим в гл. 12, что для  $\mu$ -й составляющей импульса можно написать следующее уравнение:

$$p_\mu = M \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (61)$$

где  $\tau$  — инвариантное собственное время частицы. Бесконечно малый интервал собственного времени  $\Delta\tau$  связан с интервалом  $\Delta s$  соотношением  $(\Delta s)^2 = (c \Delta\tau)^2$ , так что уравнение (61) можно записать так:

$$p_\mu = Mc \frac{dx_\mu}{ds}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (62)$$

Понятие о четырёхмерном векторе, инвариантном относительно преобразования Лоренца, и соответствующая система обозначений весьма полезны в том смысле, что они позволяют нам, не задумываясь, писать уравнения, вид которых не зависит от какой-либо конкретной инерциальной системы отсчета. Эти уравнения автоматически согласуются с постулатом теории относительности, что основные физические законы одинаково формулируются во всех инерциальных системах отсчета. Для обычных векторов равенство  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  не зависит от системы координат. Выражая его через составляющие, мы получим  $a_i = b_i$  при  $i = 1, 2, 3$ . В другой системе координат, в которой составляющими вектора  $\mathbf{a}$  будут числа  $a'_i$ , а составляющими вектора  $\mathbf{b}$  — числа  $b'_i$ , все-таки выполняется равенство

$$a'_i = b'_i.$$

Мы всегда можем образовать скалярные инварианты:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i a_i = \sum_{i=1}^3 a'_i a'_i \quad (63)$$

или

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a'_i b'_i. \quad (64)$$

Подобным же образом можно написать следующее уравнение для составляющих четырёхмерных векторов:

$$p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(3)} + p_\mu^{(4)}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (65)$$

Это уравнение выражает законы сохранения релятивистского импульса и массы — энергии для реакции, в результате которой из частиц 1 и 2 образуются частицы 3 и 4. Уравнение (65) выполняется для всех четырех значений  $\mu$  и во всех инерциальных системах отсчета, т. е. фактически это система четырех уравнений. Абсолютная

величина четырехмерного вектора является инвариантом преобразования Лоренца:

$$\sum_{\mu=1}^4 p_{\mu} p_{\mu} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \frac{E^2}{c^2} = -(Mc)^2. \quad (66)$$

Это соотношение выводится в гл. 12. Подобно ему, величины

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu} x_{\mu} = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = -s^2, \quad (67)$$

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu} p_{\mu} = xp_x + yp_y + zp_z - tE \quad (68)$$

также представляют собой скалярные инварианты.

Сумма двух или большего числа четырехмерных векторов также является четырехмерным вектором:  $P_{\mu} \equiv p_{\mu}^{(1)} + p_{\mu}^{(2)}$ ;  $P_{\mu}$  — это вектор, так что из уравнения (66) можно вывести другой скалярный инвариант, а именно:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^4 P_{\mu} P_{\mu} &= \sum_{\mu=1}^4 (p_{\mu}^{(1)} + p_{\mu}^{(2)})^2 = (\mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)})^2 - \frac{1}{c^2} (E^{(1)} + E^{(2)})^2 = \\ &= 2 \left\{ \mathbf{p}^{(1)} \cdot \mathbf{p}^{(2)} - \frac{E^{(1)} E^{(2)}}{c^2} \right\} - (M^{(1)} c)^2 - (M^{(2)} c)^2. \end{aligned} \quad (69)$$

В гл. 12 мы получим уравнения (65) и (69), не ссылаясь на понятия четырехмерного вектора и пространства — времени. Однако, познакомившись с этими понятиями, мы овладели еще одним приемом теоретического анализа и получили простой и изящный метод составления уравнений, инвариантных относительно преобразования Лоренца. Этот метод открывает возможность для дальнейших обобщений, ведущих к более абстрактным и математически усложненным теориям — релятивистской квантовой теории и общей теории относительности Эйнштейна. Возможность составлять уравнения, инвариантные относительно преобразования Лоренца, не доказывая в каждом отдельном случае их инвариантность, позволяет физикам рассматривать еще более сложные проблемы, которые не могли бы быть решены иным путем.

Преобразование Лоренца соответствует поворотам системы координат в пространстве — времени. В специальной теории относительности доказывается инвариантность физических законов только относительно этого типа преобразований. Обычная векторная алгебра дает нам систему обозначений, не зависящую от какой-либо конкретной системы координат в обычном трехмерном пространстве. Значение открытия Эйнштейна состоит в обобщении собственно преобразования Лоренца и простой геометрии четырехмерного пространства — времени. В общей теории относительности Эйнштейн доказал возможность выразить физические законы в форме, независимой от любых преобразований в пространстве — времени, а не только преобразований перехода от одной неускоренной системы отсчета к другой. При этом четырехмерное пространство — время уже не является пространством с евклидовой геометрией — наоборот, оно может обладать кривизной.

### Из истории физики. Одновременность в специальной теории относительности

Мы приводим начало первой статьи Эйнштейна по специальной теории относительности. Особенно важное значение имеет содержащееся в ней обсуждение понятия одновременности.



## К электродинамике движущихся тел \*)

### А. Эйнштейн

Известно, что электродинамика Максвелла в современном ее виде приводит к заключению об асимметрии в явлениях движения тел, которая, по-видимому, несвойственна этим явлениям. Представим себе, например, электродинамическое взаимодействие между магнитом и проводником с током. Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита, в то время как согласно обычному представлению приходится строго различать два случая, в которых движется или одно, или другое из этих тел. В самом деле, если движется магнит, а проводник неподвижен, то вокруг магнита возникает электрическое поле с определенной энергией, создающее ток в тех местах, где находятся части проводника. Если же неподвижен магнит, а движется проводник, то вокруг магнита не возникает никакого электрического поля, но зато мы обнаруживаем в проводнике электродвижущую силу, которой самой по себе не соответствует никакая энергия, но которая (считаем, что в обоих обсуждаемых случаях относительное движение одинаково) вызывает электрические токи той же величины и того же направления, что и токи, вызванные электрическим полем в первом случае.

Примеры подобного рода, а также неудачные попытки обнаружить какое-либо движение Земли относительно «светоносной среды» приводят к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя. Более того, они свидетельствуют о том, что для всех систем координат, в которых выполняются уравнения механики, должны быть справедливы те же самые законы электродинамики и оптики, как это уже было доказано для величин первого порядка малости \*\*). Эту гипотезу (содержание которой мы будем ниже называть «принципом относительности») мы намерены превратить в постулат и введем также другой постулат, который только кажется не согласующимся с первым, а именно, что в пустоте свет всегда распространяется с определенной скоростью  $c$ , не зависящей от состояния движения излучающего тела. Этих двух постулатов достаточно для того, чтобы, положив в основу теорию Максвелла для неподвижных тел, построить свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Будет доказано, что введение «светоносного эфира» излишне, поскольку в предлагаемой теории не вводится надельное особыми свойствами «абсолютно неподвижное пространство», а также ни одной точке пустого пространства, где происходят электромагнитные явления, не приписывается вектор скорости.

Развиваемая теория основывается, подобно всей электродинамике, на кинематике твердого тела, потому что утверждения любой такой теории касаются соотношений между твердыми телами (системами координат), часами и электромагнитными явлениями. Недостаточное понимание этого обстоятельства является причиной тех трудностей, которые в настоящее время должна преодолевать электродинамика движущихся тел.

## 1. Кинематическая часть

§ 1. Определение одновременности. Выберем систему координат, в которой хорошо \*\*\*) выполняются уравнения механики Ньютона. Чтобы сделать наши представления более точными и чтобы по названию отличить эту систему координат от вводимых позже систем координат, назовем ее «покоящейся системой».

Если некоторая материальная точка покоится относительно этой системы координат, то ее положение относительно последней может быть определено

\*) Выдержка из статьи А. Эйнштейна в «Annalen der Physik» 17, 891—921 (1905). Примечания к тексту также принадлежат автору статьи, если не оговорено обратное. (Русский перевод: А. Эйнштейн, Сборник научных трудов, «Наука», 1965, т. I, стр. 7. (Прим. ред.))

\*\*) В то время автору еще не была известна ранее опубликованная работа Лоренца. (Прим. авторов курса)

\*\*\*) То есть в первом приближении. (Прим. авторов курса)

с помощью жестких масштабов методами евклидовой геометрии и выражено в декартовых координатах.

Желая описать *движение* материальной точки, мы задаем значения ее координат как функций времени. Однако мы не должны забывать, что подобное математическое описание только тогда имеет физический смысл, когда мы предварительно уясним, что подразумевается под «временем». Мы должны учитывать, что все наши суждения, в которых время играет какую-то роль, всегда являются суждениями о *событиях, совершающихся одновременно*. Если, например, я говорю: «Этот поезд прибывает сюда в 7 часов», то я подразумеваю следующее: «Указание маленькой стрелки моих часов на 7 часов и прибытие поезда — это события, совершающиеся одновременно»<sup>\*</sup>).

Казалось бы, что можно преодолеть все трудности, касающиеся определения «времени», заменив слово «время» словами «положение маленькой стрелки моих часов». Действительно, это определение удовлетворительно в случае, когда мы стремимся определить время лишь для того самого места, где находятся часы; однако оно уже не является удовлетворительным, когда нам надо связать друг с другом во времени события, происходящие в различных местах, или — что то же самое — определить время для событий, происходящих в местах, удаленных от часов.

Мы могли бы, конечно, удовлетвориться значениями времени, определенными наблюдателем, который вместе с часами находится в начале координат и сопоставляет соответствующие положения стрелок часов с каждым световым сигналом, идущим к нему через пустоту и дающим знать о регистрируемых событиях. Но этот способ обладает тем недостатком, что, как мы знаем из опыта, он не независим от местонахождения наблюдателя с часами. Мы придем к способу определения, гораздо лучше соответствующему практике, путем следующих рассуждений.

Если в точке *A* пространства расположены часы, то наблюдатель, находящийся в *A*, может определять значения времени для событий, совершающихся в непосредственной близости от *A*, путем наблюдения одновременных с этими событиями положений стрелок часов. Если в другой точке *B* пространства находятся другие часы с точно такими же свойствами, то наблюдатель в *B* может определить значения времени для событий в непосредственной близости от *B*. Однако без дальнейших предположений невозможно произвести сравнение по времени события в *A* с событием в *B*. До сих пор мы определили только «время *A*» и «время *B*», но не общее для *A* и *B* время. Это последнее можно установить, *вводя определение*, что «время», необходимое для распространения света из *A* в *B*, равняется «времени», требуемому для распространения его из *B* в *A*. Пусть луч света выходит в момент  $t_A$  по «времени *A*» из точки *A* в направлении *B*; пусть он в момент  $t_B$  по «времени *B*» отражается от *B* к *A* и опять достигает точки *A* в момент  $t'_A$  по «времени *A*».

По определению двое часов в *A* и *B* будут идти синхронно, если

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Мы предполагаем, что это определение синхронности можно дать непротиворечивым образом и притом для любого числа точек, так что всегда справедливы следующие утверждения:

1. Если часы в *B* идут синхронно с часами в *A*, то часы в *A* идут синхронно с часами в *B*.

2. Если часы в *A* идут синхронно как с часами в *B*, так и с часами в *C*, то часы в *B* и *C* также идут синхронно друг с другом.

Таким образом, с помощью определенных (мысленных) физических экспериментов мы установили, что следует понимать под синхронно идущими, находящимися в различных местах, покоящимися часами, и получили ясное определение понятия «одновременности», или «синхронности», и понятия «времени». «Время»

<sup>\*</sup>) Мы не будем здесь обсуждать неточность, содержащуюся в понятии одновременности двух событий, совершающихся приблизительно в одном месте, которую можно устранить также с помощью некоторой абстракции.

события» — это то время, которое определяется одновременно с событием по походящимся часам, находящимся в месте события, причем для всех определений времени эти часы идут синхронно с некоторыми определенными походящимися часами.

В соответствии с опытом мы считаем также, что величина

$$\frac{2AB}{t'_A - t_A} = c$$

является универсальной постоянной — скоростью света в пустом пространстве.

Существенно то, что время определяется с помощью часов, походящихся относительно покоящейся системы координат, и таким образом определенное время, поскольку оно относится к покоящейся системе, мы будем называть «временем покоящейся системы».

§ 2. Об относительности длин и промежутков времени. Последующие рассуждения основываются на принципе относительности и на принципе постоянства скорости света. Эти два принципа мы формулируем следующим образом:

1. Законы, согласно которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из двух систем координат, движущихся одна относительно другой равномерно и прямолинейно, относятся эти изменения состояния.

2. В «покоящейся» системе координат любой луч света движется с определенной скоростью  $c$  независимо от того, испускался ли этот луч походящимся или движущимся телом. Отсюда следует:

$$\text{скорость света} = \frac{\text{путь луча света}}{\text{интервал времени}}$$

где «интервал времени» следует понимать в смысле определения, данного в § 1.

Пусть имеется походящийся твердый стержень; пусть его длина, измеренная с помощью также походящегося масштаба, равна  $l$ . Теперь представим себе, что ось стержня совпадает с осью  $x$  походящейся системы координат и что этому стержню сообщено равномерное поступательное движение, заключающееся в параллельном переносе его со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$  в направлении возрастания  $x$ . Теперь мы хотим определить длину движущегося стержня и представляем себе, что его длину можно установить с помощью одной из следующих двух операций:

а) Наблюдатель движется вместе с указанным масштабом и с измеряемым стержнем и измеряет длину стержня непосредственно, прикладывая масштаб точно таким же образом, как если бы все эти три тела находились в покое.

б) С помощью походящихся часов, установленных в походящейся системе и синхронизированных в соответствии с § 1, наблюдатель определяет, в каких точках походящейся системы находятся в определенный момент времени  $t$  оба конца измеряемого стержня. Расстояние между этими двумя точками, измеренное с помощью уже использовавшегося масштаба, который в этом случае также покоится, есть длина, которую можно обозначить, как «длину стержня».

В соответствии с принципом относительности длина, определяемая посредством операции а) — мы назовем ее «длиной стержня в движущейся системе», — должна быть равна длине стержня в условиях покоя.

Длину, устанавливаемую посредством операции б), мы назовем «длиной (движущегося) стержня в походящейся системе». Эту длину мы определим на основе наших двух принципов, и мы найдем, что она отличается от  $l$ .

В обычно применяемой кинематике молчаливо предполагается, что длины, определенные посредством обеих указанных операций, равны между собой, или, иными словами, что в геометрическом отношении движущееся твердое тело в момент  $t$  вполне можно заменить тем же телом, находящимся в данном положении в состоянии покоя.

Предположим, далее, что на обоих концах стержня ( $A$  и  $B$ ) укреплены часы, синхронные с часами походящейся системы, т. е. что в любой момент времени их показания соответствуют «времени походящейся системы» в тех точках, где находятся эти часы. Таким образом, эти часы «синхронны в походящейся системе».

Представим себе, далее, что около каждого часа находится движущийся вместе с ними наблюдатель и что эти наблюдатели применяют к своим часам сформулированный в § 1 критерий синхронности хода двух часов. Пусть в момент времени  $t_A$  луч света выходит из  $A$ , в момент времени  $t_B$  он отражается в точке  $B$ , а в момент времени  $t'_A$  возвращается в  $A$ . Учитывая принцип постоянства скорости света, находим

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v}$$

и

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v},$$

где  $r_{AB}$  — длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе. Итак, наблюдатели, движущиеся вместе с движущимся стержнем, должны обнаружить, что часы в точках  $A$  и  $B$  не идут синхронно, в то время как наблюдатели в покоящейся системе должны утверждать, что часы синхронны.

Итак, мы видим, что понятию одновременности нельзя придавать абсолютное значение, а два события, которые при наблюдении из одной системы координат являются одновременными, уже не могут считаться одновременными при рассмотрении из системы координат, движущейся относительно первой системы...

---

\*) «Время» означает здесь «время покоящейся системы» и также «положение стрелок движущихся часов, находящихся в том месте, о котором идет речь».

## РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА. ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ

Радикальное изменение в наших представлениях о пространстве и времени, выраженное в преобразовании Лоренца, оказывает глубокое влияние на всю физику. Нам необходимо теперь пересмотреть физические законы, установленные и экспериментально подтвержденные для малых скоростей ( $v \ll c$ ), с точки зрения согласования их с теорией относительности. При этом не следует удивляться, если окажется, что в какой-либо новой области потребуются изменение законов. В данном случае законы преобразуются к такому виду, что при достаточно малых скоростях они вновь принимают простые ньютоновские формы, точно оправдывающиеся, как показывает опыт, при предельно низких скоростях.

Как и в гл. 3, мы будем признавать только такие законы, которые тождественны во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга без ускорения. Однако вместо преобразования Галилея мы теперь будем руководствоваться преобразованием Лоренца для выяснения изменений, которые требуется внести в ту или иную физическую формулу при переходе от одной системы отсчета к другой. При  $v/c \rightarrow 0$  преобразование Лоренца превращается в преобразование Галилея. Вместо требования инвариантности физических законов относительно преобразования Галилея мы теперь будем требовать их инвариантности относительно преобразования Лоренца.

Предположим, что физические закономерности устанавливаются двумя наблюдателями, находящимися в системах отсчета  $S$  и  $S'$ . При этом каждый пользуется значениями длин, промежутков времени, скоростей и ускорений, измеренными в его собственной системе. Для переменных системы  $S$  и переменных системы  $S'$  форма закономерностей должна быть одинаковой. Например, если мы пользуемся преобразованием Лоренца для перехода от координат  $x, y, z$  системы  $S$  к координатам  $x', y', z'$  системы  $S'$ , каждая физическая закономерность, выведенная в системе  $S$ , должна быть переведена на язык системы  $S'$  с сохранением своей формы. Смысл этого утверждения станет ясным при рассмотрении конкретных задач.

## 12.1. Сохранение импульса (количества движения)

Требуется найти такое выражение для импульса движения  $p$ , чтобы оно принимало вид  $Mv$  (где  $M$  — масса покоя \*) при  $v/c \ll 1$  и удовлетворяло закону сохранения импульса при соударениях частиц при любых величинах их скоростей относительно системы отсчета. Мы найдем это выражение, рассмотрим определенный случай соударения. Сначала покажем на конкретном примере,

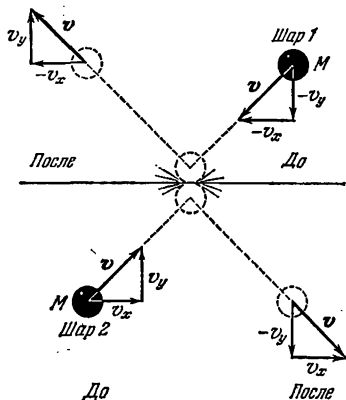


Рис. 12.1. Столкновение двух шаров о массами  $M$ , происходящее в плоскости  $xy$ . Показаны проекции скоростей на направление  $y$  до и после столкновения.

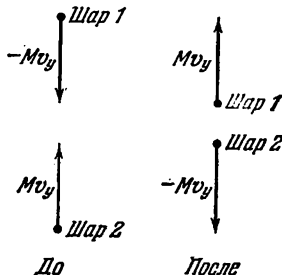


Рис. 12.2. Проекция импульсов соударяющихся шаров на направление  $y$ . Полный импульс по направлению  $y$  равен нулю до и после соударения.

что ньютоновский (нерелятивистский) импульс  $Mv$  не сохраняется при столкновениях, в которых участвуют частицы с релятивистскими скоростями.

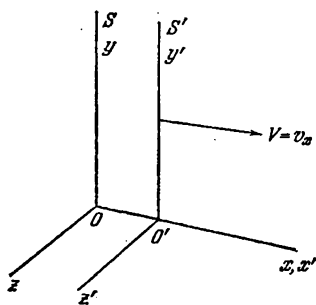


Рис. 12.3. Соударение было рассмотрено в системе отсчета  $S$  (см. рис. 12.1 и 12.2). Рассмотрим его теперь в системе  $S'$ , имеющей скорость  $V = v_x$  относительно системы  $S$ , как показано на рисунке.

Рассмотрим прилагаемые схемы, иллюстрирующие столкновение между частицами (шарами) с равными массами (рис. 12.1). Выберем такую систему отсчета  $S$ , чтобы частицы сближались с равнопротивоположными скоростями; тогда, если составляющая скорости первой частицы по оси  $y$  до столкновения была  $-v_y$ , то после столкновения она становится равной  $+v_y$ .

В данной системе отсчета центр масс покоится. Вследствие симметрии составляющая полного импульса по оси  $y$  должна быть равна нулю как до, так и после столкновения (рис. 12.2). Это будет справедливо независимо от выражения импульса при условии, что он получает равные знаки при противоположных знаках  $v_y$ . Таким образом, ньютоновское

\*) Масса покоя определяется как инертная масса в нерелятивистском случае ( $v/c \ll 1$ ).

выражение  $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ , даже если оно, вообще говоря, ошибочно, не проявляет в данном случае своей несостоятельности: приращение составляющей  $p_y$  частицы 1 равно  $+2Mv_y$ , а для частицы 2 оно равно  $-2Mv_y$ , так что полное приращение проекции ньютоновского импульса на ось  $y$  равно нулю.

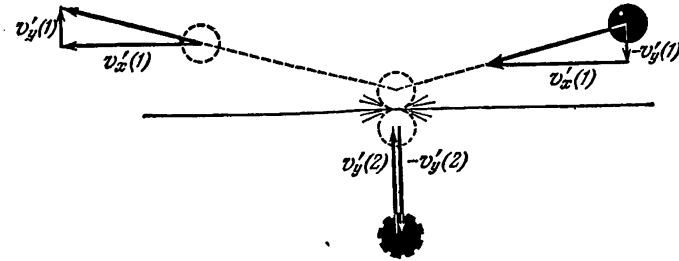


Рис. 12.4. В системе  $S'$  находим:

$$v'_x(1) = -\frac{2V}{1+V^2/c^2}, \quad v'_x(2) = 0, \quad v'_y(1) = \frac{v_y}{1+V^2/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

$$v'_y(2) = \frac{v_y}{(1-V^2/c^2)^{1/2}} > v'_y(1).$$

(См. уравнение (11.24).)

Система отсчета  $S'$  (рис. 12.3, 12.4) движется со скоростью  $V = v_x \hat{x}$  относительно системы  $S$ ; здесь  $v_x$  обозначает проекцию на направление  $x$  скорости частицы (шара) 2 до столкновения. Из уравнения релятивистского сложения скоростей (11.20г) мы знаем, что если с точки зрения наблюдателя, находящегося в покое относительно системы  $S$ , скорость равна  $v_y$ , то с точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно системы  $S'$ , она будет равна

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (1)$$

Из этого выражения следует, что в системе  $S'$  составляющие скоростей частиц 1 и 2 по оси  $y$  не равны друг другу, хотя в системе  $S$  они были равны (рис. 12.5). Действительно, из (1) видно, что при  $V = v_x$  (где  $v_x$  относится к частице 2) начальные составляющие скоростей частиц, измеряемые в системе  $S'$ , определяются равенствами

$$-v'_y(1) = -\frac{v_y}{1 + v_x^2/c^2} \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad (2)$$

$$v'_y(2) = \frac{v_y}{1 - v_x^2/c^2} \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (3)$$

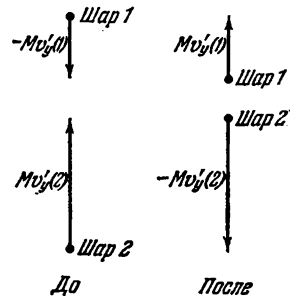


Рис. 12.5. В новой системе  $S'$  нерелятивистский импульс в направлении  $y'$  до и после столкновения не одинаков. Имеет место изменение суммарной составляющей по  $y$  нерелятивистского импульса

Эти составляющие скоростей не равны друг другу. Поскольку же составляющие скоростей частиц 1 и 2 по  $x$  в системе  $S$  тоже не равны друг другу (они равнопротивоположны), из уравнения (1) следует, что составляющие скоростей по  $y$  различны с точки зрения наблюдателя, связанного с любой системой, движущейся относительно системы  $S$  по направлению  $x$ . Таким образом, приращение количества движения  $2Mv'_y(2)$  не равно по абсолютной величине приращению количества движения  $2Mv'_y(1)$ . Мы видим, что выражение, в котором импульс пропорционален скорости, не может обеспечить сохранения импульса во всех системах отсчета. Отсюда следует, что либо сохранение импульса несовместимо с преобразованием Лоренца, либо должно существовать другое определение импульса, по которому сохранение импульса оправдывается во всех системах, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями.

Будем искать выражение импульса, которое было бы инвариантно относительно преобразования Лоренца. Это выражение должно быть таким, чтобы составляющая импульса частицы по оси  $y$  не зависела от составляющей по оси  $x$  скорости системы отсчета, в которой наблюдается соударение. Если такое выражение будет найдено, то сохранение проекции импульса на ось  $y$  в одной системе отсчета будет обеспечивать ее сохранение во всех системах отсчета. Мы уже знаем, что относительно преобразования Лоренца смещение  $\Delta y$  в направлении  $y$  одинаково во всех системах отсчета. Однако время  $\Delta t$ , затрачиваемое на прохождение расстояния  $\Delta y$ , зависит от системы отсчета, и, следовательно, составляющая скорости  $v_y = \Delta y / \Delta t$  тоже зависит от системы отсчета. Для измерения промежутка времени  $\Delta t$  можно воспользоваться, вместо лабораторных часов, воображаемыми часами, расположенными на частице. Эти последние будут измерять собственное время частицы  $\Delta \tau$ . *Это время должно быть признано всеми наблюдателями.* Таким образом, величина  $\Delta y / \Delta \tau$  одинакова для всех систем отсчета.

Как нам уже известно, промежутки времени  $\Delta t$  и  $\Delta \tau$  отличаются на релятивистский множитель, приведенный в уравнении (11.31), согласно которому имеем

$$\Delta \tau = \Delta t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad (4)$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta \tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что составляющая по  $y$  вектора  $v/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  одинакова во всех системах отсчета, различающихся только составляющей их скорости по  $x$ . Если мы теперь назовем релятивистским импульсом вектор

$$\mathbf{p} \equiv \frac{M\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (6)$$



то сохранение его проекции на направление  $y$  будет соблюдаться в любой инерциальной системе отсчета, отличающейся от системы с покоящимся в ней наблюдателем только величиной постоянной скорости в направлении  $x$  (рис. 12.6). Отметим, что выражение (6) может быть переписано в виде

$$p = Mc\beta\gamma, \quad (7)$$

если воспользоваться обозначениями  $\beta = v/c$  и  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , принятыми в гл. 11.

В рассмотренном выше примере соударения для удобства мы расположили оси координат симметричным образом, с таким расчетом, чтобы составляющая скорости по оси  $x$  ни у одной из частиц не претерпела изменения. Тогда, согласно (6),  $p_x$  сохраняется автоматически. Таким образом, при столкновении двух одинаковых частиц обеспечивается сохранение полного релятивистского импульса, определяемого выражением (6). При  $v/c \ll 1$  определение понятия импульса (6) совпадает с нерелятивистским:  $p = Mv$ . То обстоятельство, что импульс, определяемый выражением (6), сохраняется во всех процессах столкновений, является непреложным экспериментальным фактом.

Релятивистский импульс может быть представлен в виде

$$p = M(v)v, \quad (8)$$

так что величина

$$M(v) \equiv \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = M\gamma \quad (9)$$

может рассматриваться как релятивистская масса частицы с массой покоя  $M$  при ее движении относительно наблюдателя со скоростью  $v$  (рис. 12.7). Масса покоя есть масса при  $v \rightarrow 0$ . При  $v \rightarrow c$   $M(v)/M \rightarrow \infty$ . Релятивистское возрастание массы со скоростью проверено в разнообразных опытах по отклонению электронов; косвенным образом оно проверяется также при работе ускорителей ча-

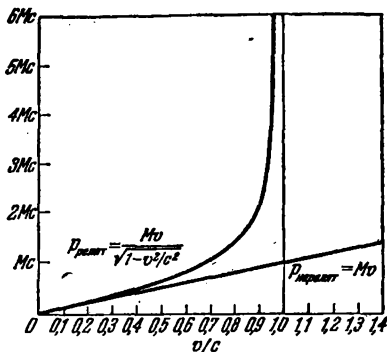


Рис. 12.6. Для того чтобы сохранение импульса соблюдалось во всех системах отсчета, принимаем следующее новое определение импульса  $p$ : для частицы, имеющей скорость  $v$  и массу покоя  $M$ , импульсом назовем величину

$$p = \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

График показывает зависимость как релятивистского, так и нерелятивистского импульса от  $v/c$ .

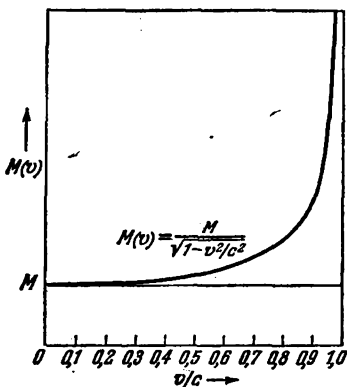


Рис. 12.7. Новая формула, определяющая импульс, приводит к следующей зависимости массы от скорости:

$$M(v) = \frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

может рассматриваться как релятивистская масса частицы с массой покоя  $M$  при ее движении относительно наблюдателя со скоростью  $v$  (рис. 12.7). Масса покоя есть масса при  $v \rightarrow 0$ . При  $v \rightarrow c$   $M(v)/M \rightarrow \infty$ . Релятивистское возрастание массы со скоростью проверено в разнообразных опытах по отклонению электронов; косвенным образом оно проверяется также при работе ускорителей ча-

стиц весьма высоких энергий. Вместо уравнения (9) ниже будет приведено другое уравнение, подчеркивающее непосредственную связь между релятивистской энергией и импульсом, которое во многих случаях проще применять.

## 12.2. Релятивистское выражение энергии

Сначала подойдем к релятивистскому выражению энергии формальным путем. Из уравнения (7) получаем выражение квадрата релятивистского импульса в виде

$$p^2 = M^2 c^2 \beta^2 \gamma^2. \quad (10)$$

С другой стороны, тождество

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = 1, \quad (11)$$

или

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1, \quad (11a)$$

дает готовый инвариант относительно преобразования Лоренца, поскольку единица есть постоянная величина. Умножая обе части равенства (11a) на  $M^2 c^4$ , получим

$$M^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = M^2 c^4, \quad (12)$$

или, используя (10),

$$M^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4. \quad (12a)$$

Поскольку масса покоя постоянна, величина  $M^2 c^4$  также постоянна и, следовательно, является инвариантом относительно преобразования Лоренца. Но что за физическую величину выражает произведение  $M^2 c^4 \gamma^2$ ? Его роль в (12a) ясно показывает, что это — важная физическая величина, так как при вычитании из нее величины  $p^2 c^2$  получается число  $M^2 c^4$ , являющееся инвариантом относительно преобразования Лоренца.

Рассмотрим величину

$$M c^2 \gamma = M c^2 \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \quad (13)$$

При  $\beta \ll 1$  эта величина принимает вид

$$M c^2 \gamma \cong M c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right) \cong M c^2 + \frac{1}{2} M v^2 + \dots \quad (14)$$

Член  $\frac{1}{2} M v^2$  известен как кинетическая энергия  $K$  в нерелятивистском пределе. Предположим, что мы определили полную релятивистскую энергию  $E$  свободной частицы тождеством

$$E \equiv M c^2 \gamma \equiv \frac{M c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (15)$$

Тогда из (12а) получаем

$$E^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4, \quad (16)$$

что является инвариантом относительно преобразования Лоренца. При переходе от одной системы отсчета к другой при  $p \rightarrow p'$  и  $E \rightarrow E'$  инвариантность выражения (16) означает, что

$$E'^2 - p'^2 c^2 = E^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4. \quad (17)$$

Мы имеем в виду именно это, утверждая, что выражение (16) инвариантно относительно преобразования Лоренца. Еще раз подчеркиваем, что  $M$  выражает массу покоя частицы и является числом, также инвариантным относительно преобразования Лоренца.

### 12.3. Преобразование импульса и энергии

Из уравнений (4) и (6) следует, что

$$\begin{aligned} p_x &= M \frac{dx}{d\tau}, & p_y &= M \frac{dy}{d\tau}, \\ p_z &= M \frac{dz}{d\tau}. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны, как это следует из уравнений (4) и (15),  $E$  может быть представлено в виде

$$E = M c^2 \frac{dt}{d\tau}, \quad (19)$$

где  $dt/d\tau = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Поскольку же  $M$  и  $\tau$  инвариантны относительно преобразования Лоренца, из уравнений (18) и (19) можно заключить, что  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  и  $E/c^2$  преобразуются по Лоренцу совершенно так же, как соответственно  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . Зная преобразование этих последних четырех величин, мы легко получаем соотношения (20). Таким образом, используя преобразования, приведенные в гл. 11, мы приходим к формулам преобразования импульса и энергии:

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma \left( p_x - \frac{\beta E}{c} \right), & p'_y &= p_y, & p'_z &= p_z, \\ E' &= \gamma (E - p_x c \beta). \end{aligned} \quad (20)$$

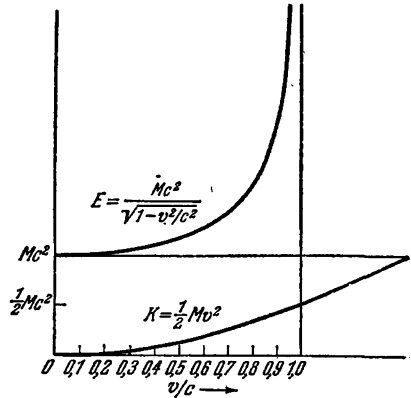


Рис. 12.8. Релятивистская энергия  $E = Mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  и нерелятивистская кинетическая энергия  $K = \frac{1}{2} Mv^2$  как функции приведенной скорости  $v/c$ . При  $v/c \ll 1$  графики  $E$  и  $K$  имеют почти одинаковый вид, так как в этой области  $Mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx Mc^2 + \frac{1}{2} Mv^2$ . Но при  $v/c \rightarrow 1$  энергия  $E$  растет гораздо быстрее, чем  $K$ .

Обратные преобразования получаются при замене  $-\beta$  на  $+\beta$  и обмене местами между соответственными символами со штрихом и без штриха:

$$\boxed{p_x = \gamma \left( p'_x + \frac{\beta E'}{c} \right), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad (20a)$$

$$E = \gamma (E' + p'_x c \beta).$$

Уравнения (18) и (19) позволяют связать скорость частицы с ее импульсом и энергией:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{p_x}{M} \frac{Mc^2}{E} = \frac{c^2 p_x}{E}, \quad (21)$$

или

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{v} \frac{E}{c^2}}. \quad (21a)$$

**Пример. Неупругое столкновение.** Предположим, что две одинаковые частицы сталкиваются и слипаются, образуя новую, составную частицу. В системе отсчета  $S$ , относительно которой центр масс находится в покое, имеем (по определению центра масс)

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0. \quad (22)$$

Образовавшаяся составная частица должна находиться в покое. В другой системе отсчета  $S'$  будем иметь

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_3. \quad (23)$$

Пользуясь преобразованием (20), можно выразить члены уравнения (23) через соответствующие величины, наблюдаемые в системе  $S$ :

$$p'_{x1} + p'_{x2} = \gamma (p_{x1} + p_{x2}) - \frac{\gamma \beta (E_1 + E_2)}{c} = p'_{x3} = \gamma p_{x3} - \frac{\gamma \beta E_3}{c}. \quad (24)$$

Здесь  $E_1$  и  $E_2$  — энергии исходных частиц с точки зрения наблюдателя в системе  $S$ , а  $E_3$  — энергия образовавшейся частицы с его же точки зрения. Но  $p_{x3} = 0$  и  $p_{x1} + p_{x2} = 0$ , так что уравнение (24) приводится к виду

$$E_3 = E_1 + E_2. \quad (25)$$

Этот результат свидетельствует о сохранении релятивистской энергии при столкновении. Приведенное рассуждение должно напомнить читателю ход рассуждения о сохранении импульса и энергии в гл. 3.

Далее, поскольку частицы одинаковы,  $E_1 = E_2$ ; воспользовавшись уравнением (15) для  $E_1$  и  $E_2$ , измеренных в системе  $S$ , получаем

$$M_3 c^2 = \frac{2Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (26)$$

Здесь  $M_3$  — масса покоя образовавшейся составной частицы, а  $v$  — начальная скорость частицы 1 или 2 относительно системы  $S$ . В этом примере масса покоя  $M_3$  образовавшейся частицы больше суммы  $2M$  масс покоя исходных частиц. Кинетическая энергия исходных частиц претерпела превращение, в результате которого масса покоя образовавшейся частицы превысила исходную массу покоя.

При рассмотрении самого общего случая соударения оказывается, что для сохранения импульса необходимо, чтобы сумма

$$\sum_i \frac{M_i c^2}{(1 - v_i^2/c^2)^{1/2}} = \sum_i E_i, \quad (26a)$$

распространенная на все вступающие в столкновение частицы, была равна такой же сумме, распространенной на все частицы, выходящие из столкновения \*). Таким примером уже служило уравнение (26). Иными словами, при релятивистском столкновении импульс сохраняется только в тех случаях, когда у взаимодействующих тел сохраняется суммарная релятивистская энергия.

Новая масса покоя  $M_3$  превышает исходную сумму  $2M$  масс покоя. При  $\beta \ll 1$  этот природ можно частично объяснить, исходя из нерелятивистских представлений. Поскольку

$$\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots, \quad (27)$$

из (26) следует, что

$$M_3 \cong 2 \left( M + \frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \cong 2 \left( M + \frac{\text{кинетическая энергия}}{c^2} \right). \quad (28)$$

Таким образом, масса покоя  $M_3$  включает в себя не только сумму масс покоя вступающих во взаимодействие частиц, но также и добавок, пропорциональный их кинетической энергии. В рассмотренном примере неупругого соударения уравнение (28) показывает, что имело место превращение массы, эквивалентной кинетической энергии, в массу покоя. (Уравнение (28) было нами написано для случая малых значений  $\beta$  только с той целью, чтобы сделать более наглядным превращение массы и энергии. Это превращение имеет место и при высоких значениях  $\beta$ .) Из уравнения (28) вытекает соотношение между приращением массы покоя

$$\Delta M = M_3 - 2M \quad (29)$$

и потерей кинетической энергии:

$$\text{потерянная кинетическая энергия} = c^2 \Delta M. \quad (30)$$

---

\*) Выражение (26a) не может непосредственно применяться к столкновениям с участием фотонов, так как для этих последних  $v=c$ . Ниже, в уравнениях (54) и (55), будет показано, каким образом можно подходить к задачам, связанным с фотонами и другими частицами, лишенными массы покоя.

## 12.4. Взаимосвязь массы и энергии

Взаимосвязь между превращениями массы и энергии (и количественное соотношение между их приращениями) рассматривалась Эйнштейном как самый значительный вывод теории относительности. Пока частицы не приобретают скоростей, соизмеримых с величиной  $c$ , можно пользоваться нерелятивистским выражением кинетической энергии, из которого следует, что при любом соударении между частицами (даже при неравенстве чисел вступающих и выходящих из взаимодействия частиц) всякая убыль (или приращение) суммарной массы покоя, умноженная на  $c^2$ , равна приращению (или убыли) суммарной кинетической энергии. И наоборот, при неупругом соударении, сопровождающемся убылью кинетической энергии, должно иметь место приращение суммарной массы покоя выходящих из взаимодействия частиц.

Из (9) и (15) следует выражение  $E = M(v)c^2$ . Таким образом, естественное определение энергии в теории относительности таково, что утверждение (30) в точности соблюдается для полного приращения энергии, без ограничения в виде требования, чтобы  $v/c \ll 1$ :

$$\Delta E = \Delta M c^2. \quad (31)$$

(Точный вывод этого выражения приведен в исторической справке в конце гл. 12.) Приращение массы покоя  $\Delta M$ , связанное с превращением эквивалента кинетической энергии в массу покоя, в повседневных процессах обычно весьма мало, так как  $c$  несоизмеримо велико по сравнению с обычными скоростями.

Поскольку масса однозначно связана с энергией, система с полной релятивистской энергией  $E$  неотделима от инертной массы  $M = E/c^2$ . Рассмотрим ящик, лишенный массы и содержащий  $N$  покоящихся в нем частиц. При попытках придать ему ускорение ящик обнаруживает инертную массу  $NM$ . Имея скорость  $V$ , ящик обладает импульсом  $NMV$ . Однако если каждая частица обладает в системе отсчета ящика скоростью  $v$  и кинетической энергией  $\frac{1}{2}Mv^2$ , то инертная масса ящика становится равной  $N(M + Mv^2/2c^2)$ , а импульс равен  $NV(M + Mv^2/2c^2)$ . Последние два выражения верны, если скорости  $V$  и  $v$  несоизмеримо малы по сравнению с  $c$ .

Аналогичным образом, сжатая пружина имеет большую массу, чем несжатая, на величину затраченной на ее сжатие работы, деленной на  $c^2$ . После полного растворения сжатой пружины в кислоте суммарная масса продуктов реакции несколько (хотя и на неизмеримо малую величину) больше, чем при растворении ненапряженной пружины.

П р и м е р ы. *Совместные превращения массы и энергии.* а) При столкновении и слипании двух масс по 1 г, имеющих равнопротивоположные скорости по  $10^8$  см/сек, добавочная масса покоя слипшейся пары равна

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \cong 2 \cdot \frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} \cong 1 \cdot 10^{-11} \text{ г.} \quad (32)$$

Эта величина меньше ошибки, с которой может быть измерена масса в 1 г.

б) Атом водорода состоит из электрона, связанного с протоном; его масса покоя  $M_H$  меньше суммы масс покоя  $m$  (свободного электрона) и  $M_p$  (протона). Избыток масс этих свободных частиц равен энергии ионизации (энергии связи), деленной на  $c^2$ . Масса  $M_H$  атома H равна  $1,67338 \cdot 10^{-24}$  г. Энергия связи электрона с протоном также известна: 13,6 эв, или  $22 \cdot 10^{-12}$  эрг; таким образом,

$$M_p + m - M_H = \frac{22 \cdot 10^{-12}}{c^2} \cong 2,4 \cdot 10^{-32} \text{ г}, \quad (33)$$

что составляет  $10^{-8}$  массы атома водорода. Это опять неизмеримо малая величина.

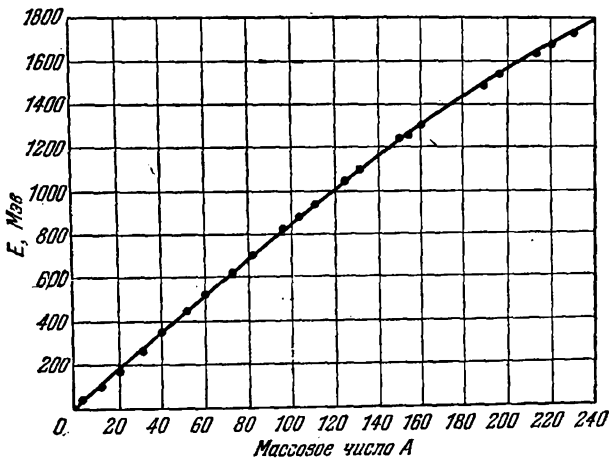


Рис. 12.9. Энергия связи ядер как функция массового числа A. Напомним, что энергия в 1 Мэв эквивалентна массе в  $1,76 \cdot 10^{-27}$  г. На графике представлены не все ядра.

в) Сумма масс покоя протона и нейтрона равна

$$M_p + M_n = (1,6725 + 1,6748) \cdot 10^{-24} \text{ г} = 3,3473 \cdot 10^{-24} \text{ г}. \quad (34)$$

Энергия связи дейтрона относительно свободных протона и нейтрона составляет 2,226 Мэв, что равно

$$\frac{2,226}{0,511} mc^2 = 4,36 mc^2, \quad (35)$$

где  $m = 0,911 \cdot 10^{-27}$  г — масса покоя электрона. Экспериментально наблюдаемая масса дейтрона составляет  $3,34334 \cdot 10^{-24}$  г, откуда

$$\Delta M = M_p + M_n - M_d = (3,3473 - 3,3433) \cdot 10^{-24} \text{ г} = 4,0 \cdot 10^{-27} \text{ г}, \quad (36)$$

или

$$\Delta M \cong 4,4 m, \quad \Delta M c^2 = 4,4 mc^2, \quad (37)$$

в удовлетворительном согласии со значением энергии связи, приведенным в (35). Результат выражен через массу электрона, чтобы

дать более наглядное представление об участвующих здесь величинах. Приведенные здесь данные дают наиболее надежное значение массы нейтрона.

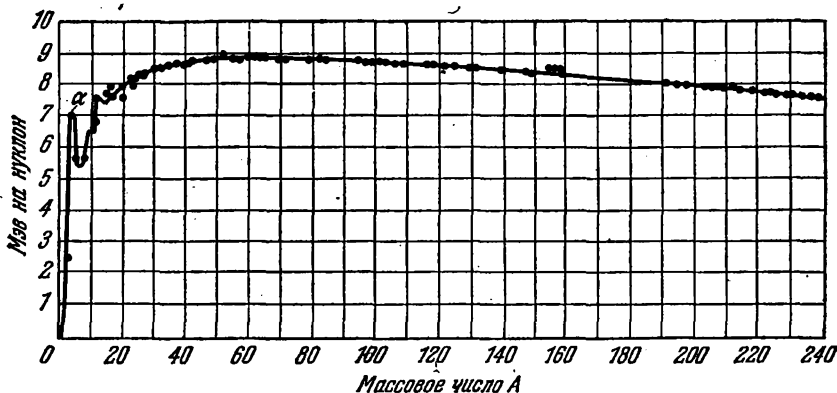


Рис. 12.10. Энергия связи на нуклон (в Мэв на нуклон) как функция массового числа  $A$ . Точка, помеченная буквой  $\alpha$ , соответствует  $\text{He}^4$ , имеющему сравнительно высокую энергию связи.

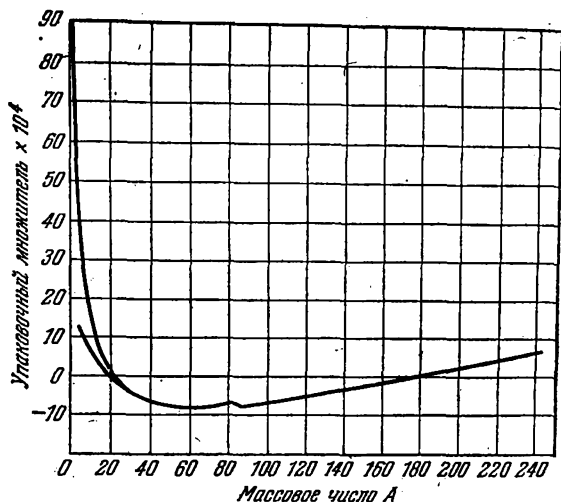


Рис. 12.11. График упаковочного множителя. Дефект массы  $\Delta$  определяется как разность атомной массы изотопа  $M$  и его массового числа  $A$ :  $\Delta = M - A$ . Упаковочный множитель  $F$

определяется как 
$$F = \frac{\Delta}{A} = \frac{M - A}{A}$$

г) В прилагаемой таблице сопоставлены наблюдаемые значения выделяемой энергии  $\Delta E$  и дефекта массы  $\Delta M$  для некоторых ядерных реакций. Используется новая атомная единица массы, равная одной двенадцатой массы атома углерода  $\text{C}^{12}$ .



Сравнение вычисленных и наблюдаемых энергий расщепления \*)

Реакции	Дефект массы и углеродных а. е. м.	Выделяемая энергия, Мэв	
		$\Delta Mc^2$	$\Delta E$
$Be^9 + H^1 \rightarrow Li^6 + He^4$	0,00242	2,25	2,28
$Li^6 + H^2 \rightarrow He^4 + He^4$	0,02381	22,17	22,20
$B^{10} + H^2 \rightarrow C^{11} + n^1$	0,00685	6,38	6,08
$N^{14} + H^2 \rightarrow C^{12} + He^4$	0,01436	13,37	13,40
$N^{14} + He^4 \rightarrow O^{17} + H^1$	-0,00124	-1,15	-1,16
$Si^{28} + He^4 \rightarrow P^{31} + H^1$	-0,00242	-2,25	-2,23

\*) S. D u s h m a n, General Electric Review 47, 6-13 (Oct. 1944).

Пример. Звездные реакции с превращениями энергии. Важнейшим источником энергии Солнца и большинства звезд является ядерное сжигание протонов с образованием гелия (рис. 12.12).

Выделение энергии в расчете на один образующийся атом гелия может быть вычислено из итогового изменения массы в реакции, которое равно

$$4M_p + 2m - M(He^4) = 4(1,6725 \times 10^{-24}) + 2(0,911 \cdot 10^{-27}) - 6,647 \times 10^{-24} \cong 0,045 \cdot 10^{-24} \text{ г} \cong 50 m, \quad (38)$$

где  $m$  — масса электрона. Результат, полученный в (38), эквивалентен  $50 \cdot 0,511$  Мэв, или около 25 Мэв. Два электрона включены в реакцию для того, чтобы сбалансировать два электрона, принадлежащие атому гелия. Табличные атомные массы обычно включают суммарную массу нормального числа атомных электронов; использованная же нами масса протона  $M_p$  не включает в себя массы электрона.

В центре Солнца температура составляет  $2 \cdot 10^7$  °К. Предполагается, что при этой температуре среди ядерных процессов преобладает следующая совокупность

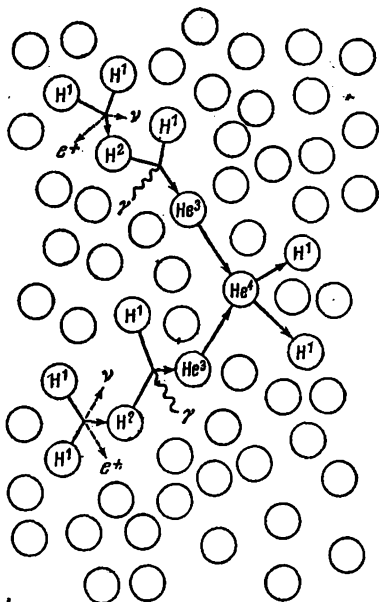
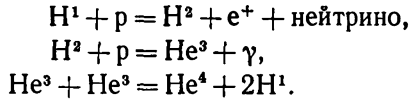


Рис. 12.12. Схема синтеза гелия из водорода по протонному циклу, происходящего в звездах с массой, не превышающей массы Солнца, в которых имеет место основная последовательность ядерных превращений. Плотность  $10^3$  г/см<sup>3</sup>. Температура  $10^7$  °К. Итоговый результат: 4 ядра водорода → ядро гелия; выделенная энергия =  $10^7$  кв-ч на фунт ( $2,2 \cdot 10^6$  кв-ч/кг) превращенного вещества (по данным Фаулера)

реакций:



Итоговый результат заключается в сгорании водорода с образованием  $\text{He}^4$ . Следует отметить, что в первой стадии выделяется нейтрино (нейтральная частица, лишенная массы покоя), так что Солнце является мощным источником нейтрино. С веществом эти частицы взаимодействуют очень слабо; таким образом, почти все нейтрино, образуемые в звездных ядерных реакциях, вылетают в космическое пространство. Они способны переносить до 10% выделяемой Солнцем энергии.

Отличное изложение вопроса о происхождении элементов можно найти в статье: Willam A. Fowler, Proc. Nat. Acad. Sci. 52. 524—548 (1964).

### 12.5. Работа и энергия

Обратимся к другой, более привычной цепи рассуждений, приводящей к выражению (15) релятивистской энергии. В гл. 5 было показано, что быстрота, с которой сила  $\mathbf{F}$  совершает работу по перемещению материальной точки, может быть выражена следующим образом:

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}. \quad (39)$$

В релятивистской области при этом имеем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{M\mathbf{v}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (39a)$$

где  $M$  — постоянная масса покоя. Отсюда, будучи обобщено на релятивистскую область, уравнение (39) принимает вид

$$\frac{dW}{dt} = M\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (40)$$

Нетрудно показать, что  $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = v\dot{v}$ . При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} &= \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{\dot{\mathbf{v}}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{\mathbf{v}(v\dot{v}/c^2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \right\} = \\ &= \frac{1-(v^2/c^2) + (v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} v\dot{v} = \frac{d}{dt} \frac{c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

В приведенных выше выражениях используется обозначение  $\dot{v} = dv/dt$ . Таким образом, быстрота совершения работы по перемещению материальной точки получает следующее выражение:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{Mc^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (42)$$

После интегрирования имеем

$$W = \frac{Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + W_0, \quad (43)$$

где  $W_0$  — постоянная. Естественно считать, что работа, затраченная на перемещение свободной материальной точки, равна приращению ее кинетической энергии. Тогда  $W$  здесь равно кинетической энергии  $K$  при условии, что  $W=0$  при  $v=0$ . Отсюда  $W_0$  определяется как  $-Mc^2$ , и релятивистское выражение кинетической энергии принимает вид

$$K = \frac{Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - Mc^2 = Mc^2(\gamma - 1). \quad (44)$$

Используя уравнение (44), перепишем выражение для кинетической энергии (15) в виде

$$E = Mc^2 + K. \quad (45)$$

Таким образом, релятивистская энергия свободной материальной точки является суммой энергии, связанной с массой покоя, и релятивистской кинетической энергии. При  $v/c \ll 1$ , согласно уравнению (27), можно написать

$$\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2}, \quad (46)$$

откуда в случае  $v/c \ll 1$  релятивистская кинетическая энергия (44) преобразуется к виду

$$K \cong Mc^2 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) - Mc^2 = \frac{1}{2} Mv^2 \quad (47)$$

в согласии со справедливым для этого случая нерелятивистским выражением.

Предположим, что, как и в выражении (15), мы даем *определение* полной релятивистской энергии  $E$  материальной точки в виде равенства

$$E = \frac{Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (48)$$

Мы уже видели, что подобно импульсу  $p$  эта величина сохраняется при релятивистских столкновениях. В нерелятивистском случае ( $v/c \ll 1$ ) выражение для  $E$  сводится к формуле

$$E \cong Mc^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + \dots \quad (49)$$

Из уравнения (16) нам известно, что

$$E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4. \quad (50)$$

Это равенство связывает  $E$  с  $p$  вне зависимости от скорости. Часть энергии связана с массой покоя, а другая часть — с импульсом.

Далее, извлекая положительный корень, имеем

$$E = (p^2 c^2 + M^2 c^4)^{1/2} = M c^2 \left[ 1 + \left( \frac{p^2}{M^2 c^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (51)$$

что составляет релятивистское обобщение равенства

$$E = M c^2 + \frac{1}{2} M v^2.$$

Выше, в связи с выражением (26а), было упомянуто, что условие сохранения энергии заключается в том, чтобы

$$\sum_{i=1}^n E_i = \text{const} \quad (52)$$

до и после столкновения, где  $E_i$  — релятивистская энергия  $i$ -й частицы. Сохранение релятивистской энергии соблюдается даже при столкновениях, которые мы назвали неупругими, так как потеря кинетической энергии (на внутреннее «возбуждение» частиц) возмещается в виде энергии, связанной с приращением масс. Условие сохранения импульса принимает вид

$$\sum_{i=1}^n p_i = \text{const} \quad (53)$$

до и после столкновения.

## 12.6. Частицы с массой покоя, равной нулю

Если  $M=0$ , то согласно уравнению (50)

$$E = pc, \quad (54)$$

и при этом уравнение (21а) дает

$$v = c, \quad (55)$$

откуда видно, что частица с массой покоя, равной нулю, всегда движется со скоростью света. Она имеет одну и ту же скорость и одну и ту же массу покоя, равную нулю, с точки зрения любого наблюдателя. Световой импульс в вакууме обладает именно тем свойством, что для него  $v \equiv c$ , хотя мы и не всегда думаем о нем как о частице. Во многих явлениях, в которых квантовая природа света проявляется ярче волновой, мы обнаруживаем, что свет ведет себя так, как будто он состоит из частиц, называемых фотонами или световыми квантами. Фотон есть частица с массой покоя, равной нулю, но он не является единственной частицей, обладающей этой особенностью (см. гл. 15). Все частицы с нулевой массой покоя обнаруживают чрезвычайно простую закономерность, выражаемую равенством  $E=pc$ . С другой стороны, энергия фотона связана с частотой  $\nu$  равенством  $E=h\nu$ , где  $h$  — постоянная Планка. Таким образом,  $E=h\nu=pc$ , откуда  $p=h\nu/c$ .

С фотоном, обладающим энергией  $E$ , всегда связан импульс  $E/c$ . Когда фотон поглощается атомом, импульс  $E/c$  передается атому. Если же фотон отражается (поглощается и вновь излучается в обратном направлении), то переданный импульс составляет  $2E/c$ .

Подсчитаем давление излучения внутри большого кубического сосуда с ребром  $L$ , содержащего большое число фотонов с суммарной плотностью лучистой энергии  $U$ . Мы предполагаем, что фотоны



Рис. 12.13. Комета Мкрое, 27 августа 1957 г. (Фото обсерваторий Маунт Вильсон и Паломар)

движутся хаотически, так что в среднем треть фотонов движется параллельно каждому ребру куба. В единицу времени фотон ударяется о заданную грань куба в среднем  $c/6L$  раз. Изменение импульса за один удар составляет  $2E/c$ . Усредненная по времени сила, действующая на одну грань, будет

$$F = (\text{число ударов в единицу времени}) (\text{изменение импульса за один удар}) = N \left( \frac{c}{6L} \right) \left( \frac{2E}{c} \right) = N \frac{E}{3L}, \quad (56)$$

где  $N$  — число всех фотонов в кубе. Если  $n$  — число фотонов в единице объема, то  $N = nL^3$ , что после подстановки в (56) дает

$$F = nL^2 \frac{E}{3}, \text{ или } P = \frac{1}{3} U, \quad (57)$$

где давление излучения  $P = F/L^2$ , а  $U = nE$ .

Солнечный свет приносит на поверхность Земли около  $10^6 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек}$  лучистой энергии. Если вся эта энергия поглощается, то развиваемое давление составляет  $(10^6/c) \text{ дин/см}^2$ , или около  $3 \cdot 10^{-5} \text{ дин/см}^2$ . Если вся эта энергия отражается, давление будет вдвое больше. Это — ничтожно малое давление, и его влияние на движение Земли пренебрежимо мало. Однако у чрезвычайно разреженных кометных хвостов площадь поверхности, отнесенная к единице массы, достаточно велика и суммарный эффект этого давления может быть заметным. Впрочем, бомбардировка кометного хвоста вещественными частицами, испускаемыми Солнцем, может оказаться более эффективной. В недрах весьма горячей звезды малой плотности давление излучения может играть огромную роль. Для всякой частицы с достаточно большой энергией ( $E \gg Mc^2$ ) соотношения, включающие импульс и энергию, будут приблизительно те же, что и для фотона. Мы всегда можем подобрать воображаемого движущегося наблюдателя, для которого частица будет находиться в покое. Но для фотона, хотя его энергия и импульс различны с точки зрения разных наблюдателей, скорость всегда будет равна  $v = c = E/p$ , и его невозможно «остановить» путем подбора системы отсчета.

Рассмотрим уединенный атом водорода, находящийся в покое, но в возбужденном электронном состоянии. Он излучает световой квант с энергией  $E$  и импульсом  $(E/c) \hat{x}$ . При этом он испытывает отдачу с импульсом  $-(E/c) \hat{x}$ . В результате отдачи центр масс системы (состоящей из атома и светового кванта) не сможет остаться в покое, если мы не припишем световому кванту некоторую массу  $M_\gamma$ . Чтобы ее найти, нужно положить

$$\dot{R}_{\text{ц.м.}} \equiv \frac{M_H \dot{r}_H + M_\gamma \dot{r}_\gamma}{M_H + M_\gamma} = 0. \quad (58)$$

Но  $M_H \dot{r}_H = -(E/c) \hat{x}$  и  $\dot{r}_\gamma = c \hat{x}$ , откуда

$$-\frac{E}{c} + M_\gamma c = 0, \quad M_\gamma = \frac{E}{c^2}. \quad (59)$$

Это та самая масса, которая получилась бы по формуле Эйнштейна. Масса светового кванта не является массой покоя, а представляет собой массу, эквивалентную энергии  $E$ . Масса покоя кванта равна нулю.

## 12.7. Преобразование скорости изменения импульса

Скорость изменения импульса дается выражением

$$\frac{dp}{dt} = M \frac{d}{dt} \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (60)$$

где  $M$  — масса покоя частицы. В другой системе отсчета мы имеем дело с

$$\frac{dp'}{dt'}.$$

Постараемся избежать выражения «релятивистская сила» (так как  $dp/dt$  не ведет себя как часть 4-вектора \*). Предположим, что в некоторое мгновение частица находится в покое относительно системы  $S'$ , движущейся со скоростью  $v_x$  относительно  $S$ . Из формул преобразования Лоренца для  $p$  и  $E$  известно, что

$$\Delta p_y = \Delta p'_y \quad \text{и} \quad \Delta p_z = \Delta p'_z. \quad (61)$$

Промежуток времени  $\Delta t'$  в  $S'$  является собственным промежутком  $\Delta \tau$ :

$$\Delta t' = \Delta \tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \Delta t. \quad (62)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{\Delta p'_y}{\Delta \tau}, \quad (63)$$

причем аналогичное выражение получается для  $\Delta p_z/\Delta t$ . Таким образом,

$$\boxed{\frac{dp_y}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{dp'_y}{d\tau}, \quad \frac{dp_z}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{dp'_z}{d\tau}.} \quad (64)$$

Составляющие по  $x$  преобразуются иначе. Как нам известно из (20а),

$$p_x = \frac{p'_x + vE'/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (65)$$

или

$$\Delta p_x = \frac{\Delta p'_x + v \Delta E'/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (66)$$

С другой стороны,

$$E' = (M^2 c^4 + p'^2 c^2)^{1/2}, \quad (67)$$

\* Четырехмерный вектор. (Прим. ред.)

так что

$$\Delta E' = \frac{p_x \Delta p_x c^2}{(M^2 c^4 + p'^2 c^2)^{1/2}}. \quad (68)$$

Но по условию в системе  $S'$  в рассматриваемый момент времени  $p'_x=0$ ; тогда (66) принимает вид

$$\Delta p_x \cong \frac{\Delta p'_x}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (69)$$

а с учетом (62)

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} \cong \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta \tau}. \quad (70)$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  имеем

$$\boxed{\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{d\tau}}. \quad (71)$$

Формулы преобразования (64) и (71) играют важную роль при изложении электромагнетизма в т. II настоящего курса.

## 12.8. Постоянство заряда

Закон  $q\mathbf{E}=\dot{\mathbf{p}}$  движения частицы, несущей заряд  $q$  в электрическом поле  $\mathbf{E}$ , является неполным, пока мы не знаем зависимости заряда от скорости и ускорения частицы, имеющей импульс  $\mathbf{p}$ . Лучшим свидетельством весьма точного соблюдения постоянства заряда протона или электрона является тот экспериментальный факт, что пучки атомов и молекул водорода не испытывают отклонения в однородном электрическом поле, перпендикулярном к пучку. Атом водорода состоит из электрона ( $e$ ) и протона ( $p$ ). Молекула водорода состоит из двух электронов и двух протонов. Даже при очень медленном движении протонов электроны движутся вокруг них со средней скоростью около  $10^{-2}c$ . Неотклоняющаяся молекула имеет постоянный импульс, так что экспериментальный результат говорит о том, что  $\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_e = 0 = (e_p + e_e)\mathbf{E}$ . Таким образом, из экспериментов следует, что в атоме или молекуле  $e_e = -e_p$ , несмотря на то что только электроны обладают большой скоростью, которая притом различна в атомах и молекулах. Количественно заряд электрона оказывается независимым от скорости и равным заряду протона с точностью до  $10^{-7}\%$  вплоть до скоростей электронов порядка  $10^{-2}c$ .

Экспериментальная сторона этого вопроса обсуждается в т. II. Экспериментальный результат заключается в том, что заряд не зависит от скорости частицы или наблюдателя. Таким образом, при переходе к другой системе отсчета заряд и масса преобразуются по-разному.



## Задачи

1. Релятивистский импульс Каков импульс протона, имеющего кинетическую энергию в 1 Бэв (1 Гэв \*)? (Если  $E$  измеряется в Гэв, то  $p$  можно измерять в Гэв/с.)

О т в е т. 1,7 Гэв/с.

2. Релятивистский импульс. Каков импульс электрона, имеющего кинетическую энергию 1 Гэв?

О т в е т. 1,0005 Гэв/с.

3. Импульс фотона. Каков импульс фотона, имеющего энергию 1 Гэв?

4. Энергия и импульс быстрого протона. Для некоторого протона по лабораторным измерениям  $\beta=0,995$ . Каковы его релятивистская энергия и импульс?

5. Космические частицы высоких энергий. Известно, что космические частицы могут обладать энергией до  $10^{19}$  эв и, возможно, даже выше.

а) Какова кажущаяся масса такого рода частиц (приближенно)?

О т в е т.  $1,8 \cdot 10^{-14}$  г.

б) Каков их импульс (приближенно)?

О т в е т.  $5 \cdot 10^{-4}$  г·см/сек.

6. Преобразование энергии и импульса. Относительно лабораторной системы отсчета протон имеет  $\beta=0,999$ . Определить его энергию и импульс по отношению к системе отсчета, движущейся в том же направлении, с  $\beta'=0,990$  относительно упомянутой лабораторной системы.

7. Энергия быстрого электрона. Электрон имеет  $\beta=0,99$ . Какова его кинетическая энергия?

О т в е т. 3,1 Мэв.

8. Отдача при гамма-излучении. Каков импульс отдачи относительно лабораторной системы для ядра  $\text{Fe}^{57}$ , отскакивающего при испускании фотона с энергией в 14 кэв? Является ли этот импульс релятивистским?

О т в е т.  $7,5 \cdot 10^{-19}$  г·см/сек.

9. Отдача ядра. Рассматривается гамма-луч с энергией  $E$ , падающий на протон, который покоится относительно лаборатории.

а) Каков импульс гамма-луча относительно лабораторной системы отсчета?

б) Показать, что скорость  $V$  центра масс относительно лаборатории определяется равенством

$$\frac{V}{c} = \frac{E_{\gamma}}{E_{\gamma} + M_p c^2}.$$

10. Распад нейтрона. Используя данные гл. 12, определить энергию, выделяемую при распаде нейтрона на протон и электрон.

О т в е т. 0,79 Мэв.

11. Инвариантность относительно преобразования Лоренца в системе из двух частиц. Полный импульс и энергия системы из двух частиц соответственно равны  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  и  $E = E_1 + E_2$ . Показать в явном виде, что преобразование Лоренца для  $\mathbf{p}$  и  $E$  согласуется с инвариантностью величины  $E^2 - p^2 c^2$ .

12. Переход от системы центра масс к системе, связанной с одной из частиц. Два протона движутся в противоположных направлениях от общей точки со скоростью  $\beta=0,5$ .

а) Каковы энергия и импульс одного из протонов относительно общей точки?

б) Пользуясь преобразованием Лоренца, найти энергию и импульс одного протона относительно системы отсчета, связанной с другим протоном. (В задачах такого рода обычно целесообразно выражать энергию через ее отношение к энергии, связанной с той или иной массой покоя.)

13. Излучение массы радиопередатчиком. Какова масса, эквивалентная энергии, излучаемой антенной за 24 часа при мощности радионизлучения в 1000 вт?

\*) Слово *биллион* имеет разные значения в разных странах: в США оно означает  $10^9$ , а в Англии  $10^{12}$ . Приставка *гига* (G, Г) также часто употребляется для обозначения  $10^9$ . Таким образом, 1 Бэв (ам.)  $\equiv$  1 Гэв  $\equiv$   $10^9$  эв.

14. *Солнечная энергия.* Солнечной постоянной называется плотность потока солнечного излучения на расстоянии Земли от Солнца. Измерения показали, что эта постоянная равна  $1,4 \cdot 10^6$  эрг/сек·см<sup>2</sup>.

а) Показать, что полный поток солнечного излучения составляет приблизительно  $4 \cdot 10^{33}$  эрг/сек.

б) Показать, что средняя скорость излучения энергии с грамма солнечного вещества приблизительно равна  $2$  эрг/сек·г, или около  $6 \cdot 10^7$  эрг/год·г.

в) С помощью (38) показать, что энергия, выделяемая с одного грамма водорода, затраченного на синтез He<sup>4</sup>, составляет около  $6 \cdot 10^{18}$  эрг.

г) Показать, что если бы Солнце состояло на одну треть по массе из водорода и его ядерное сгорание продолжалось без изменений, то излучение Солнца на существующем уровне смогло бы продолжаться еще в течение  $3 \cdot 10^{10}$  лет.

15. *Движение под действием давления излучения.* Один из возможных способов продвижения в космическом пространстве заключается в использовании большого отражающего металлического листа, укрепленного на космическом корабле. Требуется оценить порядок ускорений, которые можно получить для подобного корабля обычных размеров на расстоянии одной астрономической единицы от Солнца.

16. *Импульс (количество движения) вспышки света, испускаемого лазером.* Большой лазер может генерировать световые вспышки с энергией в 2000 Дж.

а) Показать, что импульс при этом имеет порядок  $1$  г·см/сек \*).

б) Рассмотреть возможный способ обнаружения этого импульса, если длительность вспышки света составляет миллисекунду.

### Из истории физики. Закон взаимосвязи массы и энергии

Первая работа Эйнштейна по специальной теории относительности была напечатана в «Annalen der Physik» 17, 891—921 (1905) под заглавием «Об электродинамике движущихся тел». Указанный том этого журнала содержит три классические статьи Эйнштейна. Одна из них посвящена квантовой интерпретации фотоэлектрического эффекта (стр. 132—148); в другой излагается теория броуновского движения (стр. 549—560); третья — по теории относительности — цитирована выше. (Следует отметить, что многие из результатов этой статьи были предвосхищены Ларморов, Лоренцем и другими.) В том же году в томе 18 того же журнала (стр. 639—641) появилась еще одна короткая статья Эйнштейна под заглавием «Зависит ли инерция тела от его энергии?». Ниже дается сокращенное изложение рассуждений Эйнштейна по этому вопросу.

Рассмотрим (как это делается в статье Эйнштейна по электродинамике) пакет, или группу, плоских световых волн. Предположим, что пакет обладает энергией  $\epsilon$  и движется в положительном направлении  $x$  в системе отсчета  $S$ . По измерениям, произведенным в системе  $S'$ , движущейся со скоростью  $V\hat{x}$  относительно  $S$ , волновой пакет имеет энергию

$$\epsilon' = \epsilon \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (72)$$

Этот результат был выведен Эйнштейном в статье по электродинамике без упоминания понятия фотона. Однако результат (72) прямо вытекает из следующих соображений. Как было показано в (11.41), при продольном эффекте Доплера частоты, воспринимаемые наблюдателями, покоящимися в системах  $S'$  и  $S$ , связаны соотношением

$$\nu' = \nu \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2}. \quad (73)$$

По квантовым представлениям световой импульс рассматривается как целое число световых квантов или фотонов, каждый из которых имеет энергию  $h\nu$  (при наблюдении в системе  $S$ ), где  $h$  — постоянная Планка. При наблюдении импульса

\* ) Речь идет о расчете величины  $mc$  и использовании формулы  $E = mc^2$ ; отв. 0, (6)... г·см/сек. (Прим. ред.)

из системы  $S'$  число фотонов остается без изменения, но энергия каждого фотона становится равной  $h\nu'$ . (При этом предполагается, что значения  $h$  в  $S'$  и  $S$  одинаковы.) Из сказанного следует, что энергия  $\epsilon'$  светового импульса пропорциональна  $\nu'$ . Тогда (72) непосредственно вытекает из (73).

Теперь рассмотрим тело, неподвижное относительно системы  $S$  и имеющее начальную энергию  $E_0$  в системе  $S$  и  $E'_0$  в системе  $S'$ . Предположим, что это тело испускает световой импульс с энергией  $\frac{1}{2}\epsilon$  в положительном направлении  $x$  и такой же импульс с такой же энергией в противоположном направлении. После этого тело останется в покое относительно  $S$ . Обозначим через  $E_1$  и  $E'_1$  энергию этого тела после испускания упомянутых двух импульсов соответственно в системах  $S$  и  $S'$ . Тогда вследствие закона сохранения энергии имеем

$$E_0 = E_1 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon, \quad (74)$$

$$E'_0 = E'_1 + \frac{1}{2}\epsilon \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\epsilon \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} = E'_1 + \frac{\epsilon}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \quad (75)$$

Вычитая (75) из (74), получаем

$$E_0 - E'_0 = E_1 - E'_1 + \epsilon - \frac{\epsilon}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \quad (76)$$

С другой стороны, разность энергий  $E'_0 - E_0$  должна как раз равняться начальной кинетической энергии тела  $K_0$  с точки зрения наблюдателя  $S'$ , так как тело вначале покоилось в  $S$ . Аналогичным образом, разность  $E'_1 - E_1$  есть конечная кинетическая энергия с точки зрения того же наблюдателя. Таким образом, уравнение (76) может быть переписано в виде

$$K_0 - K_1 = \epsilon \left( \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} - 1 \right). \quad (77)$$

Мы видим, что в результате излучения света кинетическая энергия тела уменьшается. Величина этого уменьшения не зависит от свойств тела. Если  $\beta \ll 1$ , то

$$K_0 - K_1 \cong \frac{1}{2}\epsilon\beta^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{c^2}V^2 \quad (78)$$

и масса покоя тела уменьшается на

$$\Delta M = \frac{\epsilon}{c^2}. \quad (79)$$

Из этого соотношения Эйнштейн сделал следующие заключения:

*«Если тело выделяет энергию  $\epsilon$  в форме излучения, его масса уменьшается на  $\epsilon/c^2$ . Тот факт, что энергия, отдаваемая телом, становится энергией излучения, ничего не меняет, так что мы вправе сделать более общее заключение о том, что масса тела является мерой его энергии; если энергия изменяется на  $\epsilon$ , то масса изменяется в том же направлении на  $\epsilon/(9 \cdot 10^{20})$  при измерении энергии в эргах и массы в граммах.*

Не исключена возможность, что данная теория сможет быть успешно проверена на телах, энергия которых способна сильно изменяться (как, например, у солей радия).

Если эта теория соответствует фактам, то излучение является средством передачи инерции от излучающих тел поглощающим».

## ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

В гл. 4 рассматривался целый ряд задач, связанных с нерелятивистским движением частиц в электрическом и магнитном полях. В гл. 3 и затем в гл. 6 рассматривались упругое и неупругое соударения двух нерелятивистских частиц. Теперь мы распространим несколько прежних решений на релятивистскую область. Во многих случаях решения не представляют особых трудностей, но некоторые из них имеют чрезвычайно большое значение для физики частиц высоких энергий и для астрофизики.

То обстоятельство, что импульс ускоряемой релятивистской частицы может неограниченно возрастать даже при скоростях, близких к скорости света, лежит в основе работы больших ускорителей и анализа импульса, которым обладают частицы высоких энергий, что осуществляется с помощью отклоняющего магнитного поля. Отклонение частиц в магнитных полях широко используется в исследовании космических лучей и в исследовательских работах, посвященных частицам высоких энергий.

Пороговая энергия для реакции релятивистской частицы гораздо выше при наблюдении в лабораторной системе отсчета, чем в системе центра масс. Этот эффект является одним из главных факторов, сужающих границы исследования в физике элементарных частиц.

В целях приобретения навыков применения некоторых типичных приемов мы сначала рассмотрим отклонение релятивистской частицы в электрическом поле.

### 13.1. Ускорение заряженной частицы постоянным продольным электрическим полем

Уравнение движения частицы с зарядом  $q$  и массой покоя  $M$  в однородном постоянном электрическом поле \*)  $\mathcal{E}\hat{x}$  имеет вид

$$p\hat{x} = q\mathcal{E}\hat{x} \quad (1)$$

---

\*) Напряженность электрического поля мы обозначаем здесь символом  $\mathcal{E}$ , чтобы избежать путаницы с энергией  $E$ .

или, при  $p = Mv/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ ,

$$M \frac{d}{dt} \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = q\mathcal{E}, \quad (2)$$

если мы примем  $v_y = v_z = 0$ , что необходимо при ускорении в направлении  $x$  из состояния покоя. Интегрируя (2) по времени, мы сразу получаем

$$M \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = q\mathcal{E}t \quad (3)$$

при  $v(0) = 0$ . После возведения в квадрат обеих частей равенства и перестановок находим

$$v^2 = \frac{(q\mathcal{E}t/Mc)^2}{1 + (q\mathcal{E}t/Mc)^2} c^2. \quad (4)$$

Для коротких промежутков времени \*), удовлетворяющих неравенству  $t \ll Mc/q\mathcal{E}$ , знаменатель в (4) можно заменить единицей; тогда

$$v^2 \cong \left( \frac{q\mathcal{E}}{M} t \right)^2, \quad (5)$$

что полностью совпадает с нерелятивистским приближением, рассмотренным в гл. 4.

Для больших промежутков времени, удовлетворяющих неравенству  $t \gg Mc/q\mathcal{E}$ , имеем релятивистское приближение

$$v^2 \cong \left[ 1 - \left( \frac{Mc}{q\mathcal{E}t} \right)^2 \right] c^2, \quad (6)$$

которое показывает, каким образом  $v$  приближается к величине  $c$ , играющей роль предельной скорости. При больших промежутках времени получаем из (6)

$$\frac{v^2}{c^2} \cong 1 - \left( \frac{Mc}{q\mathcal{E}t} \right)^2, \quad (7)$$

что при обозначении  $\beta \equiv v/c$  дает

$$\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \cong \frac{q\mathcal{E}t}{Mc}. \quad (8)$$

Как следует из гл. 12 и уравнения (8), релятивистское выражение энергии при  $t \gg Mc/q\mathcal{E}$  принимает вид

$$E = \frac{Mc^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} \approx q\mathcal{E}ct. \quad (9)$$

Этот результат есть не что иное, как произведение силы на путь,

\*) При  $\mathcal{E} = 1$  ед. СГСЭ  $v/cm$  имеем для электрона

$$\frac{mc}{e\mathcal{E}} \approx \frac{(10^{-27})(3 \cdot 10^{10})}{(5 \cdot 10^{-10})} \text{ сек} \approx 10^{-7} \text{ сек.}$$

пройденный за время  $t$  при скорости  $v$ . В этом же случае больших времен для количества движения получаем

$$p \approx \frac{Mc}{(1-\beta^2)^{1/2}} \approx q\mathcal{E}t. \quad (10)$$

Отметим характерную релятивистскую особенность: импульс может

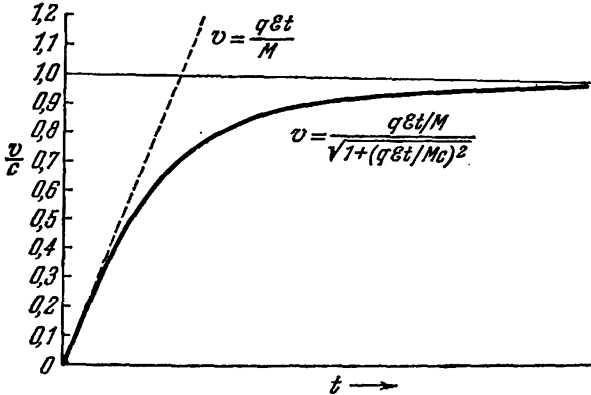


Рис 13.1. Скорость  $v$  заряда  $q$ , связанного с массой покоя  $M$  и ускоренного из состояния покоя электрическим полем напряженностью  $\mathcal{E}$ , изображена как функция времени. При  $t \gg 0$  скорость  $v$  стремится к пределу  $c$ . Штриховая линия показывает ход изменения скорости заряда со временем по предсказаниям нерелятивистской механики.

продолжать возрастать со временем, даже когда скорость практически установилась.

Смещение  $x$  может быть найдено после извлечения квадратного корня из (4). Тогда, обозначив  $v$  через  $dx/dt$  и  $q\mathcal{E}/Mc$  через  $s$ , имеем

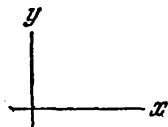


Рис. 13.2. Заряд  $q$  с начальным импульсом  $p_x$  входит в поперечное поле  $\mathcal{E}$ .

$$dx = \frac{cst}{(1+s^2t^2)^{1/2}} dt. \quad (11)$$

Интегрируя в пределах от 0 до  $t$ , получаем смещение:

$$x = \frac{Mc^2}{q\mathcal{E}} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{q\mathcal{E}t}{Mc} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (12)$$

(Читателю предлагается самому проверить алгебраические преобразования.) Мы исходили из того, что  $x(0)=0$  и  $v(0)=0$ . При больших временах  $x \approx ct$ , т. е. частица движется почти со скоростью света.

**Пример. Ускорение поперечным электрическим полем.** Рассмотрим заряженную частицу, двигавшуюся вдоль оси  $x$  с большим импульсом  $p_0$  и затем вошедшую в область длиной  $L$ , в которой

имеется поперечное электрическое поле  $\mathcal{E}_y$ . Требуется найти угол, на который частица будет отклонена этим полем.

Имеем уравнения движения

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \quad \frac{dp_y}{dt} = q\mathcal{E}, \quad (13)$$

откуда

$$p_x = p_0, \quad p_y = q\mathcal{E}t. \quad (14)$$

Требуется найти скорость  $v$ . Если мы сможем определить энергию  $E$ , то скорость можно будет найти, используя соотношение  $v = pc^2/E$ , выведенное в гл. 12.

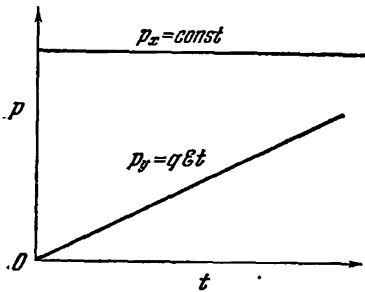


Рис. 13.3. Сила, действующая в направлении  $y$ , равна  $q\mathcal{E}$ , так что  $p_y = q\mathcal{E}t$ , тогда как  $p_x$  остается постоянным. Энергия

$$E = c \sqrt{(p_x^2 + p_y^2) + M^2 c^2}$$

возрастает.

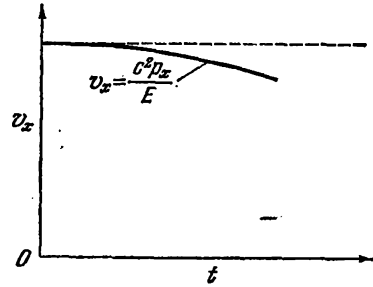


Рис. 13.4. Так как

$$v_x = c^2 p_x / E,$$

происходит уменьшение  $v_x$  при ускорении частицы в направлении  $y$ . Релятивистская механика предсказала бы, разумеется, постоянство  $v_x$ .

Энергию определяем следующим образом:

$$E^2 = M^2 c^4 + p^2 c^2 = M^2 c^4 + p_0^2 c^2 + (q\mathcal{E}t)^2 = E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2, \quad (15)$$

где  $E_0$  — начальная энергия. Поэтому, используя (14) и соотношение между скоростью и импульсом, имеем

$$v_x = \frac{p_0 c^2}{[E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2]^{1/2}}, \quad (16)$$

$$v_y = \frac{q\mathcal{E}t c^2}{[E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2]^{1/2}}. \quad (17)$$

Отметим, что  $v_x$  уменьшается с ростом  $t$ . Мы также видим, что  $v_y$  всегда меньше своего нерелятивистского значения  $q\mathcal{E}t/M$ . Угол, образуемый траекторией с осью  $x$  в момент  $t$ , определяется выражением

$$\operatorname{tg} \theta(t) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q\mathcal{E}t c^2}{p_0 c^2} = \frac{q\mathcal{E}t}{p_0}. \quad (18)$$

Время  $t_L$ , затрачиваемое на прохождение пути  $L$ , можно найти, решая (16) относительно  $x$ :

$$\int_0^L dx = \rho_0 c^2 \int_0^{t_L} \frac{dt}{[E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2]^{1/2}}, \quad (19)$$

или, следуя Дуайту (Dwight, 728,1):

$$L = \frac{\rho_0 c}{q\mathcal{E}} \operatorname{Arsh} \left( \frac{q\mathcal{E}t_L c}{E_0} \right), \quad (20)$$

откуда

$$t_L = \frac{E_0}{q\mathcal{E}c} \operatorname{sh} \frac{q\mathcal{E}L}{\rho_0 c}. \quad (20a)$$

### 13.2. Заряженная частица в магнитном поле

Переходим к рассмотрению важной практической задачи исследования движения частицы с зарядом  $q$  в однородном постоянном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . Уравнение движения в этом случае:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (21)$$

Как и в нерелятивистской задаче (см. гл. 4), здесь можно написать  $d\rho^2/dt=0$ , так как

$$\frac{d}{dt} \rho^2 = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2 \frac{q}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}; \quad (22)$$

но  $\mathbf{p}$  всегда параллельно  $\mathbf{v}$ , так что смешанное произведение равно нулю. Таким образом, постоянное магнитное поле не влияет на величину импульса и, следовательно, величину скорости частицы. Но если поле влияет только на направление, множитель

$$\frac{M}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (23)$$

входящий в выражение для  $\mathbf{p}$ , постоянен.

Тогда уравнение движения (21) может быть переписано в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{M}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (24)$$

Вследствие постоянства величины в (23), это уравнение имеет решения, согласно которым частица движется по окружности. Обозначим через  $\rho$  радиус окружности и через  $\omega_c$  угловую частоту движения частицы. Подставляя в (24) центростремительное ускорение  $\omega_c^2 \rho$  вместо  $d\mathbf{v}/dt$  и  $\omega_c \rho$  вместо  $v$ , получаем

$$\frac{M}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \omega_c^2 \rho = \frac{q}{c} \omega_c \rho B, \quad (25)$$

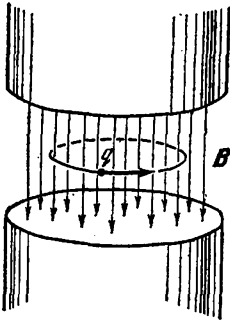


Рис. 13.5. Частица со скоростью  $v$ , перпендикулярной к однородному магнитному полю, совершает движение по окружности радиусом  $\rho = pc/qB$ .



откуда

$$\omega_c = \frac{qB(1-v^2/c^2)^{1/2}}{Mc} \quad (26)$$

Мы видим, что для быстрых частиц угловая частота движения меньше, чем для медленных. Таким образом, циклотрон может использоваться для ускорения частиц до релятивистских энергий только при том условии, что частота высокочастотного ускоряющего поля (или напряженность магнитного поля) модулируется так, чтобы обеспечивался синхронизм с применением частоты (26) при постепенном росте энергии частиц. Для нерелятивистских частиц зависимостью частоты от скорости можно пренебречь.

Значения  $\omega_c$ , предсказываемые уравнением (26), находят полное экспериментальное подтверждение в работе ускорителей на высокие энергии. Это соотношение было подтверждено для электронов, ускорявшихся в циклотроне при  $1/(1-\beta^2)^{1/2} \approx 2000$ , т. е. когда кажущаяся масса \*) частицы в 2000 раз больше ее массы покоя. Интересно выяснить, какова при этом

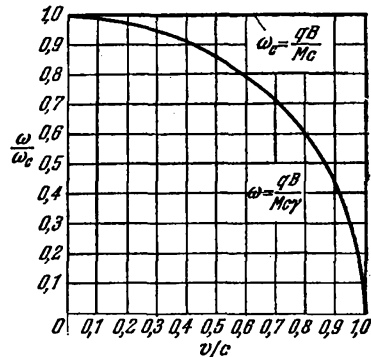


Рис. 13.6. Циклотронная частота  $\omega$  заряда  $q$  с массой покоя  $M$ , движущегося по круговой траектории в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю  $B$ , как функция отношения скорости  $v/c$ . Нерелятивистская циклотронная частота  $\omega_c$  характеризуется горизонтальной прямой.

разность  $c-v$ , т. е. насколько скорость света превышает скорость частицы. Имеем

$$1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \cong 2(1 - \beta) \cong 2000^{-2}. \quad (27)$$

При этом мы приближенно положили  $1 + \beta \cong 2$ . Из (27) следует:

$$1 - \beta = \frac{c-v}{c} \approx 10^{-7}, \quad c-v \approx 3 \cdot 10^3 \text{ см/сек}. \quad (28)$$

В составе космического излучения, по-видимому, обнаруживаются протоны с разностью  $c-v \approx 10^{-12}$  см/сек; здесь значение  $\beta$  вычисляется из данных по рассеянию энергии частицы при актах столкновения в атмосфере.

Как следует из (26), радиус круговой траектории релятивистской частицы в магнитном поле равен

$$\rho = \frac{v}{\omega_c} = \frac{cMv}{qB(1-\beta^2)^{1/2}}. \quad (29)$$

\*) То есть масса по оценке наблюдателя, относительно которого частица движется со скоростью  $V$ . (Прим. ред.)

Но правая часть содержит выражение для импульса  $p$ , так что

$$\boxed{B\rho = \frac{cp}{q}}. \quad (30)$$

Таким образом, радиус  $\rho$  круговой траектории, описываемой заряженной частицей в магнитном поле, может служить прямой мерой релятивистского импульса. Последнее соотношение лежит в основе важнейшего прямого некомбинированного метода измерения импульса заряженной релятивистской частицы. Этот метод используется при анализе фотографий, полученных с помощью пузырьковой камеры (см. гл. 15).

### 13.3. Система центра масс и пороговая энергия

Сохранение энергии налагает общее ограничение на ядерные реакции или на акты взаимодействия при столкновениях частиц. Например, фотон высокой энергии (гамма-лучи) может породить электронно-позитронную пару по реакции

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+ \quad (31)$$

только при условии, что его энергия превышает энергетический эквивалент масс покоя электрона и позитрона. Таким образом, уже одно условие сохранения энергии определяет порог минимальной энергии, необходимой для образования электронно-позитронной пары:

$$E_\gamma = 2mc^2 \cong 1,02 \cdot 10^6 \text{ эв}. \quad (32)$$

Напомним, что массы покоя электрона и позитрона одинаковы.

В свободном пространстве, однако, эта реакция не может осуществляться ни при какой энергии, так как не может быть обеспечено сохранение импульса. В гл. 12 было показано, что импульс фотона равен  $p_\gamma = E_\gamma/c$ . Рассмотрим реакцию в системе отсчета, в которой центр масс протона и электрона остается в покое. В этой системе сумма импульсов электрона и позитрона равна нулю:

$$p_{e^-} + p_{e^+} = 0. \quad (33)$$

Но в этой системе импульс налетающего фотона не равен нулю, так как не существует системы отсчета, в которой импульс фотона мог бы исчезнуть \*). Таким образом, в системе центра масс

$$p_\gamma \neq p_{e^-} + p_{e^+} = 0, \quad (34)$$

и реакция (31) неверна (не имеет места) вследствие несохранения импульса. Но если эта реакция невозможна в одной системе отсчета, то она невозможна и ни в какой другой системе.

---

\*) Приняв другую систему отсчета, мы можем изменить частоту фотона, но при этом он не может быть ни уничтожен, ни остановлен.

Эта реакция возможна лишь вблизи другой частицы, например вблизи ядра атома, так как тогда ядро может поглотить изменение импульса. Оно это делает, толкая своим кулоновским полем заряженные частицы. Тогда возможно соотношение

$$p_{\gamma} + p'_{\text{яд}} = p_{\text{яд}} + p_{e^{-}} + p_{e^{+}}. \quad (35)$$

При этом реакция изменяет импульс ядра, но не производит в нем никаких других изменений, так что ядро лишь действует как очень простой катализатор. Начальный импульс ядра может быть при этом равен нулю.

Тяжелая частица или ядро может служить хорошим поглотителем импульса без существенного поглощения энергии. Это ясно видно хотя бы из формулы нерелятивистской кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{p^2}{2M}. \quad (36)$$

Чем больше масса  $M$ , тем меньше кинетическая энергия, связанная с заданным импульсом.

*Пример. Отдача при гамма-излучении.* Ядро с массой  $M$  испускает гамма-луч энергии  $E_{\gamma}$ . Ядро вначале находилось в покое. Какова его энергия отдачи после испускания?

По условию сохранения импульса

$$0 = p_{\gamma} + p_{\text{яд}}, \quad (37)$$

где  $p_{\gamma} = E_{\gamma}/c$ . Отсюда импульс отдачи ядра равен

$$|p_{\text{яд}}| = \frac{E_{\gamma}}{c}, \quad (38)$$

а энергия отдачи ядра

$$K_{\text{яд}} = \frac{p_{\text{яд}}^2}{2M} = \frac{E_{\gamma}^2}{2Mc^2}. \quad (39)$$

При этом мы предположили, что энергия отдачи может здесь рассматриваться как нерелятивистская.

В актах соударения, при которых образуются новые частицы, требование сохранения импульса обычно исключает возможность превращения всей начальной кинетической энергии в лабораторной системе в энергетический эквивалент массы покоя новых частиц, образовавшихся при столкновении. Если существует отличный от нуля суммарный импульс в начальном состоянии (до столкновения), то должен сохраниться такой же суммарный импульс в конечном состоянии (после столкновения). Поэтому оставшиеся после столкновения частицы не могут находиться в покое; часть начальной кинетической энергии переходит в кинетическую конечных частиц.

Единственный случай, в котором вся кинетическая энергия может быть использована в реакции, имеет место, когда импульс в начальном состоянии равен нулю. Но импульс можно всегда привести к нулю, рассматривая соударение в надлежащей системе отсчета, а именно в системе центра масс.

Пример. *Доступная энергия* \*) движущейся частицы. Какая энергия может быть использована при столкновении движущегося и покоящегося протонов?

Сначала предположим, что кинетическая энергия налетающего протона несоизмеримо мала по сравнению с  $M_p c^2$ , так что столкновение может рассматриваться с нерелятивистских позиций. Если скорость налетающего протона в лабораторной системе отсчета равна  $v$ , то его кинетическая энергия равна

$$K_{\text{лаб}} = \frac{1}{2} M_p v^2. \quad (40)$$

В системе же центра масс один из протонов имеет скорость  $\frac{1}{2} v$ , а другой  $-\frac{1}{2} v$ . В этой системе отсчета вся кинетическая энергия может быть истрачена на образование новых частиц. Она равна

$$K_{\text{ц. м}} = \frac{1}{2} M_p \left(\frac{1}{2} v\right)^2 + \frac{1}{2} M_p \left(\frac{1}{2} v\right)^2 = \frac{1}{4} M_p v^2. \quad (41)$$

Из уравнений (40) и (41) получаем для нерелятивистского случая

$$\frac{K_{\text{ц. м}}}{K_{\text{лаб}}} = \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Таким образом, в лабораторной системе отсчета доступной для реакций является половина кинетической энергии. При ускорении протона до 200 Мэв только 100 Мэв из этой энергии могут быть использованы для образования новых частиц при столкновении с другим протоном.

В релятивистской области коэффициент полезного действия еще меньше. Можно провести простой расчет для крайней релятивистской области, в которой даже в системе центра масс кинетическая энергия протона гораздо больше энергии покоя  $M_p c^2$ .

Полную релятивистскую энергию в лабораторной системе связываем с полной релятивистской энергией в системе центра масс, применяя инвариант (12.16) к системе из двух протонов:

$$\underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2}_{\text{лаб.}} = \underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2}_{\text{ц. м.}}. \quad (43)$$

По определению системы центра масс  $(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)_{\text{ц. м.}} = 0$ . Если в лабораторной системе протон 2 находится в покое, то  $E_{2(\text{лаб})} = M_p c^2$  и  $\mathbf{p}_{2(\text{лаб})} = 0$ . Принимая во внимание, что

$$E_{1(\text{лаб})}^2 - \mathbf{p}_{1(\text{лаб})}^2 c^2 = M_p^2 c^4,$$

легко видеть, что (43) приводится к уравнению

$$2E_{1(\text{лаб})} M_p c^2 + 2M_p^2 c^4 = E_{\text{полн. (ц. м.)}}^2, \quad (44)$$

\*) По термодинамической терминологии «свободная энергия». Речь идет о той доле энергии, которая может быть использована для реакции образования новых частиц. (Прим. ред.)

где  $E_{\text{полн(ц. м)}}$  является суммой  $E_1 + E_2$  в системе центра масс. Если обозначить полную энергию  $E_1 + M_p c^2$  в лабораторной системе, то из (44) получаем

$$2E_{\text{полн (лаб)}} M_p c^2 = E_{\text{полн (ц. м)}}^2 \quad (45)$$

или

$$\frac{E_{\text{полн (ц. м)}}}{E_{\text{полн (лаб)}}} = \frac{2M_p c^2}{E_{\text{полн (ц. м)}}} \quad (46)$$

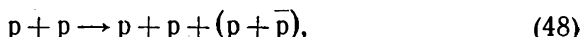
Это отношение и является мерой «коэффициента полезного действия». Чтобы получить полную энергию в 20 Гэв в системе центра масс, учитывая, что  $M_p c^2 \approx 1$  Гэв, потребуется

$$E_{\text{полн (лаб)}} = \frac{E_{\text{полн (ц. м)}}}{2M_p c^2} \approx \frac{400}{2} \text{ Гэв} \approx 200 \text{ Гэв}. \quad (47)$$

В этом случае из кинетической энергии протона, разогнанного до 200 Гэв относительно лабораторной системы, для образования новых частиц доступны только 20 Гэв. Вследствие такого низкого коэффициента полезного действия внимание было сосредоточено на таких системах ускорителей, в которых сталкиваются два пучка частиц, распространяющихся в противоположных направлениях, так что лабораторная система отсчета становится системой центра масс.

#### 13.4. Антипротонный порог

Энергия бэватрона в Беркли была рассчитана на генерацию антипротонов (обозначаемых  $\bar{p}$ ) путем бомбардировки неподвижных протонов протонами высоких энергий. Реакция может быть записана следующим образом:



т. е. в результате образуется протонно-антипротонная пара. Закон сохранения заряда при этом выполняется, так как антипротон имеет заряд  $-e$ . Какова пороговая энергия этой реакции?

Энергия покоя протонно-антипротонной пары составляет  $2M_p c^2$ , так как массы покоя антипротона и протона одинаковы. В системе центра масс кинетическая энергия должна быть поэтому по меньшей мере равна  $2M_p c^2$ , что составляет  $M_p c^2$  на каждый из исходных протонов. К этому надо прибавить энергию покоя  $M_p c^2$  каждого из исходных протонов, так что минимальная полная энергия в системе центра масс должна составлять

$$E_{\text{полн (ц. м)}} = 4M_p c^2. \quad (49)$$

На основании (46) в лабораторной системе соответствующая энергия равна

$$E_{\text{полн (лаб)}} = \frac{E_{\text{полн (ц. м)}}^2}{2M_p c^2} = \frac{16}{2} M_p c^2; \quad (50)$$

сюда входит  $2M_p c^2$  в виде энергии покоя двух протонов и  $6M_p c^2$  — в виде кинетической энергии. Таким образом, пороговая энергия составляет

$$6M_p c^2 = 6(0,938 \text{ Гэв}) \cong 5,63 \text{ Гэв}. \quad (51)$$

Если налетающий протон сталкивается с протоном, связанным в ядре, то пороговая энергия понижается, так как протон-мишень связан. Ясно ли, почему это так? Экспериментально наблюдаемая пороговая энергия образования антипротона составляет  $4,4 \text{ Гэв}$ , что на  $1,2 \text{ Гэв}$  меньше вычисленной для свободного покоящегося протона-мишени. Этот порог в лабораторной системе отсчета представляет собой минимальную кинетическую энергию, которой должен обладать налетающий протон, чтобы вызвать рассматриваемую реакцию.

### 13.5. Релятивистское уравнение ракеты

Представим себе ракету в момент, когда она находится в мгновенном состоянии покоя относительно системы отсчета  $S'$ , испытывая, однако, постоянное ускорение  $a'$  относительно той же системы. На основании выводов гл. 11 мы знаем, что приращение скорости  $\Delta v'$  в системе  $S'$  связано с приращением скорости  $\Delta v$  в инерциальной системе  $S$  соотношением

$$\Delta v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta v', \quad (52)$$

где  $v$  — скорость системы  $S'$  относительно системы  $S$ . Система  $S$  может, например, быть связана с Землей. Обозначая ускорение  $dv'/dt'$  через  $a'$ , получаем из (52)

$$\frac{\Delta v}{1 - v^2/c^2} = \frac{dv'}{dt'} \Delta t' = a' \Delta t', \quad (53)$$

где  $\Delta t'$  — промежуток времени, измеренный в системе  $S'$ . Если ракета начинает свое движение из состояния покоя относительно системы  $S$  в момент  $t' = 0$ , то левая и правая части (53) интегрируются в соответствующих пределах:

$$c^2 \int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = a' \int_0^{t'} dt'. \quad (54)$$

По Дуайту (Dwight, 728,4) имеем

$$c \operatorname{Arth} \left( \frac{v}{c} \right) = a' t', \quad \frac{v}{c} = \operatorname{th} \frac{a' t'}{c}. \quad (55)$$

Полный путь ракеты с точки зрения системы  $S$  находится дальнейшим интегрированием:

$$x = \int_0^t v dt = \int_0^{t'} v \frac{dt'}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (56)$$

На основании (53)

$$dt' = \frac{1}{a'} \frac{c^2 dv}{c^2 - v^2}, \quad (57)$$

так что (56) принимает вид

$$x = \frac{c^3}{a'} \int_0^v \frac{v}{(c^2 - v^2)^{3/2}} dv = \frac{c^3}{a'} \left[ \frac{1}{(c^2 - v^2)^{1/2}} - \frac{1}{c} \right]. \quad (58)$$

С другой стороны, на основании (11.18) и (11.20) получаем из (55)

$$\operatorname{ch} \frac{a't'}{c} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (59)$$

откуда (58) приводится к виду

$$x = \frac{c^2}{a'} \left( \operatorname{ch} \frac{a't'}{c} - 1 \right). \quad (60)$$

Из (60) следует, что, пропутешествовав в ракете в течение 21 года с точки зрения с в о е й системы отсчета  $S'$  при постоянном ускорении в  $1 \text{ см/сек}^2$ , космонавт покрыл бы расстояние в  $1,2 \cdot 10^9$  св. лет относительно системы  $S$ . Спрашивается, как далеко успел бы он улететь, если рассуждать, исходя из предела преобразования Галилея, т. е. из  $c \rightarrow \infty$ ?

#### Задачи

1. Вычислить радиус круговой траектории и угловую частоту протона, имеющего полную релятивистскую энергию в  $10 \text{ Гэв}$ , в магнитном поле с индукцией в  $10\,000 \text{ гс}$ .

О т в е т.  $\omega_c = 9 \cdot 10^8 \text{ рад/сек}$ .

2. Какова энергия отдачи (в эргах и электрон-вольтах) для ядра с массой  $10^{-23} \text{ г}$  после испускания гамма-луча с энергией в  $1 \text{ Мэв}$ ?

О т в е т.  $1,4 \cdot 10^{-10} \text{ эрг}$ ;  $90 \text{ эв}$ .

3. Электрон, имеющий энергию  $10 \text{ Гэв}$ , сталкивается с покоящимся протоном.

а) Какова скорость системы центра масс?

б) Какова энергия, доступная для генерации новых частиц? (Выразить в единицах  $M_p c^2$ .)

4. При высоких энергиях циклотронная частота зависит от скорости ускоряемой частицы. Для поддержания синхронности периодического движения частицы и ускоряющего переменного электрического поля перед конструктором ставится требование, чтобы налагаемая высокая частота или индукция магнитного поля (или то и другое одновременно) изменялись, следуя за процессом ускорения. Показать, что частота генератора  $\omega$  должна быть пропорциональна отношению  $V/E$ , где  $V$  — индукция магнитного поля и  $E$  — полная энергия частицы. (Следует воспользоваться формулой (26).)

5. В одной из стадий своего развития 184-дюймовый циклотрон в Беркли работал на постоянном магнитном поле напряженностью около  $15\,000 \text{ гс}$ .

а) Вычислить нерелятивистскую циклотронную частоту для протонов в этом поле.

О т в е т.  $1,4 \cdot 10^8 \text{ рад/сек}$ .

б) Вычислить частоту, которая должна была бы соответствовать конечной кинетической энергии в  $300 \text{ Мэв}$ .

6. Для релятивистского движения ракеты было найдено в (59), что

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \operatorname{ch} \frac{a't'}{c}.$$

а) Определить  $\gamma$  для  $a' = 10^9 \text{ см/сек}^2$  и  $t' = 10$  лет (около  $3 \cdot 10^8 \text{ сек}$ ).  
 б) Если по истечении этого времени масса покоя ракеты составляет 1000 кг, то какова при этом масса, наблюдаемая в системе  $S$ ?

От в е т.  $10^7 \text{ кг}$ .

в) Какова кинетическая энергия в системе  $S$ ? Можно ли практически получить такую энергию?

От в е т.  $10^{31} \text{ эрг}$ .

7. а) Показать, что свободный электрон, движущийся в вакууме со скоростью  $v$ , не может излучить один квант. Другими словами, требуется показать, что такое испускание нарушило бы законы сохранения.

б) В возбужденном электронном состоянии атом водорода может излучить световой квант. Показать, что при этом возможно соблюдение законов сохранения. Какова причина различия между результатами в случаях а) и б)?

8. Вычислить импульс, полную энергию и кинетическую энергию протона, у которого  $\beta = v/c = 0,99$ , в следующих системах отсчета:

а) В лабораторной системе.

От в е т.  $6,58 \text{ Гэв/с}$ ;  $6,63 \text{ Гэв}$ ;  $5,69 \text{ Гэв}$

б) В системе, движущейся вместе с частицей.

в) В системе центра масс протона и неподвижного ядра гелия, считая, что  $M_{\text{He}} \approx 4M_p$ .

9. Найти радиус орбиты частицы с зарядом  $e$  и энергией  $10^{19} \text{ эв}$  в магнитном поле с индукцией в  $10^{-8} \text{ гс}$  (указанное значение индукции магнитного поля вполне возможно в нашей Галактике). Сравнить полученное значение радиуса с диаметром нашей Галактики. (Частицы таких огромных энергий, вызывающие акты взаимодействия, встречаются в космических лучах; они создают так называемые *широкие атмосферные ливни*, в состав которых входят электроны, позитроны, гамма-лучи и мезоны.)

10. а) Вычислить радиус кривизны траектории протона с кинетической энергией  $1 \text{ Гэв}$  в поперечном магнитном поле с индукцией в  $20\,000 \text{ гс}$ .

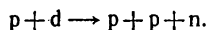
От в е т.  $284 \text{ см}$ .

б) Какое поперечное электрическое поле потребовалось бы для придания траектории такого же радиуса кривизны? Использовать то обстоятельство, что радиус кривизны кривой  $y(x)$  может быть выражен как  $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2} / (d^2y/dx^2)$ .

От в е т.  $1,75 \cdot 10^4 \text{ ед. СГС}$ .

в) Принимая во внимание величину магнитного и электрического полей в а) и б), рассмотреть возможность использования электрических полей для отклонения релятивистских частиц.

11. Рассматривается ядерная реакция, в которой налетающий протон с кинетической энергией  $K_p$  расщепляет неподвижный дейтрон по схеме



Вблизи порогового значения энергии оба протона и нейтрон движутся в виде скопления несцепленных частиц, имеющих приблизительно одинаковую скорость. Написать нерелятивистские выражения для количества движения и энергии, а также показать, что пороговое значение кинетической энергии налетающего протона составляет

$$-K_p^0 = \frac{3}{2} E_{\text{св}},$$

где  $E_{\text{св}} (\approx 2 \text{ Мэв})$  — энергия связи свободных нейтрона и протона в дейтроне.

12. При выводе выражения пороговой энергии для взаимодействия частиц высоких энергий мы видели, что удобно рассматривать условия в системе центра масс. Рассмотрим реакцию  $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ , где гамма-фотон налетает на неподвижный протон и образует  $\pi^0$ -мезон.

а) Показать, что пороговая энергия фотона равна

$$E_{\gamma} = M_{\pi} \left( 1 + \frac{M_{\pi}}{2M_p} \right) c^2.$$

б) В энергию покоя нейтрального мезона превращается не вся начальная энергия фотона. Какой процент не превращается? Куда девается непревращенная часть?





Предлагаемое устройство основано на «фазовой устойчивости» некоторых орбит в циклотроне. Рассмотрим, например, частицу, энергия которой такова, что ее угловая скорость как раз соответствует угловой частоте электрического поля. Назовем эту энергию равновесной. Пусть, далее, частица пересекает ускоряющий зазор как раз в тот момент, когда электрическое поле проходит через нуль, изменяясь в таком направлении, что более ранний подход частицы вызвал бы ее

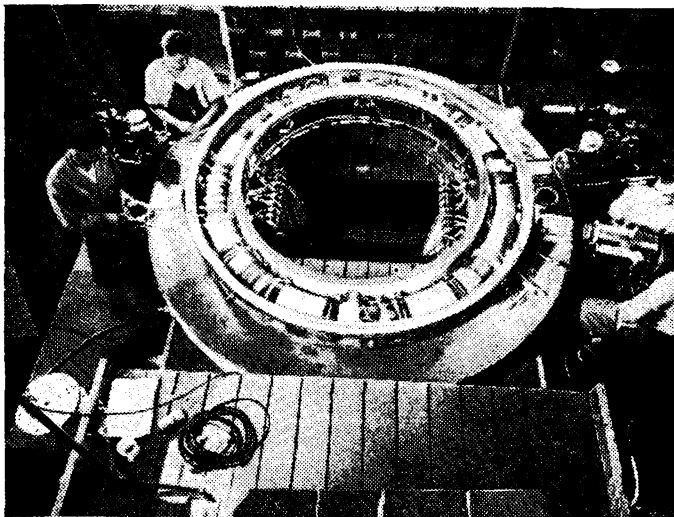


Рис. 13.8. Первый электронный синхротрон. (Фото Радиационной лаборатории им. Лоуренса.)

ускорение. Такая орбита является безусловно стационарной. Чтобы это показать, предположим, что сдвиг по фазе таков, что частица подходит к зазору слишком рано. Тогда она получает ускорение; рост энергии вызывает уменьшение угловой скорости, что задерживает подход к зазору. Аналогичное рассуждение доказывает, что и отклонение энергии от равновесного значения вызывает самокоррекцию.

Смещенные подобным образом орбиты будут продолжать колебаться с периодическими изменениями как фазы, так и энергии около их средних равновесных значений.

В этих условиях для ускорения частиц необходимо изменять значение равновесной энергии, что может осуществляться изменением либо магнитного поля, либо частоты. При изменении равновесной энергии фаза движения будет смещаться вперед как раз на величину, достаточную для приложения необходимой ускоряющей силы; сходство этого поведения с работой синхронного двигателя и подсказало название установки.

Уравнения, описывающие изменение фазы и энергии, выведены с учетом изменения магнитного поля и частоты во времени, а также с учетом ускорения за счет «бетатронного эффекта» (быстроты изменения потока), изменения этого ускорения при изменениях радиуса орбиты в процессе колебаний и, наконец, потерь энергии на ионизацию и излучение. Было принято, что период колебаний фазы велик по сравнению с периодом движения по орбите. Для заряда частицы был принят заряд электрона. Уравнение (1) определяет равновесную энергию; уравнение (2) определяет мгновенную энергию через равновесное значение и изменение фазы; уравнение (3) является «уравнением движения» для фазы. Уравнение (4)

определяет радиус орбиты:

$$E_0 = (300cH)/(2\pi f), \quad (1)$$

$$E = E_0 [1 - (d\varphi)/(d\theta)], \quad (2)$$

$$2\pi \frac{d}{d\theta} \left( E_0 \frac{d\varphi}{d\theta} \right) + V \sin \varphi = \left[ \frac{1}{f} \frac{dE_0}{dt} - \frac{300}{c} \frac{dF_0}{dt} + L \right] + \left[ \frac{E_0}{f^2} \cdot \frac{df}{dt} \right] \frac{d\varphi}{d\theta}, \quad (3)$$

$$R = (E^2 - E_0^2)^{1/2} / 300H. \quad (4)$$

Использованы следующие обозначения:

$E$  — полная энергия частицы (кинетическая плюс энергия покоя),  $E_0$  — равновесное значение  $E$ ,  $E_r$  — энергия покоя,  $V$  — выигрыш энергии за счет электрического поля за один оборот при наиболее благоприятной для ускорения фазе,  $L$  — потеря энергии за один оборот на ионизацию и излучение,  $H$  — напряженность магнитного поля на орбите,  $F_0$  — поток магнитной индукции сквозь равновесную орбиту,  $\varphi$  — фаза частицы (угловое положение относительно зазора в момент, когда электрическое поле отсутствует),  $\theta$  — угловое смещение частицы,  $f$  — частота электрического поля,  $c$  — скорость света,  $R$  — радиус орбиты. (Энергия выражена в электрон-вольтах, магнитные величины — в единицах СГСМ, углы — в радианах, остальные величины — в системе СГС.)

Как видно, уравнение (3) одинаково с уравнением движения маятника при неограниченной амплитуде, в котором члены правой части выражают постоянный крутящий момент и демпфирующую силу. Таким образом, изменение фазы имеет колебательный характер, пока амплитуда не слишком велика, причем допустимая амплитуда составляет  $\pm \pi$ , когда выражение в первых скобках в правой части равно нулю, и стремится к нулю, когда это же выражение стремится к  $V$ . По теореме для адиабатного процесса амплитуда должна изменяться обратно пропорционально корню четвертой степени из  $E_0$ , поскольку  $E_0$  играет роль медленно меняющейся массы в первом члене уравнения; при уменьшении частоты последний член правой части обуславливает дополнительное затухание.

Применение данного метода будет зависеть от типа частиц, подлежащих ускорению, поскольку начальная энергия в любом случае близка к энергии покоя. В случае электронов  $E_0$  будет изменяться в процессе ускорения во много раз. Изменять частоту во столько же раз нецелесообразно. Таким образом, в этом случае следует предпочесть изменение  $H$ , что имеет то дополнительное преимущество, что орбита должна приближаться к постоянному значению радиуса. В случае тяжелых частиц  $E_0$  будет изменяться гораздо слабее; например, при ускорении протонов до 300 Мэв  $E_0$  изменится на 30%. Поэтому при ускорении тяжелых частиц может оказаться целесообразным изменять частоту.

Параметры одного из возможных типов ускорителя электронов на 300 Мэв приведены ниже:

амплитудное значение индукции — 10 000 гс,

конечный радиус орбиты — 100 см,

частота — 48 Мгц,

энергия инъекции — 300 кв,

начальный радиус орбиты — 78 см.

Поскольку при ускорении в этом случае радиус расширяется на 22 см, магнитное поле должно захватывать только кольцо этой ширины — разумеется, с некоторой добавочной шириной для правильного формирования поля. Для придания орбитам радиальной и осевой устойчивости поле должно несколько ослабевать в направлении возрастающего радиуса. Полный магнитный поток приблизительно в 5 раз меньше, чем потребовалось бы в бетатроне при той же конечной энергии.

Необходимое напряжение на ускоряющих электродах зависит от скорости изменения магнитного поля. Если магнит возбуждается за 60 циклов, то амплитудное значение величины  $(1/f)(dE_0/dt)$  составляет 2300 в. (Бетатронный член, содержащий  $dE_0/dt$ , составляет примерно 1/5 этой величины, и им можно пренебречь.) Если положить  $V=10\ 000$  в, наибольший сдвиг фазы будет 13°. Число

оборотов на одно колебание фазы будет колебаться в процессе ускорения в пределах от 22 до 440. Относительное изменение  $E_0$  за один период колебания фазы составляет 6,3% во время инъекции, с последующим уменьшением. Таким образом, остается в силе предположение о медленном изменении за период, сделанное при выводе уравнений. Потеря энергии на излучение рассматривается в следующем письме в редакцию, в котором показано, что в данном случае она не существенна.

Применение к тяжелым частицам не рассматривается подробно, но представляется вероятным, что наилучший путь будет заключаться в изменении частоты. Поскольку не потребуются особенно быстрого изменения, оно смогло бы осуществляться механическим вращающим приспособлением, приводимым в действие электродвигателем.

Синхротрон открывает возможность достижения энергий в гигаэлектронвольтовом диапазоне как для электронов, так и для тяжелых частиц; в первом случае эта цель будет достигаться при меньших затратах на материалы и энергию, чем в бетатроне; во втором случае устраняется релятивистское ограничение, существующее для циклотрона.

Постройка основанного на описанном принципе ускорителя для электронов на 300 Мэв планируется в Радиационной лаборатории при Калифорнийском университете в Беркли.

## ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

### 14.1. Инертная и гравитационная массы

Массу тела можно определять путем измерения испытываемого телом ускорения под действием известной силы:

$$M_{\text{ин}} = \frac{F}{a}. \quad (1)$$

Определяемая таким путем масса, обозначаемая  $M_{\text{ин}}$ , известна под названием *инертной массы*. Массу можно также определить, измерив силу ее тяготения к другому телу, например к Земле:

$$\begin{aligned} GM_{\text{гр}}M_{\text{З}} &= F, \\ M_{\text{гр}} &= \frac{Fr^2}{GM_{\text{З}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Определяемая подобным способом масса, обозначаемая  $M_{\text{гр}}$ , носит название *гравитационной массы*. В формулах (2)  $M_{\text{З}}$  — масса Земли.

Замечательно, что инертные массы всех тел в пределах точности измерений пропорциональны их гравитационным массам. (Путем соответствующего подбора величины  $G$  можно добиться того, чтобы инертные массы были равны гравитационным.) Простейший опыт по проверке сказанного заключается в выяснении, действительно ли все тела падают с одинаковым ускорением. Для одного тела, падающего вблизи поверхности Земли, имеем

$$M_{\text{ин}}(1)a(1) = \frac{GM_{\text{З}}M_{\text{гр}}(1)}{R_{\text{З}}^2}; \quad (3)$$

для другого можем написать

$$M_{\text{ин}}(2)a(2) = \frac{GM_{\text{З}}M_{\text{гр}}(2)}{R_{\text{З}}^2}. \quad (4)$$

Деля уравнение (3) на (4), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{\text{ин}}(1) a(1)}{M_{\text{ин}}(2) a(2)} &= \frac{M_{\text{гр}}(1)}{M_{\text{гр}}(2)}, \\ \frac{M_{\text{ин}}(1)}{M_{\text{гр}}(1)} &= \frac{M_{\text{ин}}(2)}{M_{\text{гр}}(2)} \frac{a(2)}{a(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Но, как показывают наблюдения, в вакууме все тела падают одинаково, так что, в пределах точности измерений,  $a(2)=a(1)$ , откуда получаем для отношения инертных масс к гравитационным

$$\frac{M_{\text{ин}}(1)}{M_{\text{гр}}(1)} = \frac{M_{\text{ин}}(2)}{M_{\text{гр}}(2)}. \quad (6)$$

Коль скоро это отношение постоянно, мы всегда можем привести его к единице, подобрав подходящее значение для  $G$ . Экспериментальная задача заключается лишь в том, чтобы выяснить, не существует ли изменений отношения  $M_{\text{ин}}/M_{\text{гр}}$  для разных частиц, веществ и тел.

Классические опыты принадлежат Ньютону, который воспользовался методом маятника, описанным в задаче 1. Среди других получивших широкую известность опытов следует в первую очередь отметить измерения, начатые Р. Этвёшем в 1890 г. и продолжавшиеся около 25 лет. Чтобы понять его остроумный метод, надо рассмотреть поведение маятника, подвешенного у поверхности Земли на широте  $45^\circ$  (рис. 14.1). На маятник действует сила тяжести  $M_{\text{гр}}g$ , направленная к центру Земли. На него также действует центробежная сила  $M_{\text{ин}}\omega^2 R_3/\sqrt{2}$ , где множитель  $1/\sqrt{2}$  присутствует в качестве  $\cos 45^\circ$ ; отметим, что  $R_3/\sqrt{2}$  выражает длину перпендикуляра, опущенного от маятника на ось вращения Земли. Центробежная сила направлена перпендикулярно к оси вращения. Равнодействующая обеих сил образует угол

$$\theta \cong \frac{M_{\text{ин}}\omega^2 R_3/2}{M_{\text{гр}}g - \frac{1}{2} M_{\text{ин}}\omega^2 R_3} \cong \frac{M_{\text{ин}}\omega^2 R_3}{2M_{\text{гр}}g} \quad (7)$$

с направлением местной вертикали. Здесь использовано то обстоятельство, что отношение  $M_{\text{ин}}\omega^2 R_3/M_{\text{гр}}g$  — малая величина. Из данных, приведенных в начале гл. 3, следует, что это отношение приблизительно равно 0,003.

Предположим теперь, что крутильный подвес состоит, как показано на рис. 14.2, из двух шариков различного материала, но одинаковой гравитационной массы, так что  $M_{\text{гр}}(1)=M_{\text{гр}}(2)$ . Если  $M_{\text{ин}}(1)$  не равно  $M_{\text{ин}}(2)$ , то под действием неуравновешенных центробежных сил крутильная нить будет закручиваться. Измерение повторяется после поворота прибора на  $180^\circ$ ; это позволяет определить нулевое положение весов. Данный метод — характерный пример нулевого метода измерений: эффект наблюдается только при  $M_{\text{ин}}(1) \neq M_{\text{ин}}(2)$ . Этвёш произвел сравнение восьми разных

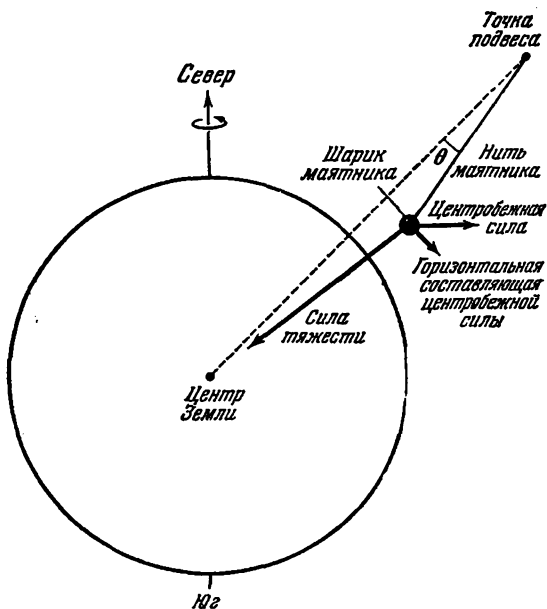


Рис. 14.1. Схема отклонения маятника от вертикали на малый угол  $\theta$  вследствие центробежной силы, обусловленной вращением Земли.

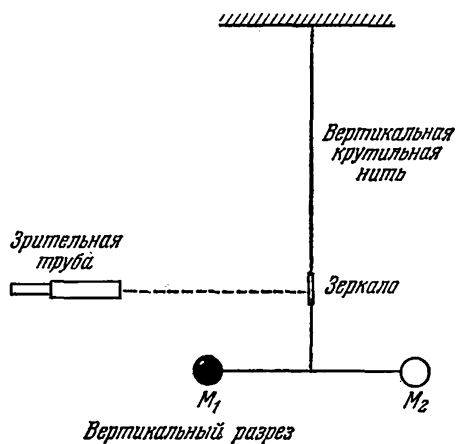


Рис. 14.2. Вертикальный разрез установки, аналогичной прибору Этвэша, использованному для определения отношения инертной и гравитационной масс.  $M_1$  и  $M_2$  — разнородные предметы с одинаковой гравитационной массой.

материалов с платиной, принятой за эталон. Он установил, что

$$\frac{M_{\text{ин}}(1)}{M_{\text{гр}}(1)} = \frac{M_{\text{ин}}(\text{Pt})}{M_{\text{гр}}(\text{Pt})} \quad (8)$$

с относительной ошибкой менее  $10^{-8}$ . Недавние опыты Дике (Dicke) подтвердили равенство обоих видов масс с точностью до  $10^{-10}$ .

Современное состояние вопроса в отношении экспериментальных данных может быть резюмировано следующим образом:

Если обозначить отношение  $M_{\text{гр}}/M_{\text{ин}}$  через  $Q$ , то:

а) Значение  $Q$  для системы электрон плюс протон равно значению того же отношения для нейтрона с точностью до  $10^{-7}$ . (Это

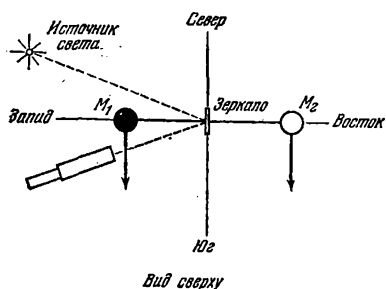


Рис. 14.3. Если инертные массы  $M_1$  и  $M_2$  равны, то горизонтальные составляющие центробежной силы (обозначенные стрелками) тоже равны, и крутильная нить не закручивается.

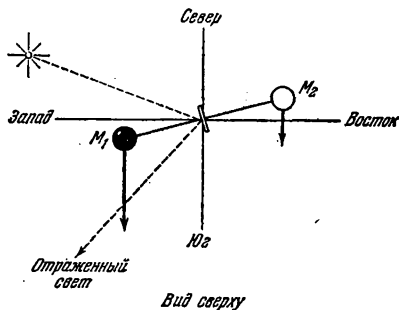


Рис. 14.4. Если инертная масса  $M_1$  превышает  $M_2$ , то нить закручивается, и зеркало поворачивается.

следует из сопоставления данных для легких и тяжелых элементов периодической таблицы; у тяжелых элементов относительное содержание нейтронов больше, чем у легких.)

б) Значение  $Q$  для той части массы ядра, которая эквивалентна энергии связи ядра, равно единице с точностью до  $10^{-5}$ .

в) Значение  $Q$  для той части массы атома, которая эквивалентна энергии связи с орбитальными электронами, равно единице с точностью до  $1/200$ .

## 14.2. Гравитационная масса фотона

В гл. 12 было показано, что фотон с энергией  $h\nu$ , где  $\nu$  — частота, должен обладать инертной массой, равной  $h\nu/c^2$ . Есть ли у фотона также и гравитационная масса? Имеются веские экспериментальные указания на то, что она есть и равна инертной массе. (При этом, разумеется, масса покоя равна нулю.)

Рассмотрим фотон, у которого на высоте  $L$  над поверхностью Земли частота равна  $\nu$  и энергия  $h\nu$ . После падения с высоты  $L$  энергия фотона увеличивается на  $MgL$  и становится равной

$$h\nu' \cong h\nu + \frac{h\nu}{c^2} gL \quad (9)$$



в предположении, что во время падения масса фотона постоянна и равна  $h\nu/c^2$  (это вытекает из того, что  $\nu'$  мало отличается от  $\nu$ ). Таким образом, как это следует из (9), частота фотона после падения равна

$$\nu' \cong \nu \left( 1 + \frac{gL}{c^2} \right). \quad (10)$$

Если  $L=20$  м, относительное смещение частоты составляет

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gL}{c^2} \approx \frac{(10^3)(2 \cdot 10^3)}{(3 \cdot 10^{10})^2} \approx 2 \cdot 10^{-15}. \quad (11)$$

Этот фантастически малый эффект был действительно измерен для

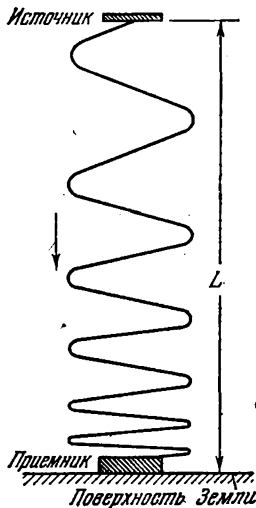


Рис. 14.5. Схема «гравитационного фиолетового смещения». Фотон, испущенный источником по направлению к центру Земли, теряет «потенциальную энергию»  $\Delta U = (h\nu/c^2)gL$  и приобретает такую же «кинетическую энергию» при падении с высоты  $L$ . Частота фотона, воспринимаемая приемником, равна  $\nu' = \nu(1 + gL/c^2)$ , где  $\nu$  — частота того же фотона в момент испускания источником.



Рис. 14.6. Нижний конец установки Паунда в Гарварде. Г. А. Ребка-младший регулирует фотомножитель по указаниям из контрольного пункта. В последующем варианте опыта была предусмотрена возможность регулировки температуры как источника, так и поглотителя. Все измеряемое гравитационное смещение составляет лишь около 1/500 ширины линии. Более или менее точное измерение столь малого смещения потребовало ряда специальных усовершенствований. (Воспроизводится с разрешения Р. В. Паунда.)

источника гамма-лучей Паундом и Ребкой \*). Для  $\Delta\nu = \nu' - \nu$  они получили

$$\frac{(\Delta\nu)_{\text{эксп}}}{(\Delta\nu)_{\text{выч}}} = 1,05 \pm 0,10, \quad (12)$$

где вычисленное значение  $(\Delta\nu)_{\text{выч}}$  определялось из уравнения (10).

\* ) R. V. P o u n d and G. A. R e b k a, Jr., Phys. Rev. Letters 4, 337 (1960).

Испущенный с бесконечного расстояния от Земли фотон частоты  $\nu$  по достижении земной поверхности приобретает частоту  $\nu'$ , причем естественное обобщение уравнений (9) и (10) дает

$$\nu' \cong \nu \left( 1 + \frac{GM_3}{R_3 c^2} \right). \quad (13)$$

Отметим, что в выражение смещения частоты входит отношение «гравитационного радиуса» Земли  $GM_3/c^2$  (определение которого было дано в гл. 9) к ее фактическому радиусу. Это отношение составляет  $6 \cdot 10^{-10}$ . Несколько больший в данном случае эффект имеет ту же природу, что и в (11), с той разницей, что здесь источник света расположен гораздо дальше от Земли.

**Гравитационное красное смещение.** Фотон частоты  $\nu$ , покидающий звезду и уходящий в бесконечность, будет восприниматься в бесконечности с частотой

$$\nu' \cong \nu \left( 1 - \frac{GM_{зв}}{R_{зв} c^2} \right), \quad (14)$$

где  $M_{зв}$  и  $R_{зв}$  — соответственно масса и радиус звезды. Это выражение есть не что иное, как выражение (13), видоизмененное с учетом того, что при удалении из гравитационного поля звезды фотон не приобретает, а теряет энергию. Принадлежащий голубой области спектра фотон испытывает смещение по частоте в сторону красного конца видимого

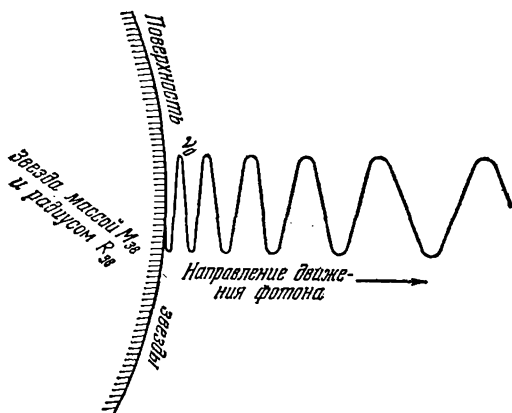


Рис. 14.7. Улетая в бесконечность с поверхности звезды, фотон приобретает «потенциальную энергию» и теряет такую же «кинетическую энергию». Если на поверхности звезды частота фотона равна  $\nu$ , то в бесконечности она становится равной

$$\nu' = \nu \left( 1 - GM_{зв}/R_{зв} c^2 \right).$$

спектра, вследствие чего этот эффект и известен под названием «гравитационное красное смещение». Его не следует смешивать с доплеровским красным смещением далеких звезд, приписываемым их кажущемуся радиальному движению в направлении от Земли, рассмотренному в гл. 10.

У белых карликов значения  $M_{зв}/R_{зв}$  велики, вследствие чего они отличаются сравнительно большими величинами гравитационного красного смещения. Для Сириуса В вычисленное относительное смещение составляет

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} \cong -5,9 \cdot 10^{-6}, \quad (15)$$

а измеренное равно  $-6,6 \cdot 10^{-6}$ . Расхождение не выходит за пределы возможной ошибки, связанной с неопределенностью  $M_{зв}$  и  $R_{зв}$ .

**Пример. Отклонение фотонов Солнцем.** Каково угловое отклонение светового луча или фотона, распространяющегося мимо Солнца у его края?

В этой задаче мы имеем дело с фотоном, движущимся со скоростью света в гравитационном поле. Без кропотливых вычислений, использующих специальную теорию относительности, правильного ответа на этот вопрос получить нельзя. Однако порядок величины правильного ответа можно получить с помощью довольно примитивных вычислений.

Обозначим массу фотона через  $M_\phi$ ; в дальнейшем выяснится, что  $M_\phi$  сокращается, так что нет надобности знать, чему эта масса равна. Положим, что световой луч проходит мимо Солнца с прицельным расстоянием  $r_0$  от центра Солнца. В предположении, что отклонение очень мало, можно считать  $r_0$  практически не зависящим от отклонения. Поперечная сила  $F_x$ , действующая на фотон в положении  $(r_0, y)$ , равна

$$F_x = -GM_C M_\phi \frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (16)$$

где  $y$  измеряется от точки  $P$ , показанной на рис. 14.8. Конечное значение поперечной составляющей скорости фотона определяется уравнением

$$M_\phi v_x = \int F_x dt = \int F_x \frac{dy}{v_y} \cong \frac{1}{c} \int F_x dy, \quad (17)$$

откуда

$$v_x \cong -\frac{2GM_C r_0}{c} \int_0^\infty \frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \cong -\frac{2GM_C}{cr_0}. \quad (18)$$

Если  $r_0$  равно радиусу Солнца  $R_C$ , угловое отклонение равно

$$\varphi \cong \frac{|v_x|}{c} \cong \frac{2GM_C}{R_C c^2} \text{ рад}. \quad (19)$$

Выполнив вычисления, находим  $\varphi = 0,87''$ . Более точное вычисление \*) основанное на специальной теории относительности и принципе эквивалентности, предсказывает вдвое большее значение:  $1,75''$ . Последнее было проверено экспериментально с точностью, по-видимому, около 20%. (Скептические замечания по этому поводу появляются и до сего времени.)

При решении задач, связанных с процессами столкновений, и вычислении силы, действующей на частицу, в предположении

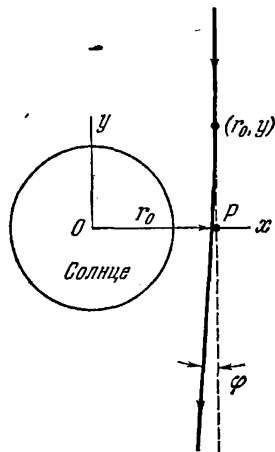


Рис. 14.8. Отклонение фотона гравитационным полем Солнца.

\*) См., например, L. I. Schiff, Am. J. Phys. 28, 340 (1961).

прямолинейности траектории мы ограничиваемся так называемым импульсным приближением. Связь между  $\int F_x dt$  и составляющей изменения импульса по оси  $x$  рассмотрена в гл. 5. Импульсное приближение часто бывает эффективным при условии, что истинная траектория не слишком отличается от прямой, по которой частица двигалась бы при отсутствии взаимодействия.

### 14.3. Принцип эквивалентности

Тот экспериментальный факт, что ни разу, ни при каких условиях не было обнаружено никакого различия между инертной и гравитационной массами тела, наводит на мысль, что тяготение в известном смысле может быть эквивалентным ускорению. Представим себе наблюдателя, находящегося в лифте и свободно падающего вместе с лифтом с ускорением  $g$ .

Принцип эквивалентности гласит, что для наблюдателя в свободно падающем лифте законы физики такие же, как и в инерциальных системах отсчета специальной теории относительности (по крайней мере в непосредственном соседстве с центром лифта). *Действия ускоренного движения и силы тяжести полностью взаимно уничтожаются.* Наблюдатель, сидящий в закрытом лифте и регистрирующий силы, представляющиеся ему гравитационными, не может сказать, какая доля этих сил обусловлена ускорением и какая — действительными гравитационными силами. Он вообще не обнаружит никаких сил, если только на лифт не подействуют какие-либо другие (т. е. отличные от гравитационных) силы. Постулированный принцип эквивалентности требует, в частности, чтобы отношение инертных масс к гравитационным удовлетворяло тождеству  $M_{ин}/M_{гр}=1$ . «Невесомость» человека в спутнике на орбите является следствием принципа эквивалентности.

Поиски математических следствий принципа эквивалентности приводят к общей теории относительности; дальнейшее обсуждение этого вопроса можно найти в соответствующей литературе. Классические опыты по проверке общей теории относительности подробно изложены в первой главе книги: L. W i t t e n, *Gravitation: An Introduction to Current Research* (John Wiley and Sons, New York, 1962).

#### Задачи

1. Показать, что частота маятника, имеющего длину  $L$ , равна

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{M_{гр}}{M_{ин}} \cdot \frac{g}{L} \right)^{1/2},$$

где  $M_{гр}$  и  $M_{ин}$  — соответственно гравитационная и инертная массы. (Тщательные измерения, выполненные еще Бесселем с помощью маятников, показали равенство  $M_{гр}$  и  $M_{ин}$  с точностью до  $1/(6 \cdot 10^4)$ .)

2. Найти выражение для гравитационного красного смещения, не прибегая к допущению, что  $\Delta v/v \ll 1$  (но пренебрегая всеми следствиями, вытекающими из кривизны пространства). (У к а з а н и е: исходить из уравнения  $\hbar \Delta v = -(hv/c^2) \times (McG/r^2) \Delta r$  и интегрировать по  $dr$  от  $Rc$  до бесконечности и по  $dv$  от  $v$  до  $v'$ .)

Ответ.  $v' = ve^{-GM_C/R_C c^2}$ .

3. Оценить величину гравитационного красного смещения, воспринимаемого далеко за пределами нашей Галактики, для света, испускаемого из ее центра. (Считать распределение массы однородным в сфере радиусом 10 000 парсеков. Масса Галактики составляет  $8 \cdot 10^{44}$  г.)

Ответ.  $\Delta v/v = -3 \cdot 10^{-6}$ .

4. В 1962 г. был обнаружен космический источник интенсивного радиоизлучения, который оптически наблюдался в виде звездоподобного объекта с угловым диаметром  $0,5''$ . Вначале считали, что это — звезда в нашей Галактике, излучающая радиоволны, но затем был получен ее спектр, линии которого оказались значительно смещенными в направлении красного конца. Например, линия атомарного кислорода, имеющая нормальную длину волны  $3,727 \cdot 10^{-8}$  см, была обнаружена при длине волны  $5,097 \cdot 10^{-5}$  см. Одно из объяснений заключалось в том, что это — чрезвычайно массивная звезда с гравитационным красным смещением. Если эта гипотетическая радиозвезда находится в нашей Галактике, то ее расстояние от Земли должно быть меньше  $10^{22}$  см.

а) Исходя из этой гипотезы и принимая расстояние до Земли за  $10^{22}$  см, вычислить массу и среднюю плотность звезды по ее угловому диаметру и красному смещению. Правдоподобно ли выдвинутое объяснение?

б) Другое предположение заключалось в том, что это — особая радиогалактика с обыкновенным доплеровским красным смещением, рассмотренным в гл. 10. Принимая это предположение, вычислить расстояние от Земли до данной галактики.

в) Согласуется ли последний результат с предположением, что источник является радиогалактикой?

Ответ. а) Масса равна  $1,8 \cdot 10^{43}$  г, средняя плотность —  $1,6 \cdot 10^{-8}$  г/см<sup>3</sup>. Это не представляется правдоподобным, так как вычисленная масса составляет около 0,1 всей нашей Галактики.

б)  $3,6 \cdot 10^9$  световых лет ( $3,4 \cdot 10^{27}$  см).

в) Да, согласуется. Линейный радиус получается равным  $1,7 \cdot 10^{23}$  см. Это не выходит из обычных пределов радиусов галактик.

[Более подробные сведения можно найти в работе Дж. Л. Гринштейна «Квазизвездные источники радиоизлучений» — J. L. Greenstein, Quasi-stellar radio sources, Sci. American 209, 54 (1963).]

## Из истории физики. Маятники Ньютона

Ниже цитируется приведенное Ньютоном в «Принципах натуральной философии» описание его опытов с маятниками, поставленных для выяснения вопроса, существуют ли колебания в значениях отношения гравитационной массы к инертной.

«Но другими уже давно наблюдалось, что (с поправкой на слабое сопротивление воздуха) все тела спускаются на одинаковое расстояние за одинаковые промежутки времени, и с помощью маятников это свойство промежутков времени может быть установлено с большой точностью.

Я испытывал золото, серебро, свинец, стекло, песок, поваренную соль, дерево, воду и пшеницу. Я достал два одинаковых деревянных ящика. Я наполнил один из них деревом, а в центре качаний другого поместил такого же (насколько точно я мог) веса кусок золота. Подвешенные на нитях длиной 11 футов ящики образовали пару маятников, совершенно одинаковых по весу и форме и одинаково подверженных сопротивлению воздуха; поместив их рядом, я наблюдал, как они качались совместно взад и вперед в течение длительного времени с одинаковыми колебаниями. И потому (в силу Следствий I и VI, Предложение XXIV, Книга II) количество вещества в золоте относилось к количеству вещества в дереве, как действие движущей силы на все золото к действию движущей силы на все дерево: другими словами, как вес одного к весу другого.

И с помощью этих опытов в телах одинакового веса можно было обнаружить различие в количестве вещества, составляющее одну тысячную часть общего количества».

## ЧАСТИЦЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

## 15.1. Стабильные и нестабильные частицы

Все известные нам виды материи состоят из частиц. Пожалуй, из основных открытий физиков, касающихся Вселенной, самым важным было выяснение зернистого характера строения материи. Это — ключ к пониманию поведения и строения газов, жидкостей и твердых тел, к пониманию химических реакций и к теориям, способным объяснять явления не только атомной физики, но и макрофизики. Уже в 1756 г. Франклин отдавал себе отчет о зернистости материи, несущей электрические заряды. Рассмотрев явление

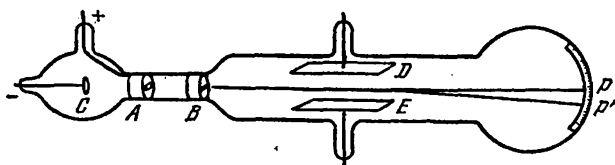


Рис. 15.1. Прибор Дж. Дж. Томсона (1897 г.) для измерения  $e/m$ .

электростатической индукции, он с поразительной прозорливостью писал: «Электрическая материя состоит из чрезвычайно мелких частиц, так как даже через самую плотную обычную материя она способна проникать с такой легкостью, как если бы не существовало никакого заметного сопротивления». В 1897 г. Дж. Дж. Томсон показал, что катодные лучи способны отклоняться электростатическим и магнитным полями (рис. 15.1). Затем он вычислил массу частиц (электронов), образующих эти лучи, которая по порядку величины оказалась равной  $10^{-3}$  массы атома водорода. Эта работа, вместе с одновременным открытием эффекта Зеемана (расщепления спектральных линий магнитным полем), ознаменовала начало эпохи широкого признания электрического строения материи. В 1911—1913 гг. последовало открытие ядра Резерфордом. Он показал, что атом состоит из положительно заряженного ядра, окруженного

системой электронов, удерживаемых кулоновскими силами притяжения к ядру. Было также показано, что суммарный отрицательный заряд электронов атома равен положительному заряду ядра. Ядро является носителем большей части массы атома; однако линейные размеры ядра чрезвычайно малы по сравнению с линейными размерами всего атома. Как сказал в 1913 г. Бор, «эта модель атома заслуживает большого внимания».

После появления в 1913 г. модели строения атома Резерфорда — Бора из элементарных частиц были известны электрон, фотон и около 95 различных ядер.

(Элементарной можно практически считать всякую частицу, которую трудно себе представить как состоящую из других частиц.) Открытие в 1932 г. нейтрона (нейтральной частицы с массой, слегка превышающей массу протона) привело к представлению о ядрах как комбинациях из нейтронов и протонов; к этому времени были известны четыре элементарные частицы: нейтрон ( $n$ ), протон ( $p$ ), электрон ( $e$ ) и фотон ( $\gamma$ ). С того времени число открытых элементарных частиц непрерывно росло. В 1932 г. был открыт позитрон ( $e^+$ ) — положительно заряженный аналог электрона. В тридцатых же годах с большой достоверностью было установлено существование нейтрино ( $\nu$ ) — нейтральных частиц, лишенных массы покоя и характеризующихся весьма слабым взаимодействием со всеми прочими частицами. В 1936 г. были



Рис 15.2. Лаборатория имени Кэвендиша в Кембриджском университете. Здесь Дж. Дж. Томсон открыл электрон. Здесь же Резерфордом было осуществлено первое искусственное ядерное превращение. (Фотоснимок Британской информационной службы.)

открыты положительно и отрицательно заряженные частицы ( $\mu^+$  и  $\mu^-$ ), названные мюонами (или мю-мезонами); их масса приблизительно в 208 раз больше массы электрона. Затем темпы открытия новых частиц ускорились: в 1947 г. была открыта новая пара заряженных частиц ( $\pi^+$  и  $\pi^-$ ), названных пионами (или пи-мезонами \*)); в 1950 г. был обнаружен нейтральный аналог пионов ( $\pi^0$ ); в 1955 г. — отрицательно заряженный аналог протона (антипротон,  $\bar{p}$ ); затем — антинейтрон ( $\bar{n}$ ); новое семейство заряженных и нейтральных ме-

\*) Слово *мезон* дословно означает «промежуточный» — в том смысле, что его масса занимает промежуточное положение между массами электрона и протона.

зонов ( $K^+$ ,  $K^0$ ,  $K^-$ ) и более тяжелых частиц ( $\Lambda^0$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Xi^0$ ,  $\Xi^-$ ); античастицы ко всем перечисленным частицам; десятки очень короткоживущих ( $<10^{-20}$  сек) мезонов и тяжелых частиц и даже новое семейство частиц типа нейтрино.

Действительно ли все эти частицы элементарны? Не могут ли некоторые из них, а может быть и все, рассматриваться как сочетания других частиц, как связанные состояния двух или большего числа частиц? Не могут ли эти частицы представлять собой возбужденные состояния одной частицы, подобно тому как атом водорода может иметь многие различные возбужденные состояния? Весьма вероятно, что значительная часть элементарных частиц

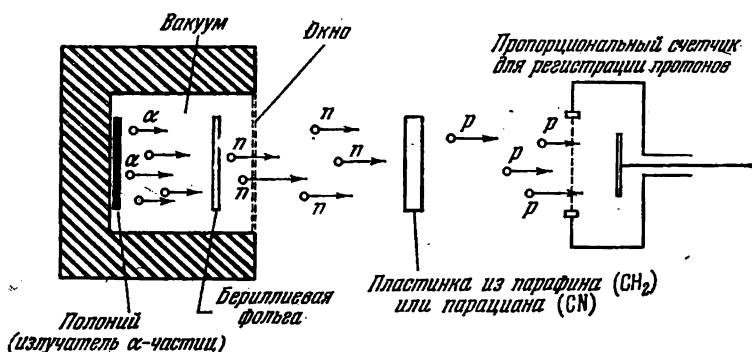
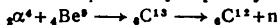


Рис. 15.3. Схема прибора Чадвика для наблюдения нейтронов (1932 г.). В этих опытах альфа-лучи из полония ударяются о бериллиевую фольгу. В результате ядерной реакции



выделяются нейтроны, которые в свою очередь ударяются о парафиновую пластинку. В процессе упругих столкновений нейтроны отдают свою энергию протонам; последние обнаруживаются посредством пропорционального счетчика, который позволил также обнаруживать ядра азота в тех случаях, когда вместо  $CH_2$  применялся CN. Эти опыты показали, что масса нейтрона приблизительно равна массе протона.

является отражением нашего незнания ответов на эти вопросы. Стабильны только две из заряженных частиц — электрон и протон (по крайней мере в нашей части Вселенной). Во Вселенной из античастиц стабильными были бы позитрон и антипротон. Все остальные заряженные частицы либо быстро и самопроизвольно распадаются (обычно менее чем за  $10^{-6}$  сек), либо испытывают почти мгновенную аннигиляцию (позитроны, антипротоны) при соприкосновении с нормальным веществом. Из нейтральных (незаряженных) частиц только фотоны и нейтрино не испытывают самопроизвольного распада. Свободные нейтроны распадаются по реакции  $n = p + e + \bar{\nu}$  при среднем времени жизни 15 мин, но нейтроны, связанные в ядре, не обязательно распадаются. Связанные нейтроны и протоны способны образовывать устойчивые ядра.

Таким образом, несмотря на обилие разнообразных элементарных частиц, только некоторые из них играют очевидную роль в строении нормального вещества. Нейтроны и протоны вступают



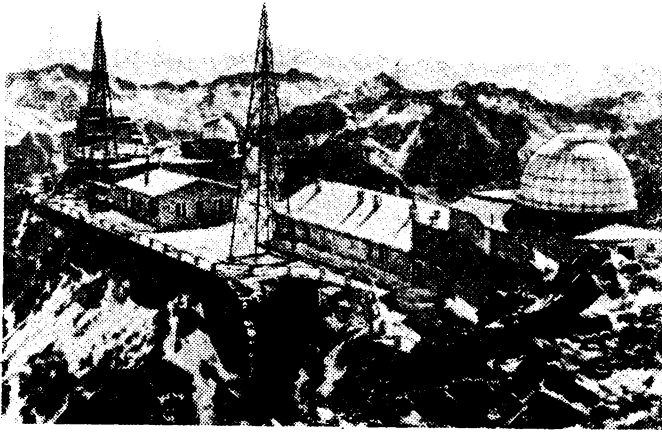


Рис. 15.4. Обсерватория на Пик дю Миди во французских Пиренеях. Высота 2840 м. В левом здании с куполом находится коронограф. Лаборатория для исследования космических лучей расположена непосредственно за этим куполом. По линии горизонта проходит граница с Испанией.

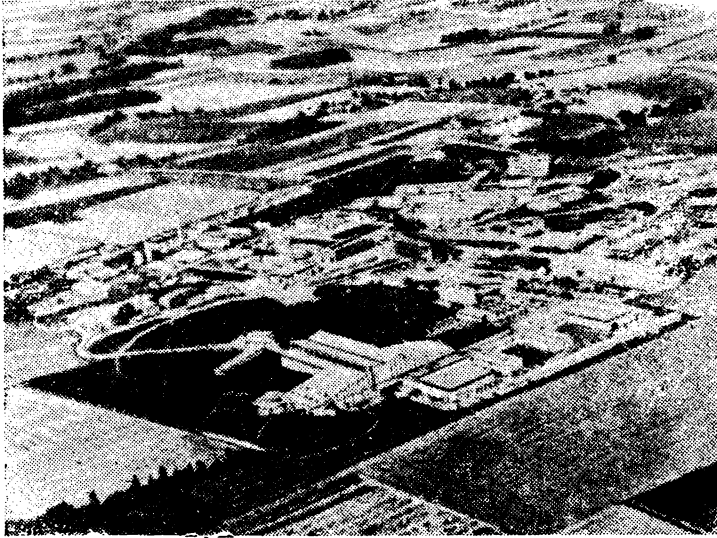


Рис. 15.5. Аэрофотоснимок ядерных лабораторий ЦЕРНа в Женеве. Слева расположен утопленный в грунт протонный синхротрон со знакопеременным градиентом магнитного поля на 28 ГэВ диаметром 200 м, ускоряющий протоны до 0,9994 скорости света. Эта установка построена совместными усилиями четырнадцати европейских стран, состоящих членами ЦЕРНа.

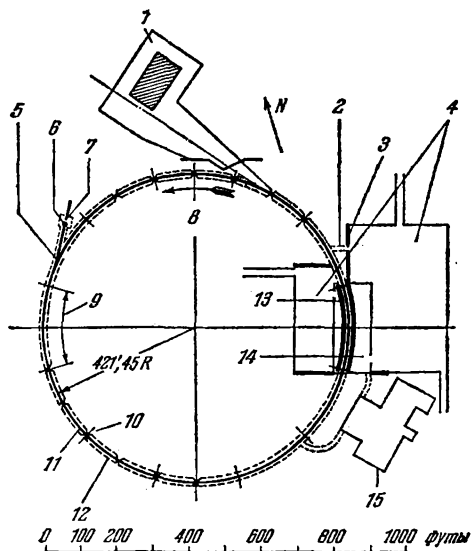


Рис. 15.6. Вид в плане протонного синхротрона на 33 Гэв Национальной лаборатории в Брукхэвене. Ускорители частиц на высокие энергии, расположенные в Брукхэвене, Женева, Дубне и Беркли, являются наиболее внушительными средствами научного исследования во всем мире. В настоящее время строятся и другие крупные ускорители 1—помещение с водородной камерой; 2—входной канал; 3—ограничительная стенка; 4—экспериментальная площадка; 5—линейный ускоритель; 6—генератор Кокрофта—Уолтона; 7—источник ионов; 8—направление протонного пучка; 9—30°-ный суперпериод; 10—символом X обозначены положения, где имеет место ускорение на высокой частоте; 11—орбита через 240 магнитов; 12—подземный магнитный туннель; 13—экранирование; 14—помещение для мишеней; 15—подсобные помещения (администрация, машинный зал, центр управления, лаборатории, механическая мастерская и т. п.).

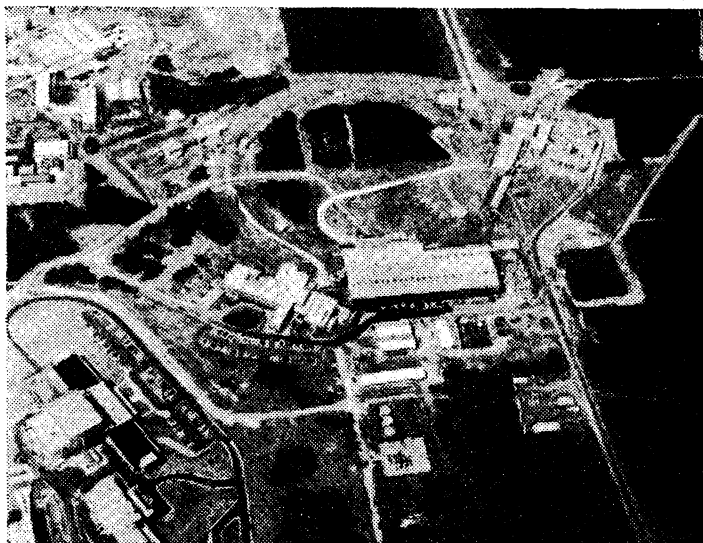
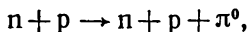


Рис. 15.7. Аэрофотоснимок брукхэйвенского синхротрона со знакопеременным градиентом магнитного поля и подсобных зданий: справа от магнитного кольца—здание с 80-дюймовой пузырьковой камерой; на жидком водороде; слева вверху—здание космотрона; слева внизу—здание графитового исследовательского реактора. (Национальная лаборатория в Брукхэвене).

в связь между собой с образованием заряженных ядер. Вокруг ядра движется электронное облако, и все это вместе составляет атом. Атомы соединяются в молекулы. Большие совокупности молекул образуют макроскопические тела: газы, жидкости, кристаллы... Ускоряемые электроны излучают или поглощают фотоны. Средством исследования переходов между стационарными атомными состояниями является спектроскопия, которая, в совокупности с электронным и ядерным резонансом, играет роль главного инструмента для исследования строения атомов и молекул.

За исключением четырех частиц:  $p$ ,  $n$ ,  $e$  и  $\gamma$ -кванта — природа скрывает роль всех остальных элементарных частиц в строении обычного, стабильного вещества. Нам известно, что протоны и нейтроны сами по себе не являются простыми материальными точками, а имеют конечные размеры и структуру. В этой структуре участвуют другие элементарные частицы, но они настолько прочно связаны (энергии связи сравнимы с массой покоя, умноженной на квадрат скорости света), что требуется относительно огромная энергия для отделения этих частиц от протона (или нейтрона). В случае протона нужно подвести энергию, достаточную для образования энергетического эквивалента массы покоя и кинетической энергии образующихся частиц.

При столкновении нейтрона и протона больших энергий можно получить нейтральные  $\pi^0$ -мезоны:



при условии достаточно большой энергии налетающего нейтрона. Эта энергия должна быть достаточной, чтобы составить сумму кинетических энергий конечных частиц  $p$ ,  $p$  и  $\pi^0$  плюс энергия покоя  $\pi^0$ -мезона, которая равна

$$M(\pi^0)c^2 \cong 140 \text{ Мэв.}$$

С точки зрения сохранения энергии и импульса  $\pi^0$ -мезон был создан в этом акте столкновения; до этого столкновения он не существовал. Энергия для катализации создания  $\pi^0$ -мезона была доставлена

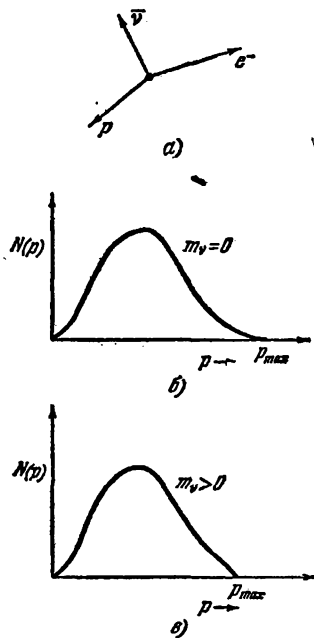


Рис. 15.8. а) Свободный нейтрон распадается на протон и электрон (которые можно наблюдать) и на нейтрино, которые практически невозможно наблюдать. О наличии нейтрино мы узнаем по тому признаку, что векторная сумма импульсов протона и электрона в общем случае не равна импульсу исходного нейтрона. б) Число электронов, приходящееся на единичный интервал импульсов  $N(p)$ , отложено как функция импульса электрона. Если бы масса нейтрино была больше нуля, то получилась бы кривая, показанная на рис. в); в действительности распределение вида в) никогда не наблюдается.

нейтроном и протоном.  $\pi^0$ -мезон может рассматриваться как созданный из вакуума — совершенно аналогично тому, как электронно-позитронная пара создается гамма-лучом. Подробное описание механизма такого рода процессов возможно только на языке релятивистской квантовой теории. Взаимодействие между пионами ( $\pi$ -мезонами) и нуклонами (протонами и нейтронами) таково, что, если бы, пользуясь идеальным микроскопом и очень коротковолновым излучением, можно было наблюдать внутренность нуклона, мы обнаружили бы там присутствие  $\pi^0$ -мезонов; но, если бы из протона или нейтрона один из таких мезонов был выбит, его нехватка была бы быстро восполнена образованием в нуклоне нового мезона. Конечный протон, или нейтрон был бы во всех отношениях идентичен нуклону, не катализировавшему образования мезона. Поскольку создание свободного мезона (выбитого из нуклона) является *единственным* результатом, условие сохранения энергии требует, чтобы была подведена энергия, эквивалентная массе покоя мезона.

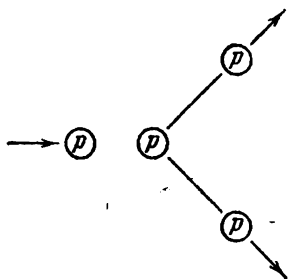


Рис. 15.9. Столкновение двух протонов малой энергии приводит просто к упругому рассеянию. Оба протона ведут себя почти как бильярдные шары.

Для наблюдения большинства элементарных частиц, т. е. всех, за исключением некоторых стабильных (электронов, протонов, связанных в ядрах нейтронов, фотонов), необходимо создавать их при столкновениях частиц высоких энергий. Даже здесь эти частицы могут рас-

падаться настолько быстро, что для исследования их свойств необходимо непрерывно создавать новые такие же частицы. До 1949 г., когда начали работать крупные ускорители, создание нестабильных частиц могло наблюдаться только при столкновениях компонентов космических лучей высоких энергий (обычно протонов и атомных ядер) с ядрами атомов атмосферы или каких-либо плотных материалов, поставленных в виде мишени. К сожалению, малочисленность налетающих частиц и неконтролируемость их энергии создавали огромные трудности в получении точных данных о свойствах образующихся нестабильных частиц. Тем не менее опыты с космическими лучами доставили много ценных данных.

Создание элементарной частицы массы  $M$  требует затраты энергии, по меньшей мере достаточной для того, чтобы несколько превысить энергию  $Mc^2$ , эквивалентную массе покоя. Это не так уж много; самые тяжелые из известных в настоящее время элементарных частиц только в 4000 раз тяжелее электрона, так что их энергия покоя составляет не более нескольких тысячных эрга. Батарейка для карманного фонаря поставляет энергию, достаточную для создания тысяч частиц в секунду. Задача заключается в концентрации этой энергии с тем, чтобы необходимая энергия приходилась

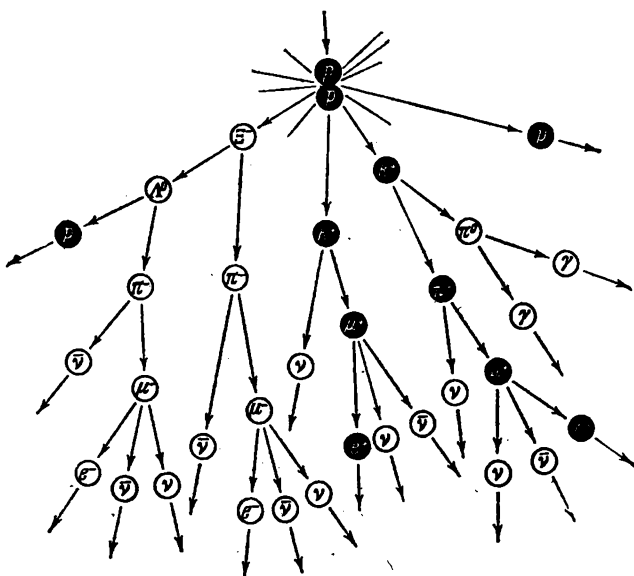


Рис. 15.10. Столкновение двух протонов высокой энергии порождает ливень частиц. Один из исходных протонов отскакивает прочь, не претерпев никаких изменений (вверху справа). Другой порождает отрицательный  $\Xi$ -барийон и два положительных  $K$ -мезона. Будучи нестабильными, эти частицы затем распадаются на другие частицы, некоторые из которых в свою очередь распадаются. Под конец остаются только стабильные частицы — в описанном процессе около двадцати. (S. B. Treiman, The Weak Interactions, Sci. American 200, 77, March (1959))

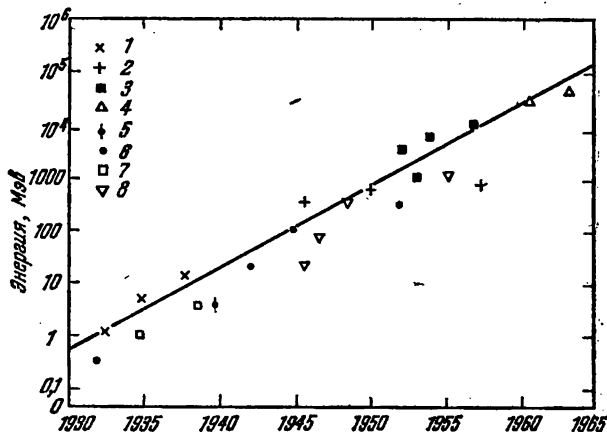


Рис. 15.11. Энергии, достигаемые в ускорителях частиц на высокие энергии, возрастали во всем мире приблизительно в 10 раз за каждое пятилетие, начиная с 1932 г. Каждый крупный скачок следовал за появлением какой-либо принципиально новой идеи, реализуемой в конструкциях ускорителей. Первый циклотрон с фиксированной частотой (1) был построен Лоуренсом в 1932 г.; первым циклотроном с модуляцией частоты (2) был 184-дюймовый циклотрон, построенный в Беркли в 1946 г.; первый протонный слабофокусирующий синхротрон (3), получивший название космодрона, был реализован в 1952 г.; синхротроны с знакопеременным градиентом магнитного поля (4) начали действовать в ЦЕРНе и Брукхэвене соответственно в 1959 и 1960 гг. (R. D. Hill, Tracking Down Particles, W. A. Benjamin Inc., New York, 1963) (С 1968 г. работает серпуховский ускоритель протонов на 76 Гэв. (Прим. ред.)); 5 — бетатрон, 6 — ускоритель Кокрофта — Уолтона, 7 — ускоритель Ван-де-Граафа, 8 — электронный синхротрон.

Таблица

## Массы и средние времена жизни частиц

(Насколько нам известно, античастицы имеют такие же спины, массы и средние времена жизни, как и перечисленные частицы, но противоположный заряд.)

Частица	Спин	Масса, Мэв		Среднее время жизни, сек
Фотон $\gamma$	1	0		Устойчив
Лептоны $\nu$ (два вида)	1/2	0		Устойчивы
$e^\mp$	1/2	$0,511006 \pm 0,000005$		Устойчивы
$\mu^\mp$	1/2	$105,655 \pm 0,010$		$2,212 \cdot 10^{-6}$
Мезоны				
$\pi^+$	0	139,59	$\pm 0,05$	$2,55 \cdot 10^{-8}$
$\pi^0$	0	135,00	$\pm 0,05$	$(2,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-16}$
$K^\pm$	0	493,9	$\pm 0,2$	$1,22 \cdot 10^{-8}$
$K^0$	0	497,8	$\pm 0,6$	50% $K_1$ , 50% $K_2$
$K_1$				$1,00 \cdot 10^{-10}$
$K_2$				$6 \cdot 10^{-8}$
Барионы				
P	1/2	938,256	$\pm 0,015$	Устойчив
n	1/2	939,550	$\pm 0,015$	$1,01 \cdot 10^3$
$\Lambda$	1/2	1115,36	$\pm 0,14$	$2,5 \cdot 10^{-10}$
$\Sigma^+$	1/2	1189,40	$\pm 0,20$	$0,8 \cdot 10^{-10}$
$\Sigma^-$	1/2	1197,4	$\pm 0,30$	$1,6 \cdot 10^{-10}$
$\Sigma^0$	1/2	1193,0	$\pm 0,5$	$< 0,1 \cdot 10^{-10}$
$\Xi^-$	?	1318,4	$\pm 1,2$	$1,3 \cdot 10^{-10}$
$\Xi^0$	?	1311	$\pm 8$	$1,5 \cdot 10^{-10}$ (1 превращ.)
$\Omega^-$		1676		

на весьма малый объем ( $\sim 10^{-40}$  см<sup>3</sup>), занимаемый одной частицей. Это достигается в крупном ускорителе, способном инициировать столкновение, при котором одиночная налетающая частица является носителем энергии, достаточной, чтобы начать нужную реакцию или создать одну или несколько элементарных частиц. Ускорители на высокие энергии применяются главным образом для ускорения протонов, но для исследования структуры протонов и нейтронов используются современные ускорители электронов на высокие энергии.

Мир элементарных частиц был в значительной части создан физиками, занимавшимися их исследованием. При исследовании нестабильной частицы она должна обнаруживаться быстро, и результаты соответствующих измерений должны регистрироваться раньше, чем она распадется или будет поглощена. В прилагаемой таблице (частично составленной У. Баркасом и А. Розенфельдом) приведены массы и средние времена жизни многих из наиболее устойчивых элементарных частиц.

## 15.2. Массы

Элементарная частица всегда имеет свою неизменную массу покоя \*). Если две частицы имеют различные массы покоя, мы рассматриваем их как разные частицы. Величина массы покоя служит основным признаком, однозначно характеризующим частицу. Значение массы покоя может служить указанием на существование частицы даже без прямых наблюдений — просто в силу сохранения массы и импульса. В соответствующих средах заряженные частицы оставляют следы своих траекторий (в камерах Вильсона, пузырьковых камерах, толстослойных фотоэмульсиях, счетчиках). С помощью магнитного поля можно измерять импульс и, следовательно, энергию частиц до и после столкновения.

В виде примера рассмотрим столкновение электрона высокой энергии с покоящимся протоном. Протон может, например, принадлежать молекуле водорода в мишени из жидкого водорода. В большинстве столкновений налетающий электрон и протон-мишень образуют почти изолированную систему, так что лишь очень малая часть импульса или энергии передается другим частицам. Обозначая символами без штрихов параметры частицы до столкновения и со штрихами — после, будем иметь

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 \equiv \Delta \mathbf{p} = 0 \quad (1)$$

и

$$[p_1^2 c^2 + m^2 c^4]^{1/2} + [p_2^2 c^2 + M_p^2 c^4]^{1/2} - [p_1'^2 c^2 + m^2 c^4]^{1/2} - [p_2'^2 c^2 + M_p^2 c^4]^{1/2} \equiv \Delta E = 0. \quad (2)$$

Здесь  $M_p$  — масса покоя протона, а  $m$  — масса покоя электрона. Однако примерно в одном столкновении из ста  $\Delta E$  и  $\Delta \mathbf{p}$  оказываются не равными нулю. Этого следует ожидать, когда при такого рода электронно-протонных столкновениях образуется незаряженная частица (не оставляющая видимых следов своей траектории). Но подобное положение наблюдалось бы и в том случае, если бы сохранение импульса и энергии не всегда соблюдалось. Как определить, какая из этих двух возможностей имеет место? Многозначительным является тот экспериментальный результат, что во всех столкновениях при различных значениях и направлениях векторов  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$  недостающая энергия всегда положительна. Если бы она оказалась отрицательной, мы не могли бы утверждать, что недостающая энергия превратилась в энергию покоя и кинетическую энергию ненаблюдаемых частиц. Еще важнее то, что в тех случаях, когда

\*) Это утверждение точно оправдывается только для стабильных частиц. В случае нестабильных опыт подтверждает предсказание квантовой теории, что масса  $M$  имеет неотъемлемую неопределенность  $\Delta M$ , определяемую соотношением  $(\Delta M) c^2 \sim \hbar / 2\tau$ , где  $\tau$  — среднее время жизни, а  $\hbar$  — постоянная Планка. Для нейтрона  $\tau \sim 15 \mu\text{с}$  и  $(\Delta M / M) \sim 10^{-27}$ . Для  $\pi^0$ -мезона  $\tau \sim 10^{-16} \text{сек}$  и  $(\Delta M / M) \sim 10^{-7}$ . Для очень короткоживущих частиц с  $\tau \ll 10^{-16} \text{сек}$  неопределенность массы уже значительна.

рождается только одна невидимая (нейтральная) частица массы  $M$ , уносящая часть энергии  $\Delta E$  и часть импульса  $\Delta p$ , эти две величины должны быть всегда связаны соотношением

$$(\Delta E)^2 - c^2 (\Delta p)^2 = M^2 c^4 \geq 0. \quad (3)$$

Масса покоя  $M$  нейтральной частицы не должна зависеть от  $p_1$ ,  $p'_1$ ,  $p_2$  и  $\Delta p$ . В миллионах проанализированных неупругих столкновений недостающие энергия и импульс всегда получали правдоподобное объяснение с точки зрения образования одной или нескольких известных элементарных частиц. Это является, пожалуй, самым убедительным из существующих подтверждений законов сохранения релятивистских импульса и энергии.

При электронно-протонных столкновениях, пока кинетическая энергия налетающего протона меньше  $140 \text{ Мэв}$ , почти все неупругие столкновения ( $\Delta E \neq 0$ ) дают

$$(\Delta E)^2 - c^2 (\Delta p)^2 = 0. \quad (4)$$

При сопоставлении с (3) это означает, что создаваемая при столкновении частица не имеет массы покоя. Частица является фотоном, так что реакция может быть записана в виде

$$e + p \rightarrow e + p + \gamma. \quad (5)$$

В диапазоне энергий электронов ниже  $140 \text{ Мэв}$  те случаи, когда  $(\Delta E)^2 > c^2 (\Delta p)^2$ , можно легко объяснить процессами множественного образования частиц, как, например,  $e + p \rightarrow e + p + \gamma + \gamma$ . Однако столкновений, при которых  $(\Delta E)^2 < c^2 (\Delta p)^2$ , никогда не наблюдалось.

При энергиях налетающих электронов, превышающих приблизительно  $140 \text{ Мэв}$ , начинает действовать другой механизм потери энергии и импульса. В этой области при неупругих столкновениях наблюдается, что

$$(\Delta E)^2 - c^2 (\Delta p)^2 = (135 \text{ Мэв})^2. \quad (6)$$

Такого рода несогласованность между энергией и импульсом приписывается образованию частицы с массой покоя, эквивалентной  $135 \text{ Мэв}$ . Недостающие энергия и импульс, выраженные уравнением (6), отдаются нейтральному  $\pi^0$ -мезону, имеющему массу покоя  $264 m$ , где  $m$  — масса электрона. Процесс выражается реакцией

$$e + p \rightarrow e + p + \pi^0.$$

Эта схема подтвердилась наблюдением продуктов распада нестабильного  $\pi^0$ -мезона, распадающегося по схеме

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Именно таким образом был впервые открыт нейтральный пион. Однако многократного подтверждения уравнения (6) для различных энергий налетающей частицы и различных значений  $\Delta E$  и  $\Delta p$  уже



самого по себе достаточно для констатации существования мезона с массой покоя 264 *m*.

$\pi^0$ -мезон образуется также при столкновениях других частиц высоких энергий, например, в процессах

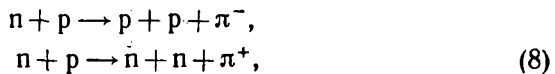


Аналогичным образом, открытие и подтверждение существования других элементарных частиц нередко основаны на использовании законов сохранения энергии и импульса.

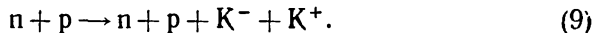
### 15.3. Заряд

В пределах точности измерений можно утверждать, что все известные элементарные частицы имеют заряды  $+e$ ,  $-e$  или заряд, равный нулю. Далее, опять-таки в пределах точности измерений, ни разу не был зарегистрирован ни один процесс столкновения, при котором не соблюдался бы закон сохранения заряда. Например, неотклоняемость нейтронов в однородных электрических полях позволяет рассматривать заряд нейтрона как равный нулю с точностью до  $10^{-17}$  заряда электрона.

Применяя закон сохранения заряда к реакциям



можно приписать  $\pi^-$ - и  $\pi^+$ -мезонам заряды соответственно  $-e$  и  $+e$ . Другие частицы образуются в виде положительно-отрицательных пар, как, например:



Здесь из закона сохранения заряда следует, что заряды частиц  $K^-$  и  $K^+$  должны быть равнопротивоположны.

Итак, мы полагаем, что заряды всех элементарных частиц с большой точностью равны  $\pm e$  или нулю. Независимые косвенные данные о сохранении и квантовой природе зарядов элементарных частиц связаны с тем, что величина заряда частицы  $q$  участвует в выражении, определяющем импульс частицы  $p$  через измеренный радиус  $\rho$  круговой орбиты частицы в магнитном поле  $B$ :

$$B\rho = \frac{cp}{q}.\quad (10)$$

Это соотношение было выведено релятивистским путем в гл. 13. Измерения радиуса  $\rho$  являются важнейшим средством определения импульса и проверки соотношения (3) между энергией и импульсом. Отклонение заряда частицы от его принятого значения  $\pm e$  повлияло бы на вычисленные значения как импульса, так и энергии частицы. Это в свою очередь привело бы к кажущемуся нарушению сохранения энергии и импульса в реакциях. В большинстве случаев,

однако, для столкновений, порождающих нестабильные частицы, уравнение (3) не может быть проверено с большой точностью, так как измерения кривизны траекторий лишь в редких случаях могут производиться с ошибкой менее 1%. Прямое экспериментальное подтверждение равенства зарядов  $\pm e$  или нулю с очень высокой точностью (с погрешностью менее  $10^{-15} e$ ) получено только для стабильных элементарных частиц: протона, нейтрона, электрона, фотонов и нейтрино.

#### 15.4. Время жизни

Распад нестабильных частиц сильно отличается от тех видов разрушения, или распада, которые мы обычно наблюдаем. Вероятность смерти в течение ближайшего часа выше для пожилого человека, чем для молодого; бактерия не испытывает деления непосредственно после своего рождения и делится только по истечении определенного времени; старый автомобиль сломается скорее, чем новый. Во всех этих случаях вероятность того или иного вида распада зависит, в частности, от предыстории объекта, имеющейся к данному моменту: объекты, просуществовавшие дольше, более склонны испытать то или иное разрушение. С другой стороны, бесспорным экспериментальным фактом является то обстоятельство, что вероятность распада элементарной частицы, или ядра любого радиоактивного изотопа, или, наконец, возбужденного атома или молекулы не зависит от продолжительности существования частицы. Свободный нейтрон нестабилен, но длительно существовавший нейтрон ничем не отличается от нейтрона, только что ставшего свободным. Предсказать момент распада заданной нестабильной частицы невозможно. Воспроизводимое значение имеет лишь среднее время жизни, установленное для большого числа частиц.

Вероятность  $P_{\Delta t}$  того, что с момента  $t$  частица распадется в течение ближайшего короткого промежутка времени  $\Delta t$ , равна произведению  $\Delta t$  на некоторую постоянную  $1/\tau$ , характерную для частицы, но не для ее предыстории:

$$P_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\tau}. \quad (11)$$

Говоря «короткий промежуток времени», мы подразумеваем, что  $\Delta t \ll \tau$ . Для большого числа частиц  $N$  число частиц, распадающихся за промежуток  $\Delta t$ , равно  $NP_{\Delta t}$ . Распад этих частиц изменяет число частиц на  $-\Delta t(dN/dt)$ . Отсюда, используя равенство (11), получаем

$$NP_{\Delta t} = \frac{N\Delta t}{\tau} = -\Delta t \frac{dN}{dt}, \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) имеет вид

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}, \quad (13)$$

где  $N_0$  — число частиц в момент  $t=0$ .

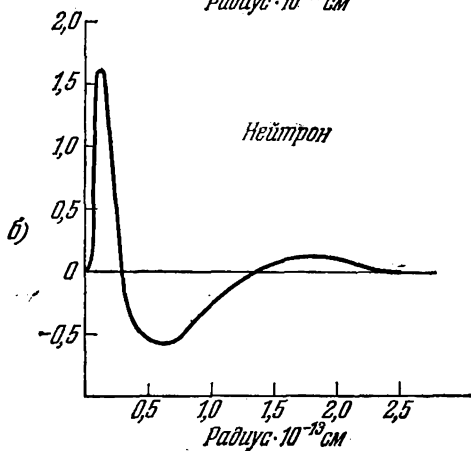
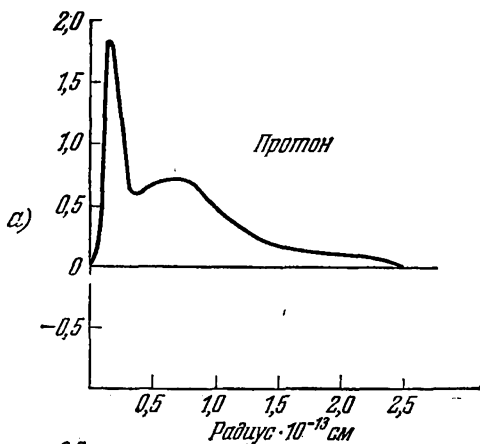
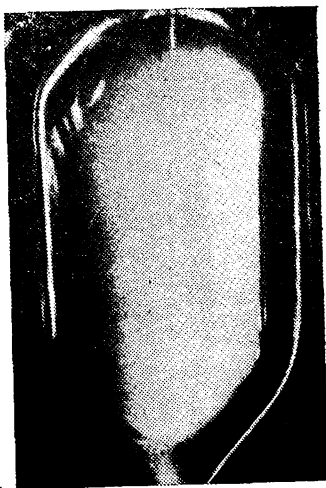


Рис. 15.12. Кривые радиального распределения заряда внутри протона (а) и нейтрона (б), считая от центра частицы. Ординаты пропорциональны заряду тонкой сферической оболочки радиусом  $r$ . Площадь под всей кривой распределения для протона равна заряду протона. Площадь, соответствующая всей кривой распределения для нейтрона, равна нулю. Данные получены в опытах по рассеянию электронов высоких энергий.

Рис. 15.13. Ранняя модель пузырьковой камеры, обнаруживающей треки частиц космического излучения в днэтиловом эфире. Камера была построена в Мичиганском университете. (Приведено с разрешения Д. Глезера)



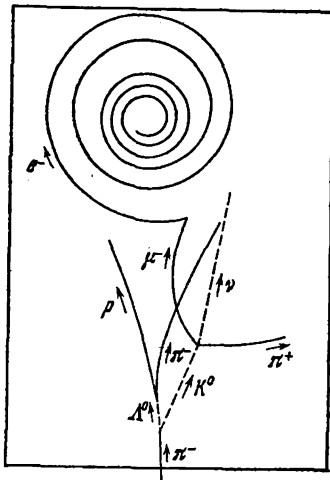
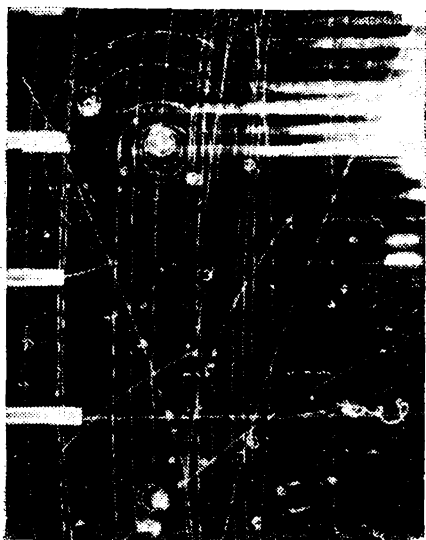


Рис. 15.14 Мезоны с «друзьями» в водородной пузырьковой камере. (Радиационная лаборатория им. Лоуренса)

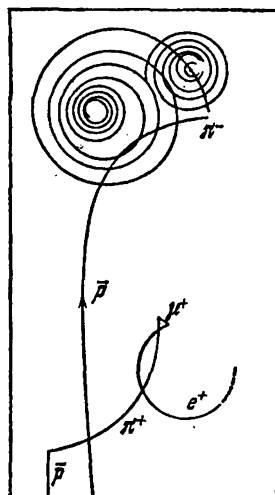
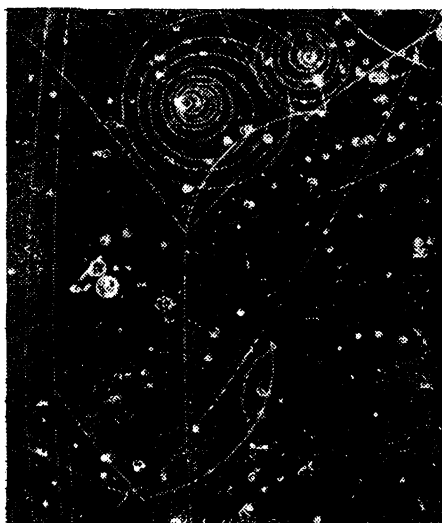


Рис. 15.15 Треки частиц в пузырьковой камере с жидким водородом. На правом рисунке соответствующими символами помечены два антипротона, вошедших в поле зрения снизу. Они оба соединяются внутри камеры с протонами. Помечены также некоторые продукты реакции. Обращают на себя внимание спиральные треки электронов и позитронов. (Радиационная лаборатория им. Лоуренса)

Величина  $\tau$  называется *средним временем жизни* нестабильной частицы; его принято относить к системе отсчета, связанной с распадающейся частицей. Вероятностный характер процессов распада, отражаемый уравнением (13), согласуется как с экспериментальными данными, так и с квантовомеханическими теоретическими выводами.

Многие из нестабильных частиц следуют нескольким схемам распада. Рассмотрим две схемы распада (нейтральной) частицы  $\Lambda$ :

$$\text{Схема А: } \Lambda \rightarrow p + \pi^- . \quad (14)$$

$$\text{Схема В: } \Lambda \rightarrow n + \pi^0 . \quad (15)$$

Вероятность того, что за ближайший малый промежуток времени  $\Delta t$  произойдет тот или иной из этих распадов, равна сумме вероятностей распадов по схемам А и В:

$$\left. \begin{aligned} P &= P_A + P_B, \\ P_A &= \frac{1}{\tau_A} \Delta t, \\ P_B &= \frac{1}{\tau_B} \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При этом

$$-\Delta t \frac{dN}{dt} = PN, \quad (17)$$

или

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau} N \quad (18)$$

и

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B} . \quad (19)$$

Из (18) видно, что число нераспавшихся к моменту  $t$   $\Lambda$ -частиц опять выражается простой показательной функцией, аналогичной выражению (13). Если бы нас интересовало только испускание  $\pi^-$ -мезонов из образца с  $\Lambda$ -частицами, то для числа  $\pi^-$ -мезонов, испускаемых за время  $\Delta t$ , мы получили бы  $P_A N$ , откуда скорость  $R^-$  испускания  $\pi^-$ -мезонов принимает вид

$$R^- = \frac{N_0}{\tau_A} e^{-t/\tau} . \quad (20)$$

Скорость  $R^0$  испускания  $\pi^0$ -мезонов равна

$$R^0 = \frac{N_0}{\tau_B} e^{-t/\tau} . \quad (21)$$

Скорость суммарного испускания определяется выражением

$$R = R^- + R^0 = \frac{N_0}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (22)$$

с учетом выражения (19). Какой бы тип распада мы ни наблюдали, показательная функция будет одна и та же. Частица имеет только одно значение среднего времени жизни — независимо от числа различных типов ее распада и независимо от того, какой именно тип используется для количественного исследования распада.

Если не считать электростатического взаимодействия заряженных частиц, силы взаимодействия между элементарными частицами становятся малыми, когда расстояние между ними превышает  $2 \cdot 10^{-13}$  см. Поэтому даже при вылете продуктов распада нестабильной частицы со скоростью света требуется около  $(2 \cdot 10^{-13}/c) \approx \approx 10^{-23}$  сек, прежде чем распад можно считать безвозвратным и законченным.

Частица, распадающаяся за время, соизмеримое с  $10^{-23}$  сек, вряд ли заслуживает названия «частица». Такой промежуток времени потребовался бы для разделения разлетающихся частиц и в том случае, если бы они вовсе не были перед этим связаны в одной частице. Указанный промежуток времени ( $10^{-23}$  сек) составляет естественный эталон, по сравнению с которым распады можно в известном смысле подразделять на быстрые и медленные. Из приведенной выше таблицы видно, что все указанные там распады (за исключением распадов  $\pi^0$ -мезонов и  $\Sigma^0$ -барионов, сводящихся просто к испусканию фотона) в высшей степени медленны по сравнению с  $10^{-23}$  сек, причем средние времена жизни находятся в пределах от 17 мин (для нейтрона) до  $10^{-10}$  сек (для  $\Lambda$ - или  $\Sigma^\pm$ -барионов). Обычно, чем выше кинетическая энергия, имеющаяся для образования продуктов распада, тем быстрее распад. По сравнению с промежуток времени, достаточным для лабораторных измерений, даже долгоживущие частицы со средним временем жизни порядка  $10^{-10}$  сек существуют так недолго, что проблема изучения свойств этих нестабильных элементарных частиц требует специальных методов, аппаратуры и большой изобретательности.

### 15.5. Прочие характеристики

Масса, заряд и время жизни не исчерпывают измеримых величин, характеризующих свойства элементарных частиц, подобно тому как эти три величины не дают полной характеристики обычных макроскопических объектов. Они, однако, большей частью измеряются раньше других и в большинстве случаев служат единственными отличительными признаками той или иной элементарной частицы.

Большинство элементарных частиц может классифицироваться по особым группам (мультиплетам). Имеются, например, три пиона —  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  — почти одинаковой массы (см. таблицу) и поразич-

тельно сходные по свойствам, если не считать заряда. Однако не существует частиц  $\pi^{++}$ ,  $\pi^{--}$  и т. п.; пионы встречаются в виде триплетных разновидностей. С другой стороны, нуклоны образуют дублет —  $p$  и  $n$  (или, вернее, пару дублетов, поскольку существуют антипротон  $\bar{p}$  и антинейтрон  $\bar{n}$ ). И в этой группе также не существует многозарядных частиц (многозарядных нуклонов).  $E$ -частицы также распадаются на пару дублетов. То же самое относится к  $K$ -частицам. Но  $\Lambda$ -частица образует синглет, а частицы  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$  и  $\Sigma^-$  — триплет.

Частицы с массой мюонов и более легкие ( $\mu$ ,  $e$ ,  $\nu$ ) называются *лептонами* (легкими частицами); частицы с промежуточными (между лептонами и нуклонами) массами называются *мезонами* (промежуточными частицами), а нуклоны и более тяжелые частицы ( $p$ ,  $n$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^0$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Omega^-$ ) называются *барионами* (тяжелыми частицами). При рассмотрении взаимодействий между элементарными частицами эта широкая классификация весьма удобна. (Например, во *всех* реакциях разность чисел барионов и антибарионов остается постоянной. Это не соблюдается для мезонов, но, по-видимому, соблюдается также для лептонов.)

Многие элементарные частицы вращаются вокруг собственной оси подобно Земле, с той, однако, разницей, что для элементарных частиц это движение описывается квантовой механикой. Мы здесь ограничимся самой краткой формулировкой проистекающего отсюда результата: все лептоны и долгоживущие барионы, по-видимому, имеют один и тот же собственный момент импульса  $\frac{1}{2}\hbar$ , тогда как долгоживущие мезоны не имеют его вовсе.

В среднем (во времени) заряд элементарной частицы распределен по всей частице. Во всяком «деликатном» опыте, который сам по себе не разрывает частицу, измеримыми являются только средние значения величины, поскольку измерения не могут быть мгновенными. (Здесь опять именно квантовая механика ограничивает наши возможности описания строения элементарной частицы.) Экспериментальные данные по распределению заряда для протона, нейтрона и электрона доставляют веское доказательство точечного характера заряда электрона, по крайней мере с точностью до  $10^{-14}$  см, тогда как протон и нейтрон проявляют себя как более сложные структуры с зарядом, распределенным внутри сферы радиусом около  $10^{-13}$  см. У лептонов магнитный момент (определение которого будет дано в т. II) возрастает обратно пропорционально массе, за исключением  $\nu$ - и  $\gamma$ -частиц, у которых нет измеримых собственных магнитных моментов. В принципе можно измерять не только напряженность магнитного поля, но и получать точное распределение образующих это поле токов. Одним из крупнейших достижений релятивистской квантовой теории является успешное предсказание величины напряженности (впоследствии измеренной) собственного магнитного поля электрона — предсказание, сделанное с точностью до 0,001%, т. е. с ошибкой, меньшей погрешности современных измерений.

## 15.6. Четыре основных вида сил в природе

Нам известно лишь четыре основных типа взаимодействия веществ. Иными словами, существует четыре основных вида взаимодействия, к которым сводятся все известные силы во Вселенной: гравитационное взаимодействие, электромагнитное взаимодействие, сильное взаимодействие, слабое взаимодействие.

Гравитационное взаимодействие, являющееся самым слабым из всех, связывает воедино части земного шара, объединяет Солнце и планеты в Солнечную систему и связывает звезды в галактиках. Это взаимодействие определяет крупномасштабные события Вселенной. Электромагнитное взаимодействие удерживает электроны в атомах и связывает атомы в молекулах и кристаллах. Это взаимодействие играет большую роль в химических и биологических процессах.

Сильное взаимодействие связывает нуклоны; оно объединяет протоны и нейтроны в ядрах всех элементов. Будучи самым сильным в природе, это взаимодействие ограничивается вместе с тем весьма короткими расстояниями. Это — преобладающий вид взаимодействий в ядерной физике высоких энергий.

Слабое взаимодействие обуславливает силы, действующие между легкими частицами (лептонами: электронами, нейтрино и мюонами) и между лептонами и более тяжелыми частицами. Слабое взаимодействие, проявляющееся при бета-распаде радиоактивных ядер, имеет очень малую дальность. Слабое взаимодействие не способно создавать устойчивые состояния вещества в том смысле, в каком сила тяготения поддерживает существование Солнечной системы.

Элементарные частицы будут более подробно рассмотрены в т. IV.

### Задачи

1. Источник радиоактивного излучения испускает альфа-частицу ( $M_\alpha \approx 4M_p$ , заряд  $2e$ ) с кинетической энергией  $6 \text{ МэВ}$ . Предположим, что частица направлена на центр ядра атома золота с зарядом  $79e$ . Примем, что заряд ядра сконцентрирован в одной точке, и будем пренебрегать отдачей ядра.

а) До какого расстояния альфа-частица подойдет к центру ядра?

б) Что произойдет с альфа-частицей после того, как она достигнет точки наибольшего сближения с ядром?

2. В дорезерфордовский период предполагалось, что заряд ядра распределен по всему линейному протяжению атома, имеющему порядок  $10^{-8} \text{ см}$ . Пренебрегая влиянием атомных электронов, будем считать, что альфа-частица взаимодействует с положительным зарядом  $79e$ , распределенным с постоянной плотностью внутри сферы радиусом  $10^{-8} \text{ см}$ . При какой максимальной энергии альфа-частица все еще может рассеиваться в направлении прямо назад таким ядром атома золота? (Указание: пользуясь методами, изложенными в гл. 9, нужно найти выражение потенциальной энергии в центре равномерно заряженной сферы.)

Ответ.  $3400 \text{ эВ}$ .

### Из истории физики

1. Резерфордовское рассеяние и ядерная модель атома. Открытие ядра было впервые описано Резерфордом в классической работе (E. Rutherford, Phil. Mag. 21, 669 (1911)), которую мы частично воспроизводим ниже. Вывод выражения вероятности рассеяния под большими углами весьма прост, хотя широко исполь-



зует тригонометрические соотношения. Тот результат, что эксцентриситет гиперболы равен  $\sec \theta$  (как это показано на схеме ниже), непосредственно следует из нашего уравнения (9.71), в котором  $1 - e \cos \varphi$  (в наших обозначениях) приравнено нулю.

Вспомним, что альфа-частица есть ядро  $\text{He}^4$ , а бета-частица — электрон.

### LXXIX. Рассеяние альфа- и бета-частиц веществом и строение атома

Профессор Э. Резерфорд, член Королевского общества, Манчестерский университет \*)

§ 1. Хорошо известно, что альфа- и бета-частицы при встрече с атомами вещества испытывают отклонения от своих прямолинейных траекторий. Для бета-частиц это рассеяние гораздо заметнее, чем для альфа-частиц, вследствие того, что импульс и энергия первых намного меньше, чем вторых. По-видимому, нет никакого сомнения в том, что столь быстро движущиеся частицы проходят сквозь находящиеся на их пути атомы и что наблюдаемые отклонения происходят под действием сильных электрических полей, пересекаемых частицами внутри атомных систем. Обычно предполагалось, что рассеяние пучка альфа- или бета-лучей при прохождении сквозь

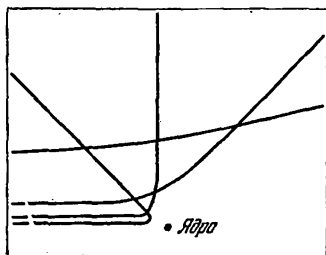


Рис. 15.16. Вычисленные траектории альфа-частиц, приближающихся к ядру. Эти траектории были рассчитаны в предположении, что сила отталкивания обратно пропорциональна квадрату расстояния. (Воспроизводится из PSSC, «Physics», D. C. Heath and Company, Boston, 1960; русский перевод: «Физика» под редакцией А. С. Ахматова, «Наука», 1965)

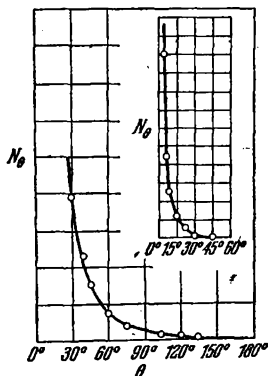


Рис. 15.17. График зависимости  $N_\theta$  (числа частиц, рассеянных под углами, превышающими  $\theta$ ) от  $\theta$ . Сплесная линия выражает зависимость, которую следовало бы ожидать при действии кулоновской силы. Светлые кружки выражают данные, накопленные Гейгером и Марсденом в их опытах по рассеянию. Врезка воспроизводит кривую для малых углов в другом масштабе. (Воспроизводится из PSSC, «Physics», D. C. Heath and Company, Boston, 1960; русский перевод: «Физика» под редакцией А. С. Ахматова, «Наука», 1965)

тонкую пластинку вещества является результатом множества малых актов рассеяния, осуществляемых атомами пересекаемого вещества. Данные Гейгера и Марсдена\*\*) по рассеянию альфа-лучей указывают, однако, на то, что некоторые из альфа-частиц при отдельных столкновениях испытывают отклонения на углы, превышающие прямой угол. Они, например, установили, что небольшая часть налетающих альфа-частиц, примерно одна частица из 20 000, отклоняется в среднем на  $90^\circ$  при прохождении сквозь слой золотой фольги толщиной около  $0,00004 \text{ см}$ , эквивалентный по своей тормозящей способности по отношению к альфа-частицам слою воздуха толщиной  $1,6 \text{ мм}$ . Позже Гейгер\*\*\*)

\*) Доложено автором. Краткое содержание этой статьи было доложено Манчестерскому литературно-философскому обществу в феврале 1911 г.

\*\*) Proc. Roy. Soc. LXXXII, p. 495 (1909).

\*\*\*) Proc. Roy. Soc. LXXXIII, p. 492 (1910).

показал, что для пучка альфа-частиц, пронизывающих золотую фольгу данной толщины, наивероятнейшим углом отклонения является угол около  $0^{\circ},87$ . Простое вычисление на основе теории вероятностей показывает, что вероятность отклонения альфа-частицы на  $90^{\circ}$  исчезающе мала. Кроме того, как будет показано ниже, распределение частиц по большим углам отклонения не подчиняется формуле распределения, выведенной в предположении, что эти большие отклонения образуются в результате сложения большого числа малых отклонений. Представляется разумным предположить, что отклонение на большой угол происходит в результате однократного столкновения с атомом, так как вероятность последующего столкновения такого типа, при котором получилось бы тоже большое отклонение в ту же сторону, в большинстве случаев должна быть чрезвычайно мала. Простой расчет показывает, что в атоме должно быть сосредоточено сильное электрическое поле для того, чтобы вызвать столь большое отклонение при однократном столкновении.

Сэр Дж. Дж. Томсон \*) недавно выдвинул теорию, объясняющую рассеяние частиц, проходящих через тонкие слои вещества. Предполагается, что атом состоит из  $N$  отрицательно заряженных частиц с таким же количеством положительного электричества, равномерно распределенным внутри некоторой сферы. Отклонение отрицательно заряженной частицы в процессе прохождения сквозь атом объясняется двумя причинами: 1) отталкиванием от частиц, распределенных в атоме, и 2) притяжением к положительному заряду атома. Предполагается, что отклонение частицы при пронизывании атома мало, тогда как среднее отклонение после большого числа встреч  $m$  принимается равным  $\sqrt{m} \cdot \theta$ , где  $\theta$  — среднее отклонение, вызванное одним атомом. Было показано, что число  $N$  электронов в атоме может быть вычислено из измерений по рассеянию заряженных частиц. Точность этой теории многократного отклонения была экспериментально проверена Краузером \*\*) в более поздней работе. Его результаты, по-видимому, подтверждали основные заключения теории Томсона, и, принимая непрерывность распределения положительного электричества, Краузер сделал вывод, что число электронов в атоме превышает атомный вес приблизительно втрое.

Теория Дж. Дж. Томсона основана на предположении, согласно которому рассеяние при однократной встрече с атомом мало и строение, приписываемое атому, не допускает очень больших отклонений альфа-частицы, пересекающей отдельный атом, если только не принять, что диаметр сферы положительного электричества ничтожно мал по сравнению с диаметром сферы влияния атома.

Поскольку альфа- и бета-частицы проходят сквозь атом, должна существовать возможность, исходя из тщательного анализа характера отклонений, составить представление о строении атома, которое обуславливает наблюдаемые результаты. Рассеяние быстрых заряженных частиц атомами вещества, безусловно, является одним из самых многообещающих методов решения проблемы. Развитие сцинтилляционного метода счета отдельных альфа-частиц открывает новые экспериментальные возможности, а исследования Х. Гейгера, проведенные этим методом, уже немало расширили наши знания о рассеянии альфа-частиц веществом.

§ 2. Сначала рассмотрим теоретически однократные столкновения \*\*\* с атомом простого строения, способным сильно отклонить альфа-частицу, а затем сравним теоретические выводы с имеющимися экспериментальными данными.

Рассмотрим атом, содержащий заряд  $\pm Ne$ , сосредоточенный в центре и окруженный назлектризованной сферой с зарядом  $\mp Ne$ , равномерно распределенным внутри сферы радиуса  $R$ . Через  $e$  обозначим фундаментальную единицу заряда, которую в этой статье мы принимаем равной  $4,65 \cdot 10^{-10}$  ед. СГСЭ<sub>д</sub>. Предположим, что даже по сравнению с расстоянием, не превышающим  $10^{-12}$  см, центральный заряд, равно как и заряд альфа-частицы, может рассматриваться как точечный. Ниже будет показано, что основные выводы теории не зависят

\*) Camb. Lit. & Phil. Soc. XV, pt. 5 (1910).

\*\*) Crowther, Proc. Roy. Soc. LXXXIV, p. 226 (1910).

\*\*\*) Условимся называть «однократным рассеянием» отклонение частицы на значительный угол при встрече с отдельным атомом. Отклонение частицы в результате многократных малых отклонений будем называть «сложным рассеянием».

от того, будем ли мы считать центральный заряд положительным или отрицательным. Для удобства будем считать его положительным. Вопрос об устойчивости атома рассматриваемого строения нет надобности обсуждать на этом этапе, так как устойчивость, несомненно, зависит от тонкостей строения атома и от движения его заряженных составных частей.

Чтобы составить некоторое представление о силах, требующихся для отклонения альфа-частицы на большой угол, рассмотрим атом, содержащий положительный заряд  $Ne$ , расположенный в центре атома и окруженный отрицательным электрическим зарядом, распределенным равномерно внутри сферы радиусом  $R$ . Электрическая сила  $X$  и потенциал  $V$  на расстоянии  $r$  от центра атома до точки, расположенной внутри атома, равны

$$X = Ne \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right),$$

$$V = Ne \left( \frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right).$$

Представим себе альфа-частицу с массой  $m$ , скоростью  $u$  и зарядом  $E$ , движущуюся в направлении прямо на центр атома. Она будет остановлена на расстоянии  $b$  от центра атома, определяемом соотношением

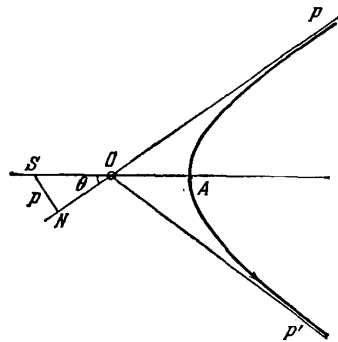
$$\frac{1}{2} mu^2 = NeE \left( \frac{1}{b} - \frac{3}{2R} + \frac{b^2}{2R^3} \right).$$

Мы увидим, что в последующих расчетах величина  $b$  играет большую роль. В предположении, что центральный заряд равен  $100e$ , получаем, что для альфа-частицы со скоростью  $2,09 \cdot 10^9$  см/сек  $b$  составляет около  $3,4 \cdot 10^{-13}$  см. Этот результат получается при допущении, что  $b$  очень мало по сравнению с  $R$ . Поскольку предполагается, что порядок величины  $R$  тот же, что и радиуса атома, а именно  $10^{-8}$  см, ясно, что до своего отскока назад альфа-частица проникает в глубь атома настолько близко к центральному заряду, что полем, обусловленным равномерно распределенным отрицательным электрическим зарядом, можно пренебречь. Вообще, простой расчет показывает, что для всех отклонений, превышающих один градус, можно с достаточной степенью точности приписывать всё отклонение действию только поля центрального заряда. На этом этапе развития теории можно не учитывать возможных отдельных отклонений, обусловленных отрицательным электричеством, распределенным внутри объема атома в виде отдельных частичек. Ниже будет показано, что этот эффект в общем мал по сравнению с действием центрального поля.

Рассмотрим теперь прохождение положительно заряженной частицы вблизи центра атома. Предполагая, что скорость частицы не изменяется заметным образом при прохождении мимо атома, можно рассматривать траекторию частицы, движущейся под действием силы отталкивания, обратно пропорциональной квадрату расстояния, как гиперболу с внешним фокусом в центре атома  $S$ . Положим, что частица входит в атом по направлению  $PO$  (см. схему) и выходит по  $OP'$ . Прямые  $OP$  и  $OP'$  образуют равные углы с линией  $SA$ , где  $A$  — вершина гиперболы. Отрезок  $p=SN$  представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из центра атома на направление начальной скорости частицы (прицельное расстояние).

Обозначим угол  $POA$  через  $\theta$ . Пусть  $V$  выражает скорость частицы при вхождении в атом, а  $v$  — ее скорость в точке  $A$ . Тогда из условия сохранения момента импульса

$$pV = SA \cdot v.$$



Схема

Условие сохранения энергии дает

$$\frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{NeE}{SA},$$

$$v^2 = V^2 \left( 1 - \frac{b}{SA} \right).$$

Так как эксцентриситет равен  $\sec \theta$ , имеем

$$SA = SO + OA = \rho \operatorname{cosec} \theta (1 + \cos \theta) = \rho \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

$$\rho^2 = SA(SA - b) = \rho \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \left( \rho \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - b \right),$$

отсюда  $b = 2\rho \operatorname{ctg} \theta$ .

Угол отклонения частицы  $\varphi$  равен  $\pi - 2\theta$ , откуда

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{2\rho}{b}. \quad (1)$$

Последнее равенство дает выражение отклонения частицы через  $b$  и прицельное расстояние  $\rho$  \*).

В качестве иллюстрации ниже приводится таблица, показывающая углы отклонения  $\varphi$  при различных значениях  $\rho/b$ :

$\rho/b$	10	5	2	1	0,5	0,25	0,125
$\varphi$	5°,7	11°,4	28°	53°	90°	127°	152°

**§ 3. Вероятность однократного отклонения на любой угол.** Пусть параллельный пучок заряженных частиц падает нормально на тонкий экран из исследуемого вещества толщиной  $t$ . За исключением немногих частиц, рассеиваемых на большие углы, прохождение частиц предполагается почти нормальным, с малым изменением скорости. Обозначим через  $n$  число атомов в единице объема вещества. Тогда в слое толщиной  $t$  число столкновений частицы с атомами радиусом  $R$  будет равно  $\pi R^2 n t$ .

Вероятность  $m$  вхождения в атом с прицельным расстоянием  $\rho$  составит

$$m = \pi \rho^2 n t.$$

Вероятность же  $dm$  прохождения в интервале прицельных расстояний от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$  будет равна

$$dm = 2\pi \rho n t \cdot d\rho = \frac{\pi}{4} n t b^2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi, \quad (2)$$

так как

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = 2 \frac{\rho}{b}.$$

Значение  $dm$  показывает, *какая часть* всех частиц отклоняется на углы, лежащие в пределах между  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ .

Часть  $\rho$  всех частиц, отклоняющихся на углы, превышающие  $\varphi$ , дается выражением

$$\rho = \frac{\pi}{4} n t b^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3)$$

Часть  $\rho$  всех частиц, отклоняющихся на углы в пределах от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , принимает вид

$$\rho = \frac{\pi}{4} n t b^2 \left( \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi_2}{2} \right). \quad (4)$$

\*) Из простых соображений следует, что отклонение не изменится, если силы отталкивания заменить силами притяжения.

Для сопоставления с экспериментальными данными удобно представить уравнение (2) в другом виде. В случае альфа-лучей на экране из сернистого цинка отсчитывается число синтилляций, появляющихся на площадках *постоянной* площади, расположенных под различными углами к направлению падающего пучка. Обозначим через *r* расстояние точки экрана от точки падения альфа-луча на рассеивающий материал. Если обозначить через *Q* общее число частиц, падающих на рассеивающий материал, число *y* альфа-частиц, отклоненных на угол  $\varphi$  и падающих на единицу площади, будет равно

$$y = \frac{Q \, dm}{2\pi r^2 \sin \varphi \, d\varphi} = \frac{ntb^2 \cdot Q \cdot \cos^4 \frac{\varphi}{2}}{16r^2} \quad (5)$$

Так как  $b = \frac{2NeE}{mu^2}$ , последнее уравнение показывает, что число альфа-частиц (синтилляций), приходящееся на единицу площади экрана из сернистого цинка на данном расстоянии *r* от точки падения лучей, пропорционально следующим величинам:

- 1)  $\cos^4 \frac{\varphi}{2}$  или, если  $\varphi$  мало,  $1/\varphi^4$ ;
- 2) толщине рассеивающего материала *t* при условии, что она мала;
- 3) величине центрального заряда *Ne*;
- 4) обратной величине  $(mu^2)^2$  или обратной величине четвертой степени скорости, если *m* постоянно.

В этих выкладках принимается, что рассеяние альфа-частиц на большие углы происходит в результате только однократного большого отклонения каждой частицы. Для того чтобы это было возможно, необходимо, чтобы толщина рассеивающего материала была настолько мала, что вероятность второго столкновения, вызывающего новое большое отклонение, становится ничтожно малой. Например, если вероятность однократного отклонения  $\varphi$  при прохождении толщины *t* составляет 1/1000, то вероятность двух последовательных отклонений, каждый раз на угол  $\varphi$ , составляет лишь 1/10<sup>6</sup>, т. е. пренебрежимо мала.

Угловое распределение альфа-частиц, рассеянных тонким металлическим листком, доставляет один из простейших методов проверки общей применимости изложенной теории однократного рассеяния. Эта проверка была недавно выполнена д-ром Гейгером\*), показавшим, что распределение частиц, отклоненных тонкой золотой фольгой на углы в пределах от 30° до 150°, в основном согласуется с изложенной теорией. Более подробное описание этих и других опытов по проверке приложимости указанной теории будет опубликовано позже.

\* \* \*

§ 6. Сравнение теории с результатами опытов. Согласно изложенной теории центральный заряд *Ne* является важной константой, значение которой желательно определить для разных атомов. Проще всего это можно сделать, наблюдая рассеяние альфа- и бета-частиц известной скорости, падающих на тонкий металлический экран, и измеряя малую долю частиц, отклоненных на углы в интервале от  $\varphi$  до  $\varphi + d\varphi$ . Если эта доля мала, то влияние многократного рассеяния должно быть тоже мало.

Опыты в этом направлении продолжаются, но представляется желательным уже на данном этапе рассмотреть в свете изложенной теории те данные по рассеянию альфа- и бета-частиц, которые уже опубликованы.

\* \* \*

(b) В своих опытах, посвященных данному вопросу, Гейгер и Марсден получили относительные числа альфа-частиц, диффузно отраженных от толстых слоев различных металлов при одинаковых условиях. Полученные ими числа помещены

\*) Manch. Lit. Phil. Soc. (1910).

в нижеприведенной таблице, в которой  $z$  выражает относительное число рассеянных частиц, измеренное как число сцинтилляций в минуту на экране из сернистого цинка.

Металл	Атомный вес	$z$	$z/A^{3/2}$
Свинец	207	62	208
Золото	197	67	242
Платина	195	63	232
Олово	119	34	226
Серебро	108	27	241
Медь	64	14,5	225
Железо	56	10,2	250
Алюминий	27	3,4	243
Среднее			233

По теории однократного рассеяния доля общего числа альфа-частиц, рассеянных под данным углом по прохождении слоя вещества толщиной  $t$ , пропорциональна величине  $n \cdot A^2 t$ , если принять, что центральный заряд пропорционален атомному весу  $A$ . В рассматриваемом случае толщина слоя вещества, из которого рассеянные альфа-частицы способны вылетать и действовать на экран из сернистого цинка, зависит от природы металла. Поскольку Брэгг показал, что тормозящая способность атома по отношению к альфа-частице пропорциональна квадратному корню из атомного веса, значение  $nt$  для различных элементов пропорционально величине  $1/\sqrt{A}$ . В данном случае  $t$  выражает максимальную глубину, с которой отбрасываемая альфа-частица способна вылететь. Таким образом, число  $z$  альфа-частиц, рассеянных толстым слоем назад, пропорционально  $A^{3/2}$ , откуда следует, что  $z/A^{3/2}$  должно быть постоянным.

Для сопоставления этого вывода с экспериментальными данными в последнем столбце таблицы приведены относительные значения рассматриваемого отношения. Учитывая трудности, связанные с проведением описываемых опытов, согласие между теорией и опытом можно считать удовлетворительным \*).

## 11. Пузырьковые камеры

Можно составить представление об уровне экспериментальных исследований на передовой линии современной физики, рассмотрев работу системы из пузырьковой камеры и связанных с ней цифровых счетно-решающих устройств, использованной при открытии многих из нестабильных частиц \*\*).

Пузырьковая камера способна обнаружить трек заряженной частицы и фиксировать его с точностью до 25 микрон. Она была изобретена в 1952 г. Дональдом Глейзером и работает следующим образом. При прохождении частицы сквозь вещество она ионизирует некоторые из ближайших атомов и сообщает некоторую кинетическую энергию отскакивающим электронам. При замедлении этих электронов их кинетическая энергия обуславливает местный нагрев жидкости. Если жидкость уже была перегрета и ищет себе места, где бы начать закипать, она и

\*) В проделанном расчете влияние изменения скорости при встрече с атомом не учитывалось.

\*\*\*) Соответствующий материал можно почерпнуть из неопубликованных частей рукописи статьи «Сильно взаимодействующие частицы» («Strongly Interacting Particles»), написанной в 1963 г. Дж. Чу, М. Гелл-Манном, А. Розенфельдом.

будет закипать в этих отдельных нагретых местах. Образующимся пузырькам дают возможность расти в течение нескольких миллисекунд, после чего производится световая вспышка, и они фотографируются одновременно под несколькими различными углами, так что их положение в пространстве может быть воспроизведено стереографически.

В ранних пузырьковых камерах перегретая жидкость представляла собой несколько кубических сантиметров углеводорода, кипящего при подходящих температуре и давлении. Однако специалисты по элементарным частицам предпочитают изучать взаимодействие с простейшей из возможных мишеней — с отдельным нуклоном. Поэтому они теперь направляют свои пучки внутрь больших количеств жидкого водорода и исследуют взаимодействие частиц с отдельными протонами. Около 1955 г. физиками нескольких лабораторий были разработаны водородные пузырьковые камеры объемом до литра, и вскоре стало ясно, что можно заставить работать камеры и большего объема.

Затем возникла проблема интерпретации и промера треков. Водород со своей изолирующей вакуумной системой всегда помещается в сильное магнитное поле, изгибающее траектории заряженных частиц. Измеряя кривизну треков, можно вычислять импульс частиц. Однако даже самые сильные достижимые магнитные поля способны загнать треки частиц высоких энергий лишь на углы порядка  $10^\circ$ . Для достаточно высокого разрешения импульсов (и, следовательно, энергий) необходимо измерять эти малые кривизны с точностью до нескольких процентов. Это означает, что мы должны измерять координаты точек фотографического изображения трека с точностью до нескольких микрон на пленке шириной в несколько сантиметров. Требуется, следовательно, точность, соответствующая относительной ошибке в одну десятитысячную. Измерения должны быть быстрыми и надежными, так как каждая камера диаметром в несколько футов способна выявить до 100 000 интересных событий в год. Каждое событие (превращение) может потребовать промера до пяти треков в двух-трех стереографических проекциях; в сумме это составляет до миллиона промеров треков в год. Старомодный микроскоп должен быть автоматизирован, и его работа должна быть ускорена.

Наибольший вклад в дело развития крупных водородных пузырьковых камер и анализирующих систем, не отставая от развития камер, был сделан Л. У. Альваресом и его группой в Радиационной лаборатории им. Лоуренса в Беркли. Первый вариант их установки для обследования треков, названный «франкенштейном», представлял собой сервоагрегат чудовищной сложности стоимостью в 100 000 долларов. Он снабжен проекционной оптической системой, позволяющей оператору наблюдать за событием по картине, проектируемой с фотоснимков. Стоит только совместить крест нитей (оптическую ось) с какой-либо точкой трека, как сервомеханизм позволяет оператору «вести» эту ось по треку автоматически (с такой же точностью, с какой машинист ведет поезд по железнодорожному пути), записывая в то же время автоматически последовательные координаты на перфокартах или на бумажной перфоленте. При работе в течение примерно 120 часов в неделю эта установка промеряет около 30 000 событий в год.

Программирование вычислительных устройств для анализа выходных данных «франкенштейна» было осуществлено физиками нескольких университетов. Существует три фазы этого анализа: пространственная фиксация отдельных треков; кинематический анализ итогов событий и событий в целом; статистический анализ данных всего опыта. Фиксация треков является прямым применением стереографической техники. Программа фиксации предусматривает вычисление направления и импульса для каждого трека, а также пределов погрешности этих характеристик и их корреляцию. Программа кинематического анализа событий, получившая название «Кик» («Kick»), специально составлена для физики элементарных частиц.

В результате проверки многих гипотез о реакциях между элементарными частицами программа «Кик» обычно обеспечивает их отбор или по крайней мере значительно сокращает число неоднозначностей. Программы фиксации треков и «Кик» содержат около 10 000 команд и написаны для вычислительных устройств фирмы IBM серий 704, 709, 7090 и т. д. По этим программам обработка типичного события вычислительным устройством серии 7090 занимает около четырех секунд. Обработка данных пузырьковых камер производится в настоящее время на

нескольких подобных вычислительных устройствах, работающих в США и Европе непрерывно. Работу такого вычислительного устройства можно коммерчески оценить примерно в один миллион долларов в год.

В период с 1955 по 1959 г. размер водородных пузырьковых камер, вводимых в эксплуатацию во всем мире, быстро возрастал. В 1959 г. для обслуживания бэватрона в Беркли была запущена камера длиной в 180 см. К началу 1960 г. скорость обработки ее данных достигла одного события за каждые несколько минут; программы вступили в действие, и вычислительное устройство успевало обрабатывать не только поступающие данные, но и, задним числом, пленки, снятые за истекший год.

Установки с пузырьковыми камерами действуют теперь при всех крупных ускорителях и в период с 1961 по 1963 г. выявили около дюжины новых частиц. К 1963 г. более половины частиц было рассортировано по всем квантовым числам, а остальные находились в разных стадиях уточнения. Все они, кроме одной, нестабильны. Характерно, что еще в 1961 г. физиками лаборатории Hopkins/Northwestern при обработке пленки от бэватрона был открыт новый стабильный мезон —  $\eta$ -синглет. В конце 1963 г. 180-сантиметровая камера в Беркли была превзойдена двухметровой камерой Национальной лаборатории в Брукхэвене.

Весь период развития пузырьковых камер — от открытия их принципа (в 1952 г.) до выявления серии новых частиц буквально конвейерным порядком (1961 г.) — занял около 10 лет. Это может служить иллюстрацией сложности экспериментальной работы в области физики элементарных частиц. Аналогичным образом, открытие антипротона, сделанное в 1955 г., было результатом принятого в 1948 г. решения строить бэватрон — первый ускоритель, способный сообщать протонам достаточную энергию для искусственного образования антипротонов. Как видно, десять лет — не слишком долгий период для приведения в исполнение крупного проекта в области техники исследования элементарных частиц.



ПРИЛОЖЕНИЕ

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Значение и единицы измерения		Обозначение или сокращение	Исходное соотношение
<b>Общие</b>			
57,3 градуса (57°20')	≡ 1 радиан		180°/π
3,44·10 <sup>3</sup> минут (дуги)	≡ 1 радиан		
2,06·10 <sup>5</sup> секунд (дуги)	≡ 1 радиан		
0,0174 рад	≡ 1 градус	°	π/180°
2,91·10 <sup>-4</sup> рад	≡ 1 минута (дуги)	'	
4,85·10 <sup>-6</sup> рад	≡ 1 секунда (дуги)	"	
1,61·10 <sup>8</sup> см	≡ 1 миля	ми	
10 <sup>-8</sup> см	≡ 1 ангстрем	Å	
10 <sup>-6</sup> см	≡ 1 микрон	мкм	
2,998·10 <sup>9</sup> в	≡ 1 ед. СГСЭ <sub>0</sub>		10 <sup>-8</sup> с
2,998·10 <sup>10</sup> см/сек	Скорость света в вакууме	c	
≈980 см/сек <sup>2</sup>	Ускорение силы тяжести на поверхности Земли	g	GM <sub>З</sub> /R <sub>З</sub> <sup>2</sup>
6,670·10 <sup>-9</sup> дин·см <sup>2</sup> /г <sup>2</sup>	Гравитационная постоянная Земли	G	
1 дина	≡ 1 г·см/сек <sup>2</sup>		
<b>Астрономические</b>			
3,084·10 <sup>13</sup> см	≡ 1 парсек		
9,46·10 <sup>17</sup> см	≡ 1 световой год		с·сек/год
1,49·10 <sup>13</sup> см	≡ 1 астрономическая единица (≡ радиусу земной орбиты)		
~10 <sup>30</sup>	Число нуклонов	} Известная Вселенная	
≈10 <sup>23</sup> см	Радиус		
~10 <sup>11</sup>	Число галактик		
≈3·10 <sup>-18</sup> (см/сек)/см	Скорость удаления туманностей		
≈1,6·10 <sup>11</sup>	Число звезд	} Галактика	
~10 <sup>23</sup> см	Диаметр		
~8·10 <sup>44</sup>	Масса		
6,96·10 <sup>30</sup> см	Радиус	} Солнце	
2,14·10 <sup>8</sup> сек	Период обращения		
1,99·10 <sup>33</sup> г	Масса		
1,49·10 <sup>23</sup> см	Радиус орбиты	} Земля	
6,37·10 <sup>8</sup> см	Средний радиус		
5,98·10 <sup>27</sup> см	Масса		
5,52 г/см <sup>3</sup>	Средняя плотность		
3,16·10 <sup>7</sup> сек	≡ 1 год (период обращения)		
8,64·10 <sup>9</sup> сек	24 часа (период вращения)		
3,84·10 <sup>10</sup> см	Радиус орбиты	} Луна	
1,74·10 <sup>3</sup> см	Радиус		
7,34·10 <sup>22</sup> см	Масса		
2,36·10 <sup>6</sup> сек	Период обращения		
<b>Газы</b>			
22,4·10 <sup>3</sup> см <sup>3</sup> /моль	Объем моля при стандартных условиях	V <sub>0</sub>	
2,69·10 <sup>19</sup> см <sup>-3</sup>	Число Лошмидта	n <sub>0</sub>	N <sub>0</sub> /V <sub>0</sub>

Значение и единицы измерения		Обозначение или сокраще- ние	Исходное соотношение
6,0225·10 <sup>23</sup> моль <sup>-1</sup>	Число Авогадро	$N_0$	
8,31·10 <sup>7</sup> X	Газовая постоянная	$R_0$	
Хэрг·моль <sup>-1</sup> ·град <sup>-1</sup>	Постоянная Больцмана	$k, k_B$	$R_0/N_0$
1,381·10 <sup>-11</sup> эрг/°К	Атмосферное давление		
1,01·10 <sup>6</sup> дин/см <sup>2</sup>	Средняя длина свободного пробега в азоте при стандартных условиях		
~10 <sup>-5</sup> см	Скорость звука в воздухе при стандартных условиях		
3,32·10 <sup>4</sup> см/сек			
<b>Атомные</b>			
6,626·10 <sup>-27</sup> эрг·сек	Постоянная Планка	$h$	
1,054·10 <sup>-27</sup> эрг·сек	Постоянная Планка/2π	$\hbar$	$\frac{h}{2\pi}$
13,6 электрон-вольт	Энергия, связанная с 1 Ридбергом		$hc$
1,98·10 <sup>-16</sup> эрг	Энергия, связанная с 1 волнового числа		
1,60·10 <sup>-19</sup> эрг	Энергия, связанная с 1 электрон-вольт	$eV$	
1,24·10 <sup>-4</sup> см	Длина волны, связанная с 1 электрон-вольт	$\lambda_0$	$\frac{hc^2}{e}$
8066 см <sup>-1</sup>	Волновое число, связанное с 1 электрон-вольт		$1/\lambda_0$
2,42·10 <sup>14</sup> сек <sup>-1</sup>	Частота, связанная с 1 электрон-вольт	$\nu_0$	$c/\lambda_0$
0,529·10 <sup>-8</sup> см	Радиус боровской орбиты атома водорода в основном состоянии	$a_0$	$eh/2mc$
~10 <sup>-3</sup> см	Радиус атома		
0,927·10 <sup>-20</sup>	Магнетон Бора	$\mu_0$	$\frac{e\hbar}{2mc}$
0,505·10 <sup>-23</sup> эрг/гс	Ядерный магнетон	$\mu_{яд}$	$\frac{e\hbar}{M_p c}$
137,04	Обратная величина постоянной тонкой структуры	$\alpha^{-1}$	$\frac{\hbar c}{e^2}$
<b>Частицы</b>			
1,6725·10 <sup>-24</sup> г	Масса покоя протона	$M_p$	
1,6747·10 <sup>-24</sup> г	Масса покоя нейтрона	$M_n$	
1,66042·10 <sup>-24</sup> г	Атомная единица массы ( $\equiv 1/12$ массы C <sup>12</sup> )	а.е.м.	
0,911·10 <sup>-27</sup> г	Масса покоя электрона	$m$	
0,9382·10 <sup>9</sup> эв	Энергия, эквивалентная массе покоя протона	$E_p$	$M_p c^2$
0,9395·10 <sup>9</sup> эв	Энергия, эквивалентная массе покоя нейтрона	$E_n$	$M_n c^2$
0,511·10 <sup>6</sup> эв	Энергия, эквивалентная массе покоя электрона		$mc^2$
1836	Масса протона/масса электрона		$M_p/m$
2,82·10 <sup>-13</sup> см	Классический радиус электрона	$r_0$	$e^2/mc^2$
4,803·10 <sup>-10</sup> ед. СГСЭ <sub>q</sub>	Заряд протона	$e$	
3,86·10 <sup>-11</sup> см	Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_k$	$h/mc$

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация света 369  
— — звезд 333—337  
Акселерометр 103  
Анггармонический осциллятор 225, 252—253  
Антипротонный порог 431—432  
Античастицы 449  
Астрономическая единица длины (а. е.) 312  
Атом Бора — Резерфорда 448—449

Бариионы 456, 465  
*Бергстранд* 332, 342  
*Бор Н.* 449  
Боровский радиус 294  
*Бредли Д.* 333  
Бэватрон 431

Вектор четырехмерный 393  
Векторное поле 123  
— —, его применения 61—63  
Векторы 45—69  
—, дифференцирование 48—52  
—, произведения 59—60, 66  
—, сложение 47, 69  
Взаимодействующие силовые, типы 465—466  
Возраст Вселенной 350  
Вращательный момент 203  
Время жизни частиц 456, 460  
— релаксации 232, 252  
Вселенная, возраст 350  
—, радиус 350, 395

Галактика 84, 87, 211, 315  
—, гравитационная энергия 291  
— карликовая 315  
—, сжатие 323—326  
—, форма 210—212

*Галилей* 85  
Галилея преобразование 90—93, 366—367, 371  
— принцип относительности 89—90  
Гармонический осциллятор 177, 183, 219  
— —, время релаксации 232  
— —, вынужденные колебания 239  
— —, — —, поглощение мощности 244  
— —, диссипация мощности 236  
— —, затухающий 234—238  
— —, коэффициент затухания 232  
— —, уравнение движения 223  
— —, энергия 220, 228—230

*Гаусс* 29, 30  
Гауссова система единиц 120—126  
*Гиббс* 46, 77  
Гирокомпас 281  
Гиромагнитное отношение 277  
Гироскол 279  
Гироскопическая стабилизация 283  
Главные оси 273

Гравитационная длина 295  
— масса 108, 439  
— постоянная 184  
— сила 121, 284, 314  
— энергия 290—291

Двойные звезды 315  
Динамика релятивистская 381—448  
— твердых тел 258—283  
*Дирак* 25, 65  
Диссипация мощности 236—238  
Дифференцирование векторов 48—52  
— произведений векторов 117  
Добротность осциллятора 238, 250

Задача Кеплера 296  
— о движении двух тел 298—302  
Закон всемирного тяготения 85, 107  
— Гука 169, 227  
— Кулона 121  
— сохранения импульса 95, 192, 193, 400—403  
— — момента импульса 203—204  
— — энергии 96, 160, 164, 182  
Законы Кеплера 296, 311—313  
— Ньютона 78  
— сохранения 95, 159—160  
Замедление времени 376—371  
Заряд элементарный 122  
— — постоянство 418  
Заряженная частица в магнитных и электрических полях 126—128, 130—135  
Звезды двойные 315  
— новые 362  
— переменные 362  
*Зоммерфельд* 258

Импульс 95  
—, закон сохранения 95—98, 192—193, 400—403  
— релятивистский 402—403  
Импульса момент 203  
Инвариант Лоренца 384  
Инвариантность величины скорости света 358  
— интервала 389, 391  
Индукция магнитного поля 124—125  
Инертная масса 108, 408, 439  
Инерциальная система отсчета 81—87  
Инерциальные коэффициенты 263  
Интервал 389  
Искривление лучей вблизи Солнца 33

Кинетическая энергия 161, 167—168  
— — вращательного движения 270—272  
— — гармонического осциллятора 220, 228—230

Классический радиус 293  
Колебания двухатомной молекулы 300—302  
Кометы 415—416  
Комптоновская длина волны 36, 282, 294  
Консервативные силы 172, 173  
Континуум четырехмерный 387  
Красное смещение 348—349  
— гравитационное 444—447  
Кривизна пространства 29—32  
Кристаллическая решетка 73—74  
Круговое движение 50—53  
Круговые орбиты 309—311

*Лармор* 368  
Лептоны 456, 465  
Лифт свободно падающий 104  
*Лоуренс* 153, 154, 155, 379

Магнитная сила 124—125  
— фокусировка 137—138  
Магнитное поле 132—139, 142  
Магнитные монополи 141  
*Майкельсон* 339  
Майкельсона и Морли опыты 353—358  
*Максвелл* 352  
Масса гравитационная 108, 439  
— фотона 442—445  
— инертная 108, 408, 439  
— на пружине 227, 247  
— покоя 400, 404, 412, 457  
— приведенная 298—300  
— релятивистская 403  
— частиц 456—458  
Масс-спектрометр 189  
Массы и энергии взаимосвязь 408, 420  
Маятник математический 220  
— Фуко 105—106  
Маятники Ньютона 447  
Мезоны 456, 465  
*Минковский* 386  
Момент 71  
— вращения 203, 258  
— внутренних сил (спин) 205—206  
— импульса 203  
— планет Солнечной системы 213—214  
— — сохранение 203—208  
— — элементарных частиц 214  
— инерции 259  
— — стержня 268  
— — цилиндра 268, 269  
— — шара 266, 269  
— — шарового слоя 265  
Мощность 58, 171  
— единицы 172

Наклонная плоскость 272  
Направление ветров 116  
Напряженность электрического поля 122, 125  
Неинерциальная система отсчета 88, 102—106  
*Ньютон* 78, 118—119

Орбиты круговые 309—311  
— метеоритов 316  
— планет 296—297  
— —, числовой расчет 327—330  
— —, эксцентриситет 307, 309  
Осциллятор ангармонический 225, 252—253  
— гармонический (см. Гармонический осциллятор)

Параллакс звезд 361  
Параметрическое усиление 254—255

Парсек 313  
Поле векторное 123  
— магнитное 132—139, 142  
— электрическое 123, 126—132, 142  
Пороговая энергия 428—432  
Постоянная Больцмана 322  
— гравитационная 184  
— Планка 294  
— силовая 169, 302  
— тонкой структуры 294, 331  
Постоянство элементарного заряда 418  
Потенциал 179  
— гравитационный 185—186  
— электростатический 179—180  
— Юкавы 189  
Преобразование Галилея 90—93, 366—367, 371  
— Лоренца 365—398  
— — импульса и энергии 405  
— — скорости изменения импульса 417  
— систем отсчета 144—147  
Прецессия спина в постоянном магнитном поле 277—278  
— шара 275  
Принцип относительности Галилея 89  
— суперпозиции 246  
— эквивалентности инертной и гравитационной масс 439—440  
— — массы и энергии 408, 420

Работа 161—162, 166, 168, 176  
—, единицы измерения 161—162  
Размерности 135—136  
Резонанс 242, 257  
— спиновый 278  
Релятивистская динамика 381—448  
— масса 403  
— сила 417  
— энергия 404, 405  
Релятивистский импульс 402—403  
Релятивистское сложение скоростей 371, 372  
— уравнение ракеты 432—433

Световой конус 389  
Свободное падение 114—115, 168—169  
Сила инерции 101—102  
— Кориолиса 114  
— линейная восстаивливающая 169—170, 183  
— Лоренца 125, 173  
— магнитная 63; 124, 125  
— релятивистская 417  
— трения 174, 232  
— центральная 172, 204  
— центробежная 104  
— электростатическая 124  
Силовая постоянная 169, 302  
Силы гравитационные 121, 284, 314  
—, действующие по закону обратных квадратов 121, 284—330  
— консервативные 172—173  
—, четыре основных типа 466  
Симметричный волчок 275  
Синхротрон 435—438  
Система единиц Гаусса (СГС) 120—126  
— центра масс 197, 200, 262, 428  
Скорость абсолютная 89—90  
— во вращающихся системах координат 111—114  
— относительная 89—90  
— света 331  
— —, измерение 332—333, 337—342  
— —, инвариантность 358  
Сложение скоростей релятивистское 371—372  
Сокращение длины 374—376  
Спин 205, 214

спин, прецессия в постоянном магнитном поле 277—278  
Столкновение атомов и молекул 99  
— возбужденных частиц 198  
— метеоритов с атмосферой 217—218  
— слипающихся частиц 195—197, 406—407  
— частиц 99—101, 195  
— — тяжелой и легкой 100

Температура внутри Солнца 322  
Тензор 46  
— Левш-Чивита 77  
Теорема о вириале 318—326  
— — параллельных осях (Штейнера) 267  
Томпсон 448  
Трение 174, 232

Угловая скорость 50, 117  
— частота 50, 222  
Ультрацентрифуга 79—81  
Уравнение конического сечения 306—307  
Уравнения Эйлера 274  
Ускорение 49, 111—114  
— абсолютное и относительное 88—89  
— во вращающейся системе отсчета  
— заряженных релятивистских частиц в электрическом и магнитном полях 422—427  
— — частиц в циклотроне 138—139, 142  
— — электрическим полем 128—129  
— Кориолиса 111—114  
— силы тяжести 80, 116  
— угловое 210—211  
— центробежное 52, 83, 103  
Ускорители частиц 359, 431, 435, 455

Фаза гармонического осциллятора 222, 239—240  
Фазовый график 251  
Фейнман 327  
Франклин 448

Характеристические длины и числа 293—296  
Хевисайд 46

Центр масс 110, 194—195  
Центральная сила 172, 204

Центробежная сила инерция 104  
Центростремительное ускорение 52, 83, 103  
Циклотронная частота 134, 136

Частицы, время жизни 456, 460  
—, заряд 459—460  
—, масса 456—458  
—, рассеяние 466—472  
—, столкновение (см. Столкновение частиц)  
— элементарные 449—474  
Частота основная 227  
— свободной прецессии 278  
— угловая 50, 222  
— циклотронная 134, 136  
Часы, движущиеся с ускорением 383  
Четырехмерный вектор 393  
— континуум 393

Эйнштейн А. 34, 394—395, 420—421  
— —, теория относительности общая 394  
— —, — специальная 394—397  
Эквипотенциальные поверхности 296—297  
Эксцентриситет 307  
— эллипса 309  
Электрическое поле 123, 126—132, 142  
Электрон 449  
—, боровский радиус 294  
—, классический радиус 293  
Электрон-вольт (эВ) 181  
Элементарный заряд 122  
— —, постоянство 418  
Энергетические уровни 301  
Энергии и массы взаимосвязь 408, 420  
— функция 164, 166  
Энергия гармонического осциллятора 228—230  
— гравитационная 290—291  
—, закон сохранения 96, 160, 164  
— звезд 316, 411  
— кинетическая 161, 167—168  
— пороговая 428—432  
— потенциальная 162, 163, 174, 176  
— расщепления 411  
— релятивистская 404—405  
— связи ядер 409  
— солнечная 419  
— электрического поля 179  
Эффект Доплера 344—348  
— — релятивистский 381—383